Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy

Shrnutí výsledků
výzkumného šetření

Eva Nováková

Masarykova univerzita
Brno 2016

muni PRESS

Matematika
a didaktika matematiky

Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy

Shrnutí výsledků
výzkumného šetření

Eva Nováková

Masarykova univerzita
Brno 2016

Edice: Matematika a didaktika matematiky
Svazek 1

Recenzovali:
doc. RNDr. Iveta Scholtzová, Ph.D.
prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.

ISBN 978-80-210-8483-4
ISBN 978-80-210-8482-7 (brož. vaz.)

DOI: 10.5817/CZ.MUNI.M210-8483-2016

Obsah

– 1 – Úvodem

Publikace s názvem *Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy* nese znaky odborné monografie zpracovávající aktuální problematiku spojenou se soutěží Matematický klokan v České republice. Je určena širokému spektru potencionálních uživatelů: učitelům primární školy, studentům učitelství a primární pedagogiky v prezenčním, kombinovaném i doktorském studiu, ale také rodičům dětí mladšího školního věku. Autorka, která je garantem kategorií Cvrček (*Pre-ècolier*) pro žáky 2. a 3. ročníku ZŠ a Klokánek (*Ècolier*) pro 4. a 5. ročník ZŠ, zde shrnula výsledky výzkumu připraveného na základě více než desetileté zkušenosti, získané při přípravě české verze soutěžních úloh i při každoroční analýze výsledků. Časové období minulých deseti let přineslo rovněž mnoho podnětných reflexí ze strany učitelů i rodičů žáků. Dílčí poznatky byly prezentovány na setkáních didaktiků matematiky v rámci vědeckých a odborných konferencí a publikovány ve sbornících z těchto konferencí a v didaktických časopisech.

Výzkum byl připraven a realizován s oporou v teoretickém ukotvení problematiky matematických učebních úloh a jejich řešení v celkových souvislostech soutěže Matematický klokan. Jsou také uvedeny výstupy ze dvou autonomních výzkumů, realizovaných autorkou v minulých letech a úzce souvisejících s tématem publikace. Jeden z nich mapoval názory učitelů 1. stupně ZŠ na soutěž a jejich postoje k ní, druhý se zaměřoval na metakognitivní aspekt: měl zjistit, zda žáci 4. a 5. ročníku ZŠ dovedou predikovat a hodnotit vlastní výkon při řešení soutěžních úloh. Uvedená část publikace zohledňuje rovněž novější poznatky o učebních úlohách, jak je přinášejí teoretické studie i výzkumné práce z pedagogiky i didaktiky matematiky. Uveďme alespoň publikace Hošpesové, Stehlíkové a Tiché (2007), Kuřiny a kol. (2009), Jirotkové (2010), Kuřiny (2011), Hošpesové a kol. (2011), Janíka a kol. (2013), Rendla a kol. (2013), Hejného (2014) a Vondrové a kol. (2015). Současně považujeme za potřebné reflektovat změny ve vzdělávacím obsahu matematiky v primární škole, které se promítají do tematického zaměření učebních úloh ve vztahu k aktuálnímu kurikulu Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.

Druhá část tvoří výzkumné těžiště knihy. Šetření bylo zaměřeno na analýzu řešení úloh z kategorie Klokánek, zadaných v soutěži Matematický klokan v roce 2015. Vzhledem k zaměření výzkumného problému byl zvolen kvantitativní výzkum, který se však doplnil o prvky kvalitativně orientovaného výzkumu, opírajícího se především o analýzu písemných záznamů řešitelských postupů žáků. Soutěžní úlohy jsou charakterizovány z pohledu matematického obsahu konvenujícího s aktuálním kurikulem matematiky v primární škole.

Soutěžní úlohy jsou specifické ze dvou hledisek:

- jedná se o úlohy nestandardní, jejichž řešení žákem primární školy obvykle předpokládá uplatnění vyšších kognitivních funkcí,
- mají charakter uzavřených testových položek s výběrem z 5 nabídnutých odpovědí, což není pro žáky primární školy samozřejmostí.

Jsou zcela unikátní v tom, že prakticky stejné úlohy[1] řeší ve stejném čase několik milionů účastníků soutěže v několika desítkách zemí celého světa.

Dále jsou uvedeny možné způsoby řešení úloh a didaktické reflexe, nabízející podněty k následnému didaktickému využití v edukační praxi. Tato část publikace volně navazuje na sborníky z jednotlivých ročníků soutěže, vyvěšené na webové stránce *www.matematickyklokan.net*, a významným způsobem je doplňuje a rozšiřuje.

Výzkumná data byla získána od 680 respondentů následně po 20. březnu 2015, kdy se konalo testování v rámci soutěže. Respondenty výzkumu se stali žáci 4. a 5. ročníku ZŠ. Výkon žáků v testu, jak se projevuje v úspěšnosti řešení celého testu i v řešení jednotlivých úloh, je konfrontován s předpokládanými faktory, intervenujícími do výsledku účastníků: osobnostními charakteristikami žáků (pohlaví, navštěvovaný ročník, známka z matematiky) s využitím statistických metod a procedur.

Ambicí publikace je přinést souhrn poznatků z prostředí soutěže Matematický klokan v kategorii Klokánek pro žáky primární školy, které by bylo možno využít nejen v přípravě a realizaci dalších ročníků soutěže, ale také v reálném edukačním působení.

