About two Problems of Number Theory

O dvou problémech teorie čísel

Jaroslav BERÁNEK

Abstract

The article is devoted to teaching of future teachers of Mathematics and contains some topics suitable for deepening and enlarging of their knowledge. The article deals with two problems from the international Mathematics competition Putnam Exam (the problem of harmonious triads and the Josephus problem). While solving these problems the binary number system is used among others.

Keywords

binary system; recurrence relation; inductive method; irrational number

Abstrakt

Příspěvek je věnován přípravě budoucích učitelů matematiky a obsahuje témata vhodná k rozvíjení a rozšiřování jejich znalostí. Příspěvek obsahuje dva řešené problémy ze zahraniční matematické soutěže Putnam exam (problém vyvážených trojic a Josephusův problém). Při jejich řešení využijeme mj. dvojkovou poziční číselnou soustavu.

Klíčová slova

dvojková soustava; rekurentní vztah; induktivní postup; iracionální číslo

DOI: *https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.P210-8590-2017-1*

Úvod

V současné době došlo v obsahu výuky na základních a středních školách k významné obměně. Každá škola má vytvořen svůj vlastní školní vzdělávací program, který umožňuje základní učivo rozvolnit a doplnit dalšími volitelnými tématy. Je zřejmé, že na tuto skutečnost musí odpovídajícím způsobem reagovat i příprava budoucích učitelů. V matematice je nutné kromě základního učiva a potřebného nadhledu k němu poskytnout studentům další témata, která nejsou příliš vzdálena od osnov školské matematiky a která mohou rozvíjet jejich matematické znalosti a dovednosti. Současně je nutné seznamovat studenty s možnostmi pro zájmovou činnost v matematice na školách a s různými typy matematických soutěží. V tomto příspěvku jsou obsaženy dva řešené problémy ze zahraniční matematické soutěže Putnam exam. Tato soutěž

Williama Lowella Putnama se poprvé konala v roce 1938 a každoročně se jí zúčastňují zájemci z řad studentů vysokých škol v USA a v Kanadě. Je to náročná soutěž, trvající šest hodin. Je rozdělena na dvě části po třech hodinách, přičemž v každé části řeší studenti šest problémů. Oba problémy, které jsou obsahem tohoto příspěvku, mají tématicky společné to, že při jejich řešení lze využít dvojkovou poziční číselnou soustavu. Poznamenejme ještě, že převody zápisů čísel z desítkové do dvojkové soustavy a naopak považujeme za známé, podrobnosti lze nalézt v literatuře (např. Bělík 1999, Jelínek 1974). Oba uvedené problémy jsou převzaty z publikace L. C. Larsona (Larson 1990), o Josephusově problému je možno nalézt podrobnější informace v článku P. Pavlíkové (Pavlíková 2012) i na www-stránkách (Weisstein 2017).

Problém vyvážených trojic

Zadání problému: Uspořádaná trojice (x_1, x_2, x_3) kladných iracionálních čísel s vlastností $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ se nazývá vyvážená trojice, jestliže $x_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$. Není-li trojice vyvážená, tj. existuje právě jeden index $j \in \{1, 2, 3\}$ s vlastností $x_j > \frac{1}{2}$ (čísla jsou iracionální), provedeme unární vyvažovací operaci V definovanou takto:

$$V(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3),\ \text{kde } y_i = 2x_i \text{ v případě } i \neq j,\ y_j = 2x_j - 1.$$

Není-li trojice (y_1, y_2, y_3) vyvážená, provedeme tutéž vyvažovací operaci znovu. Vede vždy tento proces po konečném počtu vyvažovacích operací V k vyvážené trojici?