Autorka děkuje oběma recenzentům, prof. RNDr. Josefu Molnárovi, CSc. z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci i doc. RNDr. Ivetě Scholtzové, Ph.D. z Pedagogické fakulty PU v Prešově, za podnětné připomínky, které významně přispěly ke zkvalitnění textu publikace. Dík patří rovněž Mgr. Miroslavě Poláchové, učitelce ZŠ v Olomouci, za řadu konkrétních poznámek k pracovní verzi textu a Mgr. Kamile Fačevicové, Ph.D. z Pedagogické fakulty UP v Olomouci za odbornou pomoc při statistickém zpracování výzkumu.

1 Liší se pouze národním jazykem, v němž jsou zadány, a minimálními odlišnostmi reflektujícími reálie jednotlivých zemí v kontextových úlohách.

– 2 – Teoretická východiska

– 2 – 1 Učební úloha v primárním matematickém vzdělávání

– 2 – 1 – 1 Charakteristika a typologie učebních úloh

Učební úlohy, jejich řešení žákem, ale i analýza různých aspektů a didaktických funkcí úloh v primárním vzdělávání patří mezi významná témata didaktiky matematiky. Hejný zdůrazňuje, že „ke kvalitnímu matematickému poznání se žák dopracuje samostatným řešením vhodných úloh a následnou diskusí se spolužáky“ (2014, s. 9). Nového významu nabývá problematika učebních úloh v souvislosti s nově koncipovaným kurikulem, zaměřeným na dosahování žákovských výstupů a formování žákovských kompetencí. Knecht a Lokajíčková (2013) uvádějí, že je možné v současnosti zaznamenat oživený zájem o zkoumání učebních úloh především v souvislosti s etablováním nové kultury vyučování a učení.

Učební úloha jako významná kategorie pedagogiky je častým objektem teoretických i empirických studií. Jak zdůrazňují Kalhous a kol., je problematika učebních úloh velmi široká a lze k ní přistupovat z různých hledisek a pozic. V nejobecnější rovině – a z hlediska žáka, řešitele úlohy – lze vymezit učební úlohy jako „širokou škálu všech učebních zadání, a to od úkolů vyžadujících pamětní reprodukci poznatků až po úkoly vyžadující tvořivé myšlení“ (Kalhous et al., 2002, s. 329). V pedagogice bývá definována učební úloha jako „každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle, a je zaměřena na všechny tři aspekty učení – obsahový, operační a motivační“ (Průcha et al. 2003, s. 240). Podobně slovenský pedagog Zelina charakterizuje učební úlohy jako „všechny situace, které subjekt stimulují k činnosti, jež vede k řešení situace“ (1990, s. 34).

V novější pedagogické literatuře se učební úloha vymezuje jako

- „didaktický konstrukt, jehož zadání vyzývá žáka k řešení určitého problému formulovaného tak, aby řešení vedlo k žákovu učení, k rozvoji jeho kompetencí a motivovalo žáka k poznávání; učební úloha je jádrem výukové situace“ (Janík et al., 2013, s. 377),
- mentální a komunikační konstrukt, který
  a) vyzývá žáka k aktivní činnosti s obsahem,

b) vychází z oboru a funkčně spojuje učitelovo vyučování s učením žáků,
c) ve výuce podmiňuje transformaci obsahu a prostřednictvím žákovské činnosti směřuje k cíli učení,
d) zakládá edukativní situaci a podmiňuje její formu, organizaci, průběh (podle Slavík, Dytrtová, & Fulková, 2010, s. 229).

Způsob transformace obsahu v učebních úlohách a jeho vliv na změny v komunikaci, myšlení a jednání žáků je vlastním předmětem studia v oborových didaktikách (Slavík et al., 2014).

Pohled oborových didaktik umožňuje uplatnit další hlediska zkoumání učebních úloh a jejich řešení, reflektující specifika příslušné vědní disciplíny. V oborových didaktikách, tedy také v didaktice matematiky, se obvykle pracuje s teoretickým konstruktem Shulmana (1986) „didaktická znalost obsahu" (*pedagogical content knowledge*), který postihuje specifickou učitelskou schopnost konstruovat obsah vědního oboru do žákům srozumitelného výkladu a učebních úloh, v nichž žáci obsah ve své činnosti a komunikaci realizují (Janík et al., 2013*)*. Práce s obsahem směřuje ke spojení mezi rozvojem kompetencí a osvojováním učiva.

Zvláštní místo učebních úloh a jejich řešení v didaktice matematiky a ve výuce matematiky dokumentuje výrok George Polyi: „Matematiku umí ten, kdo umí řešit úlohy." Ani didaktika matematiky však nedisponuje úplnou a obecně přijímanou definicí matematické učební úlohy – přístupy k uvedené problematice akcentují jednak matematicko-teoretickou, jednak didaktickou stránku.

První z uvedených přístupů lze dokumentovat na klasickém Vyšínově vymezení matematické úlohy. Autor učinil východiskem základní pojmy teorie množin a predikátové logiky: „Je dána neprázdná množina Ω matematických objektů a výroková forma ***f*** o jedné nebo více proměnných. Matematickou úlohou rozumíme určení oboru pravdivosti **P** predikátu ***f*** v množině Ω, tj. množinu **P** všech objektů z Ω, pro něž ***f*** dává pravdivý výrok" (1962, s. 19). Termín *řešení úlohy* používá autor ve dvou významech: jednak jako název pro prvky množiny **P**, jednak jako označení pro přechod od dané úlohy k úlohám jiným (postupné přetváření daného predikátu ***f***).

Kuřina (2011) považuje učební úlohu obecně za výzvu k činnosti. Matematická učební úloha je pak výzvou k matematické činnosti. Matematickou učební úlohou je například lineární algebraická rovnice o jedné neznámé, numerický příklad na písemné sčítání dvouciferných čísel, složená slovní úloha s námětem z oblasti finanční matematiky, konstrukční geometrická úloha na sestrojení trojúhelníku, jsou-li dány jeho dvě strany a úhel jimi sevřený, nestandardní (problémová) úloha vyžadující od řešitele objevení strategie řešení aj.

Při terminologické nejednotnosti jednotlivých autorů v používání termínů *úloha*, *příklad*, *problém*, *otázka*, *cvičení* lze vyčlenit některé společné vlastnosti:
- objektivní stránku úlohy na logické úrovni charakterizuje otázka nebo požadavek řešení (na rozdíl od např. textové informace, za kterou bývá úloha někdy řešitelem, žákem, zaměňována),

- východiskem řešení úlohy je problém subjektu (*problémová situace*),
- úloha je vždy svázána s jazykem, v němž je vyjádřena (Fridman, 1984).

Chceme-li se vyhnout terminologickému nedorozumění, je třeba pojem *matematické úlohy*, resp. matematické *učební* úlohy, chápat jako nadřazený všem ostatním v matematickém vyučování často používaným pojmům (příklad, problém, otázka, cvičení) [2]:

a) *příkladem* se ve vyučování matematice obvykle rozumí jednak požadavek na obvykle numerický výpočet požadovaného údaje, jednak *vzorový* nebo *ilustrující* příklad – text úlohy, případně doplněný jedním nebo více řešeními,
b) *cvičením* se označuje soubor úloh, určených k procvičení probraného učiva, probraných algoritmů, početních i grafických postupů. U cvičení vystačíme při řešení se znalostí postupu, jenž je v podstatě určen textem úlohy a který by si měl žák po přečtení úlohy uvědomit. Tyto úlohy mají charakter „matematického řemesla“, jsou nejčastěji prostými aplikacemi jednoho nebo několika algoritmů,
c) *problémem* se myslí úloha problémového charakteru, předpokládající větší podíl řešitelovy aktivity a vynalézavosti. Řešení problému (problémové, „nestandardní“ úlohy) vyžaduje při řešení tvořivý přístup řešitele. Přitom se obvykle rozlišují tři fáze řešení problému: orientačně-analytická (aktivní zpracování, modelování problémové situace), strategicko-operační (utváření hypotézy, metody, strategie řešení) a synteticko-verifikační (prověřování hypotézy). I úlohy tohoto typu bývají, byť sporadicky, zařazovány do výuky, neměly by však být použity jako úlohy kontrolní,
d) *otázkou* budeme rozumět úlohu zformulovanou jako větu tázací nebo pouhou jednu část (komponentu) matematické úlohy.[3]

Učitel ze své pedagogické zkušenosti ví, že učební úlohy a jejich řešení jsou nedílnou součástí výuky, uplatňují se ve všech etapách vyučovacího procesu při dosahován výukových cílů (Novák, 2013):

- motivovat pomocí matematické učební úlohy znamená vyvolat zájem žáků, zdůvodnit užitečnost nově probíraného poznatku, zajistit pozornost žáků a vytvořit žádoucí tvůrčí pracovní klima. Motivační hodnota úlohy je významná pro její přijetí žákem (a tedy i pro její úspěšné řešení) a závisí nejen na obsahu a tématu úlohy, ale také na subjektivních faktorech, jako jsou schopnosti a vlastnosti osobnosti řešitele,
- matematická učební úloha může být využita při výkladu nového učiva – při objasňování nového pojmu nebo vytváření nové matematické dovednosti. Umožňuje názorně objasnit podstatu vytvářeného pojmu a zařadit jej do didaktického

2 Volně vycházíme z výkladu doc. Vyšína, který uvedenou problematiku prezentoval již před více než 50lety (1962, s. 7).

3 Další terminologické nesrovnalosti souvisejí s anglickými termíny *problem* a *problem solving*. V anglicky psané literatuře se zpravidla užívá termín problem, někdy task, ale v učebnicích se lze setkat i s (*routine*) *exercise*.

systému učiva. Matematický obsah a námět úlohy, které vyučující užije při výkladu nového učiva, je třeba volit přiměřené, reálné, odpovídající skutečnosti a zkušenostem žáků, srozumitelné a jednoznačně formulované,
- řešení matematických učebních úloh je jedním z důležitých způsobů aplikace získaných poznatků a jejich procvičování a upevňování. Uvedená funkce učebních úloh poskytuje žákům příležitost využít osvojené znalosti při řešení praktických, reálných problémů. Úlohy k procvičování tvoří obvykle didakticky promyšlenou řadu, poskytující možnost diferencovat počtem i obtížností řešených úloh,
- matematické učební úlohy mají funkci kontrolní a diagnostickou. Jsou nezastupitelným prostředkem kontroly dosažené úrovně vědomostí, dovedností a vlastností osobnosti žáka, nástrojem pro zjišťování výsledků učení obvykle formou písemných zkoušek.