Řešení problému: Úvodem poznamenejme, že po každém provedení vyvažovací operace V bude vždy platit $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\frac{1}{2} < x_3 < 1$. Z předpokladu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ plyne $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$, odkud plyne platnost rovnosti $2x_1 + 2x_2 + (2x_3 - 1) = 1$. S ohledem na definici operace V dostáváme $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Využijeme dvojkovou soustavu. Čísla x_1, x_2, x_3 vyjádříme ve tvaru:

$$x_1 = 0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots,\ \ x_2 = 0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots,\ \ x_3 = 0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots ,. \qquad (1)$$

kde všechny cifry a_i, b_i, c_i, $i \in \mathbf{N}$ jsou buďto 0 nebo 1. Je-li trojice (x_1, x_2, x_3) vyvážená, tzn. $x_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$, musí nutně platit $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ (neboť tato cifra odpovídá v každém z rozvojů mocnině $2^{-1} = \frac{1}{2}$). Nyní určíme, jak se změní dvojkové zápisy (1) po provedení vyvažovací operace V. Protože cifry v zápisech daných čísel (1) odpovídají mocninám $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, \ldots$, je zřejmé, že násobení daného čísla dvěma vede k posunutí desetinné čárky o jedno místo doprava. V případě, že je číslo menší než $\frac{1}{2}$, zůstává u něj před desetinnou čárkou číslice 0. Je-li číslo větší než $\frac{1}{2}$ a menší než 1 (podle zadání), pak se objeví po vynásobení dvěma před desetinnou čárkou číslice 1. Podle definice vyvažovací operace V se však v tomto případě číslo 1 odečítá. Provedení vyvažovací operace tedy u všech čísel dané trojice (1) znamená posunutí desetinné čárky o jedno místo doprava a nahrazení číslice 1 před desetinnou čárkou číslicí 0. Platí tedy:

$$y_1 = 0, a_2\, a_3\, a_4 \ldots,\ y_2 = 0, b_2\, b_3\, b_4 \ldots,\ x_3 = 0, c_2\, c_3\, c_4 \ldots .$$

Postupné provádění operace V pak znamená postupné posouvání desetinné čárky doprava. Problém se nyní redukuje na zjištění, zda po konečném počtu vyvažovacích operací musí nastat případ, kdy všechna čísla ve trojici budou mít současně první číslici za desetinnou čárkou rovnu nule. Ukážeme na příkladu, že tato situace vždy nastat nemusí. Pro další úvahy je nutno si uvědomit, že vzhledem k zadání (všechna čísla jsou kladná iracionální) musí být rozvoje daných čísel v původní trojici (1) nekonečné a neperiodické. Pro konstrukci protipříkladu ukazujícího možnou nekonečnost procesu vyvažování využijeme podmínku $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Součet jedna lze dosáhnout např. tak, že ve vyjádření (1) musí být pro každý index $i \in \mathbf{N}$ právě jedno z čísel a_i, b_i, c_i rovno 1 a zbylé dvě rovny 0. Po rozvinutí součtu $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ve dvojkové soustavě dostaneme za těchto podmínek číslo $0,\overline{1} = 0,11111\ldots$, které je v desítkové soustavě rovno jedné. Příklad výchozí trojice čísel (1) lze zvolit např. takto: Nechť $a_i = 1$, právě když číslo i je liché prvočíslo, v ostatních případech nechť $a_i = 0$. Nechť dále číslo $b_i = 1$, právě když číslo $i - 1$ je liché prvočíslo, v ostatních případech nechť $b_i = 0$. Nakonec nechť $c_i = 1$, právě když $a_i + b_i = 0$, v ostatních případech nechť $c_i = 0$. Žádná dvě lichá prvočísla nenásledují v řetězci přirozených čísel bezprostředně po sobě, proto nikdy nemohou být čísla a_i, b_i pro žádný přirozený index i současně rovna jedné. Protože prvočísel je nekonečně mnoho a jejich rozložení v řadě přirozených čísel je zcela nepravidelné, nemůže být při dané volbě indexů žádný z rozvojů ve vyjádření (1) periodický. Výchozí trojici čísel volíme tedy takto:

$$x_1 = 0,001010100010100010100010000010100000100 0\ldots ,$$
$$x_2 = 0,000101010001010001010001000001010000010 0\ldots ,$$
$$x_3 = 0,110000000110000011000001100111100000111 10011\ldots .$$

Z provedených úvah plyne, že tato trojice čísel není vyvážená a proces vyvažování prováděný postupnými iteracemi operace V nikdy nemůže skončit vyváženou trojicí, neboť při postupném posouvání desetinné čárky o jedno místo doprava vždy bude právě jedno z čísel mít hned za desetinnou čárkou číslici jedna a tedy bude větší než $\frac{1}{2}$.