V literatuře najdeme několik typologií matematických učebních úloh. Polya (2009*)* rozlišuje dva základní typy: úlohy na zjištění hledaného (*určovací úlohy*) jsou zadány otázkou *co platí?* a úlohy důkazové odpovídají na otázku *platí to?*.

Úlohy, které lze řešit pomocí matematického aparátu, třídí Fridman (1984) podle povahy objektů obsažených na úlohy praktické (reálné) a matematické, podle vztahu k teorii na úlohy standardní a nestandardní a podle charakteru požadavků na řešení rozlišuje úlohy na zjištění hledaného, konstrukční (transformační) a důkazové.

Kuřina (2011) uvádí pět nejběžnějších typů úloh, které se vyskytují ve školské matematice: kalkulativní, určovací, rozhodovací, konstrukční, důkazové.

Významný představitel tzv. realistického vyučování matematice Freudenthal (1973) uvádí jinou typologii a rozlišuje úlohy realistické, „pararealistické“ a čistě matematické (numerické příklady). Podobně polská autorka Siwek (2005) v návaznosti na koncept činnostního vyučování Krygowské (1977) klasifikuje učební úlohy využívané v matematickém vyučování na realistické, „pseudorealistické“ a čistě matematické. Zdůrazňuje přitom význam realistických úloh jako významného nástroje žádoucího překonávání předmětové izolovanosti, směřujícího k integrálnímu konceptu vzdělávání.

Jirotková (2010, s. 213) uvádí typologii matematických učebních úloh z kognitivního a metakognitivního hlediska, současně zdůrazňuje sociální kontext úlohy a jejího řešení a některé další aspekty. Její typologie obsahuje 11 typů učebních úloh: seznamovací (žák získává první zkušenosti s pojmem), objevné (řešení úlohy vede žáka k odhalení objektu, vztahu, …), komunikační (úloha, která vyvolává komunikační problém – při porozumění úloze, v průběhu řešení nebo při formulování výsledku), konstrukční (žák zjišťuje konstrukci známého objektu), mapovací (žák objevuje objekty či procesy dané vlastnosti), optimalizační (žák odhaluje optimální objekt, proces, vztah, vlastnost v daném kontextu), vyhledávací (žák pátrá po prvku daných vlastností v předloženém souboru), revizní (žák prověřuje, zda daný objekt, vztah, … splňuje předepsané kritérium; každá úloha vyžadující kontrolu), argumentační (žák zdůvodňuje či vyvrací předepsané tvrzení), na hledání strategie, nácvikové (žák si automatizuje známou proceduru).

Z pohledu školské praxe můžeme matematické učební úlohy rovněž posuzovat a rozlišovat podle různých kritérií.

Všímáme-li si toho, které matematické jevy, poznatky, vědomosti, dovednosti ap. jsou obsahem úlohy, resp. jsou potřebné k řešení, můžeme rozlišovat například úlohy aritmetické, geometrické, algebraické, kombinatorické, z oblasti pravděpodobnosti a statistiky aj.

Kritériem pro třídění úloh může být míra tvořivosti řešitele při řešení. Pak můžeme s určitým zjednodušením rozlišit úlohy standardní – které k řešení využívají známého vzorce, pravidla nebo postupu (receptu, algoritmu) – a nestandardní (problémové) úlohy, k jejichž vyřešení známé postupy a algoritmy nestačí.

Podle toho, jaký je charakter objektů, o něž se v úloze jedná, můžeme rozlišit úlohy, v nichž vystupují pouze matematické výrazy vyjádřené adekvátní matematickou symbolikou – nazveme je úlohy „čistě matematické" – a úlohy, jejichž předmětnou komponentu tvoří reálné objekty z nematematické oblasti, popisující skutečnou situaci přirozeným jazykem, se označují jako slovní úlohy (kontextové, praktické, textové, námětové,..). Slovy jsou v nich vyjádřeny vztahy mezi podmínkami úlohy a otázkou, mezi údaji danými a hledanými.

Poslední uvedené třídění bylo využito při statistické analýze výzkumného šetření, uvedeného ve druhé části publikace, proto o něm bude pojednáno podrobněji.

– 2 – 1 – 1 – 1 Učební úlohy „čistě matematické"

Jsou to učební úlohy, v jejichž zadání se vyskytují elementy matematického jazyka: čísla, konstanty, proměnné, aritmetické a algebraické výrazy, geometrická symbolika apod. Pokyn k řešení úlohy mívá nejčastěji podobu imperativu (určete, vypočtěte, sestrojte…) nebo dotazu (kolik? jak?…).

Jestliže jsou k zadání úloh užity výrazy aritmetické (početní), např. konstanty – číslice 0, 1, 2…, symboly relací a operací = , <, >, + , −, ., :, aj. – označujeme úlohy jako *numerické (aritmetické) příklady*. Řešení úloh vyžaduje znalost početních operací zpaměti nebo písemně, porovnávání a zaokrouhlování čísel, využívá se znalostí dekadické číselné soustavy, algoritmů, vytváření a doplňování tabulek aj.:

a) Vypočítejte: 28 + 54 =
b) Sečtěte písemně: 5 627 + 3 839 + 692.
c) Seřaďte čísla 17, 12, 8, 14, 9 vzestupně a znázorněte je na číselné ose.
d) Zaokrouhlete postupně na desítky, stovky a tisíce: 6 875, 1495, 132 555.

e) Doplňte tabulku:

a	0	1		3	4	
3 . a		3	6	9		15

f) Z číslic 3, 0, 7 sestavte všechna trojciferná čísla, v nichž se žádná číslice nesmí opakovat.

Při řešení geometrických úloh se požadují manipulativní činnosti, kreslení, modelování, rýsování, provádění odhadů a výpočtů:

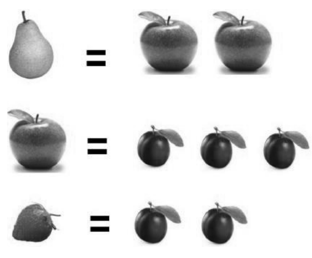
a) Vyberte ze souboru geometrických tvarů všechny červené trojúhelníky.
b) Určete střed úsečky AB pomocí proužku papíru.
c) Nakreslete ve čtvercové síti tři různé obdélníky o stejné velikosti obsahu.
d) Podle zadaného plánu (mapy) postavte stavbu z krychlí.
e) Narýsujte úsečku AB o délce 5 cm.
f) Sestrojte trojúhelník KLM, je-li $|KL| = 3\,cm$, $|LM| = 5\,cm$, $|KM| = 6\,cm$.
g) Vypočítejte obsah čtverce o délce strany 5 cm.

V úlohách algebraických (rovnice, nerovnice) se jedná o matematický zápis rovnosti/nerovnosti dvou výrazů, z nichž aspoň jeden je výraz algebraický:

a) $3x + 5 = 14$
b) $\square + 7 > 9$

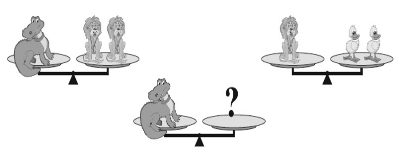
V prostředí primární školy nelze ovšem matematicky korektně využít při řešení rovnic či nerovnic metody ekvivalentních úprav. Žáci se seznamují pouze s řešením „rovnicových“ úloh pomocí vhodných formulací nebo žákům srozumitelných znázornění, například:

c) Myslím si číslo. Když jej vynásobím třemi a přičtu 5, dostanu číslo 14. Které číslo si myslím?
d) Ve hře na výměnný obchod můžeme měnit ovoce tímto způsobem:



Jaký největší počet jahod můžeme získat za 6 hrušek?

e) Co je třeba doplnit místo otazníku?



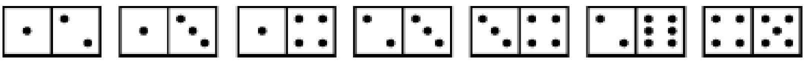
V soutěžních kategoriích určených žákům 1.

stupně ZŠ bývá ovšem i tato skupina čistě matematických – aritmetických, geometrických a algebraických – úloh obvykle uvozena nějakým motivačním slovním vyjádřením a doprovázena obrázkem, často ve spojitosti s řešením úlohy konkrétní osobou, například[4]:

f) Alice správně určila součet. Poté zakryla dvě stejné číslice papírem:
4 ■ + 5 ■ = 104. Kterou číslici Alice schovala?

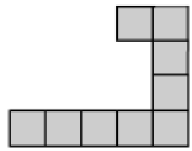
A) 2   B) 4   C) 5   D) 7   E) 8

*g) Jonáš má několik dílků domina (podívej se na obrázek). Chce je sestavit do řady podle následujícího pravidla: sousední pole dvou dílků domina musí mít stejný počet teček. Jaký největší počet dílků může ta*kto seřadit?



A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 7

h) Barbora má k dispozici dílky stavebnice následujícího tvaru (podívej se vpravo): Z jakého nejmenšího počtu takových dílků může složit čtverec?



A) 3   B) 4   C) 6   D) 8   E) 16

i) Pavlínka sestavila ze zápalek řadu 10 domů.
Na obrázku vidíš její začátek. Kolik zápalek potřebuje na celou řadu?

A) 50   B) 51   C) 55   D) 60   E) 62

– 2 – 1 – 1 – 2 Slovní (kontextové) učební úlohy

Zvláštní postavení ve výuce matematiky mají učební úlohy slovní (textové, kontextové, se sémantickým pozadím). Obvykle jimi rozumíme úlohy z praxe, ve kterých je popsána určitá reálná situace, jež vyúsťuje v problém. Ten je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky (Divíšek, 1989). Netvoří ve školské matematice samostatný tematický celek, ale prostupují celým matematickým učivem.

Blum a Niss (1991) uvádějí následující důvody pro systematické zařazování slovních úloh do výuky matematiky:

- jsou vhodným prostředkem pro rozvíjení obecných kompetencí žáků a jejich postojů k matematice,
- umožňují žákům „vidět a posuzovat“, analyzovat a porozumět užití matematiky,

4 Úlohy jsou převzaty ze soutěžních testů kategorie Cvrček a Klokánek v roce 2013. Dostupné z http://www.matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik klokan_2013.pdf

- rozvíjejí schopnost žáků aktivizovat matematické znalosti v mimomatematických situacích,
- pomáhají žákům při poznávání, porozumění a uchovávání pojmů, metod a osvojených matematických znalostí.