Josephusův problém

Obecná formulace: Nechť $k, n \in \mathbf{N}, 2 \leq k \leq n$. Čísla $1, \ldots , n$ rozmístíme v přirozeném uspořádání po obvodu kruhu (např. proti směru hodinových ručiček). Prvních $k -1$ čísel ponecháme beze změny, pak odstraníme číslo k, dále postupně proti směru hodinových ručiček odebíráme každé k-té číslo z těch, která ještě zůstala. Proces odebírání čísel končí, jakmile na obvodu kruhu zůstane méně než k čísel. Označme $L(n, k)$ množinu těchto zbylých prvků. Problémem je určit výčtem nebo nějak charakterizovat prvky této množiny.

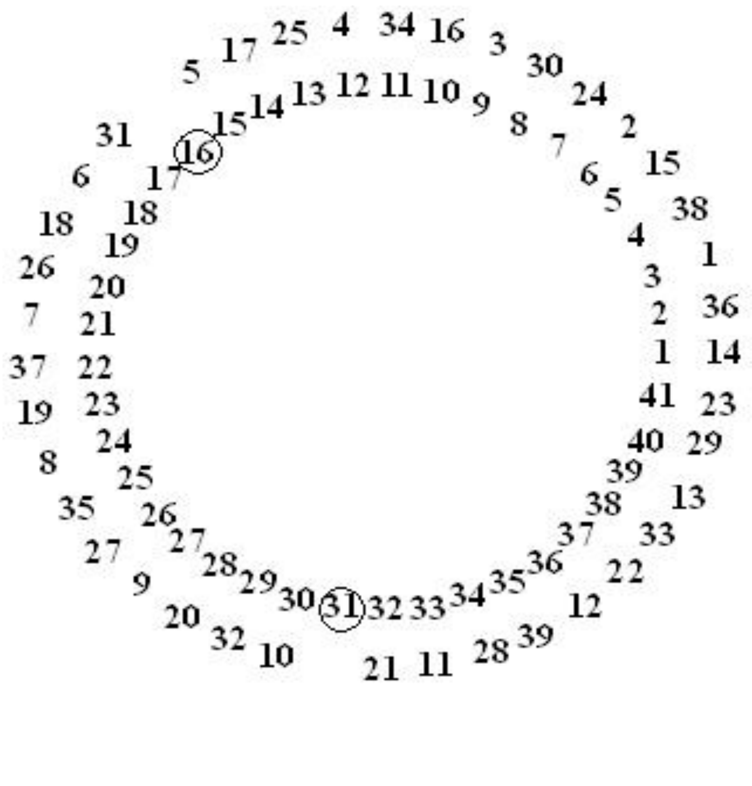
Poznamenejme, že případ pro $k = n$ je triviální; množina zbylých prvků $L(n, k)$ má vždy $k - 1$ prvků a tato situace po konečném počtu odebraných čísel musí vždy nastat.

Nyní uvedeme historický úvod k problému (převzato z Pavlíková, 2012, str. 275). „Josephus Flavius, vlastním jménem Jóséf ben Mattatjáh, se narodil v roce 37 n. l. v Jeruzalémě. Pocházel z vysoce postavené rodiny. Již od raného mládí byl velmi vzdělaný, měl přehled o židovské, řecké i římské kultuře. Když vypuklo židovské protiřímské povstání v Galilei, byl jmenován jedním z hlavních velitelů. Proti přesile, vedené vynikajícím římským vojevůdcem Vespasiánem, však Židé neměli nejmenší šanci. V červenci roku 67 n. l. byl Josephus spolu se čtyřiceti svými bojovníky obklíčen římskou armádou v úkrytu poblíž pevnosti Jotapata. Jeho vojáci se rozhodli vyhnout se zajetí tím, že si vezmou život. Josephus ovšem nesouhlasil a tak na jeho návrh losovali s tím, že další vylosovaný zabije předchozího vylosovaného, a tak budou postupovat tak dlouho, dokud nezůstane naživu jen poslední z nich, který spáchá sebevraždu. O samotném mechanismu losování nemáme podrobnější informace. Ve skutečnosti zůstal Josephus jako jeden ze dvou posledních naživu a svého přítele přemluvil, aby se společně vzdali Římanům. Zda jeho přežití bylo dílem štěstěny nebo výsledkem jeho vychytralosti, dnes můžeme pouze spekulovat.