Často diskutovaná „reálnost" situace, kterou slovní učební úloha popisuje, je výstižně popsaná v didaktické literatuře naší (Novotná, 2000, 2004) i zahraniční. Toom (1999) v této souvislosti rozlišuje dva důvody zařazení slovních úloh (*word problems*) do výuky matematiky: slovní úlohy jako aplikace a slovní úlohy jako „mentální manipulace". V prvním případě hovoří o úlohách z reálného života (*real-world problems*). Autor však poukazuje na to, že uvedené učební úlohy často nejsou ani nemohou být skutečným obrazem reality, která je příliš komplexní a plná zbytečností. Nácvik jejich řešení proto nevede vždy k požadovanému zvýšení matematických kompetencí žáků. V případě slovních úloh označovaných autorem jako mentální manipulace řešitel pracuje s fiktivními situacemi, jež se v běžném životě nevyskytují (*non-real-world problems*). Argumentem pro jejich zařazení do výuky je podle Tooma skutečnost, že mohou zprostředkovat žákům i složitější matematické koncepty nebo struktury, například z oblasti teorie čísel, teorie grafů či kombinatoriky.[5]

V našem pojetí budeme slovními učebními úlohami rozumět takové, „které jsou dány v nějakém řešiteli srozumitelném kontextu a pokládají otázky, které se dají zodpovědět pomocí údajů v textu uvedených" (Vondrová & Rendl, 2015, s. 8).

Obvykle se v této souvislosti zdůrazňuje (Siwek, 2005) význam analýzy formulace textu slovní učební úlohy. Efektivní četba textu úlohy s porozuměním se považuje za specifický způsob komunikace čtenáře (řešitele úlohy) s úlohou a jejím autorem, vyžadující kognitivní úsilí. Podmínkou jsou lingvistické kompetence (čtenářská gramotnost) řešitele. Orientace v textu – dovednost smysluplně číst a následně přetvořit matematický obsah úlohy do vlastní myšlenkové konstrukce řešitele – je absolutně nutnou podmínkou úspěšného řešení tohoto typu matematických učebních úloh. Vnímání slovní úlohy jako literárního textu, který má svou jazykovou, tj. morfologickou, syntaktickou a stylistickou podobu, a vědomí vlivu porozumění textu na kvalitu řešení úlohy, je současně jedním z příspěvků k humanizaci matematického vzdělávání. S přetrvávajícími prohřešky proti gramatické preciznosti i námětové reálnosti úloh je ovšem možno se v některých učebnicích setkávat i nadále.

Podnětné jsou práce polského didaktika matematiky Semadeniho (1995) zaměřené na problematiku studia obtíží při porozumění zadání slovních učebních úloh žákem základní školy. Autor odlišuje složitost slovní úlohy (jako objektivní vlastnost úlohy) a její obtížnost (vyjadřující vztah mezi úlohou a jejím řešitelem). Obě uvedené vlastnosti ve školním vyučování postupně gradují, a to ve vztahu:

5 V soutěži Matematický klokan jsou právě uvedené oblasti často zastoupeny.

- k matematické struktuře, k matematickému obsahu slovní úlohy.

Spočívá například v postupném přechodu od „malých“ čísel k „velkým“ při rozšiřování oboru numerace přirozených čísel, později v používání zlomků a desetinných čísel v zadání učebních úloh. Slovní úlohy na sčítání a odčítání jsou obvykle méně obtížné než úlohy na násobení a dělení. Od úloh, k jejichž řešení stačí jeden úkon, se přechází k úlohám s komplikovanější strukturou, které lze vyřešit pomocí několika kroků:

a) *Jana pekla koláče. Když je chtěla rozdělit mezi své 2, 3 nebo 4 kamarády, zjistila, že by jí vždy jeden koláč zbýval. Kolik koláčů Jana upekla?*[6]

b) *Před domem byla provedena parková úprava. Z původního čtvercového záhonu o straně délky 10 metrů byl vytvořen obdélníkový záhon tak, že jedna strana byla o 2 metry zmenšena a druhá strana o 2 metry zvětšena. Jak se změnila plocha záhonu?*

- k sémantickému pozadí, kontextové stránce slovních učebních úloh, která se rovněž rozvíjí a obohacuje.

Od tematiky úloh čerpající z bezprostředního okolí žáků, z jejich denní zkušenosti, s reálným sémantickým pozadím, ale také s nereálným (ale pro žáky realistickým) – například náměty z pohádek, sci-fi apod. – se postupně přechází k úlohám z jednoduché finanční matematiky (nákupy, spoření, slevy, …), úlohám s vlastivědnými, fyzikálními, geografickými či ekologickými tématy:

a) *Sněhurka má sedmi trpaslíkům rozdělit k večeři 77 smažených hub. Trpaslíci dostávají jídlo podle velikosti. Nejprve dá Sněhurka houby nejmenšímu Šmudlovi. Každý další trpaslík pak dostane o jednu houbu více než ten předchozí. Kolik hub dostane největší trpaslík?*

b) *Stoletý buk odpaří ve slunečném dni až 400 litrů vody. Kolik hektolitrů vody odpaří v tomto dni 5 takových buků?*

c) *Při nákupu většího počtu vstupenek do kina je každá desátá vstupenka zdarma. Pro školní představení zakoupila paní učitelka 120 vstupenek najednou. Kolik korun tím škola ušetřila, je-li cena vstupenky 45 Kč?*

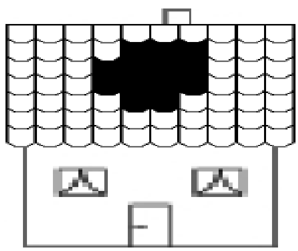
— — —

6 Blažková, R., & Vaňurová, M. (2010). Charakteristika nadaného žáka s poruchou učení z hlediska matematických úloh. In M. Uhlířová (Ed.), *Acta Univ. Palacki. Olom.: Matematika 4* (s. 57–61). Olomouc: Univerzita Palackého.

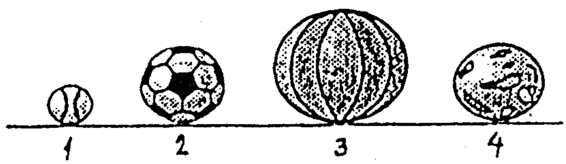
• k „formátování“ učební úlohy (ve smyslu jejího prezentování žákům).

Na zadání učební úlohy pohlížíme jako na precizní a správné, pokud neobsahuje chybné informace či nejasné formulace nebo když je otázka věcně i stylisticky správně sestavena. Matematická učební úloha může být zadána žákovi v různé formě. Nejobvyklejší je písemné zadání úlohy obsahující text, případně text s různými symboly, grafická schémata, obrázky; zadání černobílé nebo s využitím barev. Ve výuce matematiky se postupuje od učebních úloh zprostředkovaných učitelem (učitel obvykle sám čte text, zadání) nebo srozumitelným obrázkem k úlohám, s jejichž zadáním se seznamují žáci sami nejprve hlasitým, později tichým čtením. Od úloh zadaných i řešených činností s konkrétním názorným materiálem přes využití grafických znázornění a schémat až k úlohám, v jejichž vyjádření a v postupu řešení se uplatní matematické symboly. V následujících ukázkách je jako nedílná součást prezentace úlohy uplatněn ilustrační obrázek:

a) *Bouřka způsobila díru ve střeše domu. Kolik tašek zůstalo na střeše v přední části domu?*[7]



b) *Na polici leží čtyři míče, které patří Adamovi, Michalovi, Ondrovi a Dušanovi.*



Adamův míč není nejmenší. Míče Michala a Dušana mají stejnou velikost. Dušanův míč sousedí jen s jedním míčem. Urči, komu který míč patří.[8]

K řešení slovních úloh se vyjadřuje Hejný. V intencích konstruktivisticky orientované výuky matematiky zdůrazňuje, že „rozumět znamená chápat souvislosti, umět formulovat otázky a problémy a řešit je, umět aplikovat teorii“ (2001, s. 82).

— — —

7 *Matematický klokan.* (2008). Olomouc: Univerzita Palackého. Dostupné z http://www.matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2008.pdf

8 Novák, B. (2000). Řešení úloh jako příspěvek k tvořivosti vyučování matematice. In J. Beránek (Ed.), *Sborník prací Pedagogické fakulty MU v Brně* (s. 61–66). Brno: Masarykova univerzita.

Podle něj nestačí být pouhým divákem situace či reprodukovat bez porozumění, ale důležité je konstruovat si reprezentace, musí docházet k transformaci matematické informace z učitelova výkladu.

Řešení slovní úlohy probíhá v několika etapách, které se u jednotlivých autorů poněkud odlišují především mírou podrobnosti rozpracování. Vondrová a Rendl (2015) vymezují čtyři fáze:
- vnitřní přijetí úlohy žákem a snaha porozumět textu úlohy,
- matematizace, kdy žák formuluje úlohu v jazyce matematiky: aritmeticky (pomocí výpočtů), algebraicky (např. rovnicemi) nebo pomocí různých obrázků a diagramů,
- provedení řešení matematicky formulované úlohy,
- ověření získaného výsledku pomocí sémantické zkoušky v kontextu úlohy a reality.

Blažková a kol. (2002) připomínají význam řešení slovních učebních úloh také pro rozvoj matematického myšlení, pozornosti a představivosti a rovněž akcentují didaktický potenciál slovních úloh např. při hlubším porozumění matematickým pojmům, uvědomělém používání početních operací a upevňování počtářských návyků.

Slovní učební úlohy patří mezi nejobtížnější části učiva a učitelé je vesměs uvádějí jako jedno z kritických míst ve výuce matematiky, považují je za „trvalý evergreen mezi obtížnými oblastmi školské matematiky“ (Rendl & Vondrová, 2013, s. 50). Je tomu tak proto, že řešení slovní úlohy v sobě koncentruje řadu úskalí a bariér, které musejí žáci překonat. Fuchs a Zelendová (2015) uvádějí, že u řešení slovní úlohy musejí žáci:
- porozumět čtenému textu – kromě matematické gramotnosti vyžadují slovní úlohy v podstatné míře i odpovídající gramotnost čtenářskou[9],
- přeložit zadaný problém do matematického jazyka,
- vyhledat v textu potřebné údaje, případně dohledat údaje chybějící,
- zvolit efektivní metodu řešeni,
- vyřešit matematickou úlohu,
- přeformulovat matematicky výsledek do odpovídající odpovědi.