Pravděpodobně první, kdo popis losování mezi Josephem a jeho muži doplnil legendou o rozestavení 41 mužů do kruhu a jejich postupnou eliminací, byl Girolamo Cardano (1501–1576). v jeho spise *Practica arithmetice et mensurandi singularis* z roku 1539. Za jeden z prvních pokusů o ryze matematický náhled do problematiky rozpočítávacích úloh lze označit práci Leonharda Eulera (1707–1783) z roku 1776 (Euler 1776).“

Formulace Josephusova problému z matematického hlediska podle jednoho z internetových zdrojů je následující (Weisstein, 2017). Josephus byl společně se svými 40 spolubojovníky uvězněn v jeskyni a obklíčen římským vojskem. Raději než zajetí se rozhodli volit dobrovolnou sebevraždu, přičemž postup svého sebezničení provedli v pořadí, které Josephus navrhnul. Všichni se postavili na obvod kruhu a očíslovali se čísly od 1 do 41. Každý třetí potom vždy postupně volil smrt. Bojovníci ovšem netušili, že Josephus se svým nejvěrnějším přítelem zaujali taková dvě místa v kruhu bojovníků, aby nakonec zůstali živí právě jen sami dva. Jim se nakonec po jejich přidání k Římanům podařilo zachránit. V řeči matematiky se jedná o výše popsaný problém pro výchozí hodnoty $n = 41, k = 3$. Postup sebevražd bojovníků a umístění Josephuse a jeho přítele ukazuje následující obrázek 1 (Weisstein 2017).

Obrázek 1. Josephusův problém pro n = 41, k = 3.



Na vnitřní kružnici je zobrazeno původní rozmístění čísel od 1 do 41, čísla na vnější kružnici vyjadřují, kolikátý v pořadí bude takto očíslovaný bojovník odstraněn. Zakroužkovaná čísla 16 a 31 na vnitřní kružnici po odebrání všech ostatních zůstanou (označují pozice Josephuse a jeho přítele).

Nyní se budeme věnovat řešení popsaného problému. Protože pro $k > 2$ je řešení poměrně složité a při určování $L(n, k)$ se využívá komplikovaných rekurentních vztahů a metod (Pavlíková 2012), omezíme se s ohledem na didaktický účel tohoto příspěvku na případ pro $k = 2$. Z obecné formulace plyne, že na kruhu v tomto případě zůstane nakonec jediný prvek. Z didaktických důvodů uvedeme nyní upravenou formulaci problému.

Zadání problému: Čísla $1, 2, \ldots, n$ rozmístíme v přirozeném uspořádání po obvodu kruhu (proti směru pohybu hodinových ručiček). Potom odstraníme číslo 2 a postupně proti směru pohybu hodinových ručiček odebíráme každé druhé číslo z těch, která ještě zůstala. Nechť $f(n)$ označuje poslední číslo, které zůstane na kružnici. Nalezněte funkční předpis pro hodnotu $f(n)$.

Řešení problému: Provedeme v několika částech. Nejprve odvodíme rekurentní vztahy pro funkci $f(n)$, potom induktivním postupem určíme hypotézu pro výpočet $f(n)$ a pomocí rekurentních vztahů ji dokážeme. Nakonec vyjádříme $f(n)$ dvěma způsoby s využitím dvojkové číselné soustavy.

Nechť je rozmístěn po obvodu kruhu sudý počet čísel $1, 2, \ldots, 2n$. Při prvním oběhu po obvodu kruhu budou všechna sudá čísla odstraněna, zůstane celkem n po sobě jdoucích lichých čísel $1, 3, \ldots, 2n - 1$. Posledním odstraněným číslem bylo číslo $2n$, proto na kružnici zůstává číslo 1, odstraní se číslo 3 atd. Vznikne tedy situace analogická základnímu rozmístění čísel $1, 2, \ldots, n$. Proto nyní zbylých n po sobě jdoucích lichých čísel $1, 3, \ldots, 2n - 1$ přeznačíme pomocí bijektivní funkce $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$ definované předpisem $\varphi(n) = 2n - 1$ pro každý prvek množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Místo každého lichého čísla m z množiny $\{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$ si tedy na obvodu kruhu představíme číslo $\varphi^{-1}(m) = \dfrac{m+1}{2}$. Podle definice problému při původním rozmístění čísel $1, 2, \ldots, n$ zůstane po ukončení procesu odstraňování čísel jediné číslo $f(n)$. Protože $f(n) \in \{1, 2, \ldots, n\}$, odpovídá toto číslo s ohledem na definované přeznačení číslu $2f(n) - 1$ z počátečního rozmístění čísel $1, 2, \ldots, 2n$. Dohromady platí tedy pro sudý počet původně rozmístěných čísel $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ vztah $f(2n) = 2f(n) - 1$.

Nechť je nyní původně rozmístěn na obvodu kruhu lichý počet čísel $1, 2, \ldots, 2n+1$. Úvahy budou analogické jako v předchozím případě. Při prvním oběhu budou odstraněna všechna sudá čísla, zůstane celkem $n+1$ po sobě jdoucích lichých čísel $1, 3, \ldots, 2n+1$. Dalším odstraněným číslem bude číslo 1, zůstane číslo 3 atd. Abychom dosáhli analogie s předchozím případem, „přiřadíme" k prvnímu oběhu ještě číslo 1. Nyní po odstranění čísla jedna zůstane na obvodu kruhu n po sobě jdoucích lichých čísel $3, \ldots, 2n+1$. Z nich číslo 3 zůstane, odebere se číslo 5, zůstane 7 atd. Pro přeznačení čísel na obvodu kruhu využijeme bijektivní funkci $\psi: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{3, 5, 7, \ldots, 2n+1\}$ definovanou předpisem $\psi(n) = 2n + 1$ pro každý prvek množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Místo každého lichého čísla k z množiny $\{3, 5, \ldots, 2n+1\}$ si tedy na obvodu kruhu představíme číslo $\psi^{-1}(k) = \dfrac{k-1}{2}$ z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Poslednímu číslu $f(n) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ odpovídá podle definice funkce ψ číslo $2f(n) + 1$ z původně rozmístěných čísel $1, 2, \ldots, 2n+1$. Dohromady pro lichý počet původně rozmístěných čísel $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ platí vztah $f(2n + 1) = 2f(n) + 1$. Hledané rekurentní vztahy jsou tedy tyto:

$$f(2n) = 2f(n) - 1\,, \qquad f(2n + 1) = 2f(n) + 1 \tag{2}$$

Nyní se budeme zabývat nalezením vztahu pro přímý výpočet hodnoty $f(n)$ (viz např. Pavlíková 2012, Weisstein 2017). Využijeme induktivní postup. Hodnoty $f(n)$ pro několik prvních hodnot n jsou uvedeny v tabulce 1:

Tabulka 1: Hodnoty *f(n)* pro n = 1, …, 16

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
f(n)	*1*	*1*	*3*	*1*	*3*	*5*	*7*	*1*

n	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
f(n)	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*	*15*	*1*

Z tabulky lze usoudit na fakt, že hodnota $f(n)$ je rovna jedné, právě když n je mocninou čísla dvě. Přijmeme-li tento fakt za „pracovní hypotézu“, je možno v tabulce pozorovat další zákonitost. Je zřejmé, že pro každé přirozené číslo n je jednoznačně určena dvojice nezáporných celých čísel m, k s vlastností $n = 2^m + k$, přičemž současně $0 \le k < 2^m$. Vyjádříme-li takto přirozené číslo n našeho problému, potom pro hodnotu $f(n)$ platí vztah

$$f(n) = 2k + 1. \tag{3}$$

Vztah (3) dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální a platí, stejně jako pro $n = 2$. Předpokládejme nyní, že vztah (3) platí pro všechna přirozená čísla až do $n - 1$. Další krok matematické indukce provedeme ve dvou případech.

Nechť n je sudé číslo, $n = 2^m + k$, k je sudé číslo; potom platí $\frac{n}{2} = 2^{m-1} + \frac{k}{2}$. Odtud:

$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) - 1 = 2\left(2\frac{k}{2} + 1\right) - 1 = 2k + 1$, s využitím rekurentního vztahu (2) a indukčního předpokladu (3).

Nechť nyní n je liché číslo, $n = 2m + k$, k je liché číslo, tj. $k = 2p+1$; po dosazení za k dostaneme $n = 2^m + 2p + 1$, tzn. $n - 1 = 2^m + 2p$. Potom platí $\frac{n-1}{2} = 2^{m-1} + p$, kde $p = \frac{k-1}{2}$. Platí: $f(n) = 2f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = 2(2p + 1) + 1 = 2\left(2\frac{k-1}{2} + 1\right) + 1 = 2k + 1$, opět s využitím vztahu (2) a indukčního předpokladu (3).

Další zajímavou otázkou nyní je, zda neexistuje vztah pro výpočet hodnoty $f(n)$ ve tvaru funkčního předpisu závisejícího pouze na čísle n (vztah (3) vyžaduje vyjádření čísla n pomocí dalších proměnných). Tento problém již nesouvisí s původním problémem Flaviuse Josephuse, ale jedná se o problém teorie dělitelnosti, popř. teorie čísel. V literatuře (např. Weisstein 2017) lze nalézt řešení. Hledaný vzorec je tvaru

$$f(n) = 2n + 1 - 2^{1 + [\lg n]} \tag{4}$$

kde $[lg\ n]$ označuje celou část reálného čísla $lg\ n$. Poznamenejme, že vztahy (3) a (4) jsou ekvivalentní a dávají pro všechna přirozená čísla n stejné hodnoty. Důkaz je velmi snadný; po dosazení do vztahu (4) platí:
$f(n) = 2\,(2^m + k) + 1 - 2^{1+[lg\ n]} = 2^{(m+1)} + 2k + 1 - 2^{1+[lg\ n]} = 2k + 1$, neboť zřejmě platí vztah $[lg\ n] = m$.

Nyní již máme k dispozici funkční předpis (4), který určuje číslo, které zůstane po odstranění všech ostatních na obvodu kruhu. Jako zajímavou aplikaci uvedeme nyní dvojí možné vyjádření tohoto předpisu pro $f(n)$ s využitím dvojkové číselné soustavy (Larson 1990). Nejprve dokážeme toto tvrzení (z didaktických důvodů uvádíme i přesnou formulaci problému):

Nechť $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ je funkce, pro kterou platí $f(1) = 1$ a která pro každé $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$ splňuje funkcionální rovnice (2). Nechť $a \in \boldsymbol{N}$; číslo a vyjádříme ve dvojkové soustavě: $a = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + 2a_1 + a_0$. Pak platí: $f(a) = b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + 2b_1 + b_0$, kde $b_i = 1$ v případě, že $a_i = 1$, dále $b_i = -1$, jestliže $a_i = 0$. Při převádění čísla $f(a)$ do desítkové soustavy tedy vyjdeme z rozvoje čísla a ve dvojkové soustavě, přičemž koeficienty 1 ponecháme beze změny a koeficienty 0 nahradíme číslem -1. Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k počtu cifer v zápise čísla a ve dvojkové soustavě.

Pro $a = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme tedy, že vztah pro výpočet $f(a)$ platí ve všech případech, kdy číslo a má ve svém dvojkovém zápise $2, 3, \ldots, k$ číslic. Dokážeme, že platí i pro číslo a vyjádřené ve dvojkové soustavě $k+1$ ciframi. Nechť číslo a je vyjádřeno ve dvojkové soustavě jako $a = (a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0)_2$. Je-li a sudé číslo, tzn. $a_0 = 0$, pak $a = 2(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1)_2$, protože stejně jako v prvním problému vyvážených trojic vede násobení čísla vyjádřeného ve dvojkové soustavě číslem 2 k posunu „desetinné“ čárky o jedno místo doprava. Podle předpokladu platí $f\,(2a) = 2\, f(a) - 1$. Potom platí:

$$f(a) = f\,[(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0)_2] = f\,[2(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1)_2] = 2\, f(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1)_2 - 1 =$$
$$= 2(b_k 2^{k-1} + b_{k-1} 2^{k-2} + \ldots + 2b_2 + b_1) - 1 = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + 2b_1 + b_0$$

a tvrzení platí. Nechť nyní a je liché číslo, tj. $a_0 = 1$. Potom platí:

$$a = 2(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1)_2 + 1,\ f(a) = f\,[2(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1)_2 + 1] = 2\, f(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1)_2 + 1 =$$
$$= 2(b_k 2^{k-1} + b_{k-1} 2^{k-2} + \ldots + 2b_2 + b_1) + 1 = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + 2b_1 + b_0$$

a tvrzení opět platí.

Právě dokázaného vztahu lze prakticky využít pro rychlé určení čísla, které jako poslední z rozmístěných n čísel zůstane na kružnici. Stačí číslo n rozvinout ve dvojkové soustavě a každý koeficient nula v tomto vyjádření nahradit při výpočtu číslem -1. Např. $f(17) = f(10001)_2 = 16 - 8 - 4 - 2 + 1 = 3$, $f(43) = f(101011)_2 = 32 - 16 + 8 - 4 + 2 + 1 = 23$. Hodnotu $f(43)$ ověříme i podle vztahu (3). Víme, že $[lg\ 43] = 5$, proto $f(43) = 86 + 1 - 64 = 23$. Čísla jsou z kruhu pro $n = 43$ odebírána v tomto pořadí: *2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 3, 11, 19, 27, 35, 43, 15, 31, 7, 39.*

Vyjádření hodnoty $f(n)$ lze provést i jiným, velmi efektním způsobem. Číslo n vyjádříme ve dvojkové soustavě jako $n = (a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0)_2$. Hodnotu $f(n)$ lze pak určit velmi jednoduchým vyjádřením $f(n) = (a_{k-1} \ldots a_1\, a_0\, a_k)_2$, tj. první číslici zleva v zápise čísla n přesuneme na poslední místo napravo a ostatní ponecháme beze změny. Podobně jako v desítkové soustavě „nuly zleva“ můžeme vynechat. Např. $f(17) = f(10001)_2 = (00011)_2 = (11)_2 = 3$, $f(43) = f(101011)_2 = (10111)_2 = 23$. Důkaz již uvádět nebudeme (není obtížný a vychází z funkčního předpisu (3), viz např. Pavlíková 2012). Oba způsoby vyjádření *f(n)* pomocí dvojkové číselné soustavy jsou opět ekvivalentní.

Závěr

V příspěvku jsme demonstrovali řešení dvou problémů. Jednak problému vyvážených trojic a jednak tzv. Josephusova problému, kde jsme pro $k = 2$ podali celkem čtyři možnosti, jak určit výslednou hodnotu *f(n)*. Oba tyto problémy, stejně jako mnoho podobných dalších, na které v příspěvku nezbylo místo, pocházejí ze zahraniční matematické soutěže Putnam Exam. I z toho je vidět, že vhodnost zadávání takových problémů studentům je nesporná. I když nenaleznou případně úplné řešení problému samostatně, myšlenkové postupy při zkoumání značným způsobem rozvíjejí jejich matematické schopnosti. Současně si uvědomují různé souvislosti, kdy při řešení jednoho problému vyvstane nutnost řešit problém jiný. Při řešení Josephusova problému pro $k = 2$ jsme např. upozornili na problémy ekvivalentnosti různých vyjádření hodnoty *f(n)*. Obtížným problémem, zasahujícím i do oblasti výpočetní techniky, je řešení Josephusova problému pro $k > 2$.

Literatura

Bělík, M. (1999). *Poziční číselné soustavy*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně.

Euler, L. (1776). *Observationes circa novum et singulare progressionem genus.* Novi Commentarii academiae scientarum Petropolitane 20 (1776), 123-139.

Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Jelínek, M. (1974). *Numerační soustavy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Larson, L. C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov*. Bratislava: Alfa.

Pavlíková, P. (2012). O Josephově problému. *Pokroky matematiky, fyziky & astronomie*, *57* (4), 274-284.

Weisstein, E. W. (2017). *Josephus Problem*. From MathWorld, A Wolfram Web Resource. Dostupné z http://mathworld.wolfram.com/JosephusProblem.html

Kontakt

doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta MU
Poříčí 7, 603 00 Brno, Česká republika
beranek@ped.muni.cz