Podstata obtížnosti řešení slovních úloh žáky je zřejmě mnohem hlubší, než se na první pohled zdá. Fuchs a Zelendová (2015) provedli výzkum na vzorku 234 učitelů, v němž zkoumali postupy a reakce učitelů při řešení pro ně neznámé slovní učební úlohy. Výsledek ukázal, že všechny typické žákovské chyby, mylné postupy, neschopnost formulace smysluplné odpovědi apod. se až v pozoruhodné shodě objevovaly i v učitelských řešeních.

9 Autoři vymezují čtenářskou gramotnost jako „schopnost jedince porozumět textu, přemýšlet o něm a používat jej k dosahování určených cílů, k rozvoji vlastních schopností a vědomostí a k aktivnímu začlenění do života lidského společenství“ (Fuchs & Zelendová, 2015, s. 9) a rozlišují v ní několik navzájem se prolínajících rovin: doslovné porozumění, vysuzování a sdílení, metakognice, sdílení, aplikace, vztah ke čtení.

– 2 – 1 – 2 Nestandardní matematické učební úlohy a jejich řešení

V soutěži Matematický klokan řeší žáci učební úlohy obvykle označované jako nestandardní. Žáci musejí řešit (matematický) problém, hledat a objevovat způsob, metodu řešení, protože jejich dosavadní zkušenost řešení úlohy neumožňuje. Postup řešení úlohy obvykle není znám, řešitel hledá cestu k výsledku často originálním způsobem. Řešení nestandardních, resp. problémových úloh vyžaduje hluboké soustředění, invenci a čas. Šedivý a Fulier (2004) považují za zvlášť významný jejich motivační aspekt. V podmínkách humanisticky orientované edukace přispívá k utváření stimulačního výukového prostředí, podporuje a rozvíjí žákovskou sebedůvěru a sebepotvrzování, upřednostňuje pozitivní hodnocení učitelem i spolužáky. Významným faktorem efektivity matematického vzdělávání jsou tedy otázky související s motivací jako výzvou k tvořivosti.

Obvykle jsou řešení i tvorba nestandardních úloh považovány za vhodné pro práci s nadanými, resp. mimořádně nadanými žáky, protože rozvíjejí poznání, metakognici a motivaci (Malinová, 2014). „Stupeň heurističnosti“ nestandardních úloh je typickým příkladem, kdy je nutno brát v úvahu nejen úlohu samu, ale i kompetence jejího řešitele. Pro některé žáky (vzhledem k věku, individuálním schopnostem, úrovni a rozsahu předběžných matematických poznatků a prostředků, kterými jsou vybaveni) je určitá úloha nestandardní, „heuristická“, pro jiné je její řešení pouze rutinní záležitostí. Úloha, již jeden žák řeší na základě známého algoritmu nebo známé teorie, může u jiného vyžadovat tvořivé úsilí.

Lišková a Rezek (2015) zdůrazňují, že nestandardními úlohami a problémy na prvním stupni základní školy nerozumíme úlohy složité, ale takové, které jsou pro žáky neobvyklé (jak zadáním, tak způsobem řešení) a hodí se i pro badatelské aktivity. Při řešení takových úloh se snažíme respektovat a ocenit osobitá řešení žáků, pokud jsou správná, a vhodně, například doplňujícími otázkami, korigovat u žáků postupy, jež nejsou správné nebo přesné. Nestandardní charakter mají také komplexní úlohy z praktického života, ve kterých jsou provázány různé oblasti matematiky. Při řešení úloh z praxe využíváme konkrétních zkušeností žáků z běžného života i z různých oblastí jejich zájmů (sport, technika, příroda, umění apod.), jež zvyšují motivační hodnotu úloh. Autoři zdůrazňují, že v edukační praxi mají své místo také kaskády, řetězce gradovaných úloh, v nichž je obtížnost zvyšována postupně.

Kompetence žáků samostatně pracovat s daty, jejich schopnost použít nástroje matematiky k řešení reálných situací z praktického života, jsou považovány za významný projev matematické gramotnosti. Jak připomíná Boero (2006), mělo by se odhadování, dokazování, modelování – sloužící k interpretaci přírodních jevů a k předvídání jejich vývoje – stát jádrem matematického vzdělávání již na základní škole jako významná složka rozvoje matematického myšlení.

Polya (1957) uvádí čtyři základní fáze procesu řešení úloh, které lze vhodně aplikovat na řešení úloh nestandardních. Rozlišuje:

a) porozumění problému, které považuje za klíčové: „It is foolish to answer a question that you do not understand,“
b) propojení jednotlivých informací a dat v zadání úlohy, které směřuje k vytvoření „plánu řešení“,
c) samotné řešení (jako realizace tohoto stanoveného plánu),
d) posouzení či interpretace výsledku ve významu „pohled/krok zpátky“.

Hejný (2001) jednotlivé etapy řešení nestandardní úlohy pojmenoval *úrovně*. Uvádí jich pět: úroveň uchopení situace, úroveň nabývání vhledu do situace úlohy, úroveň hledání a stanovení strategie řešení, úroveň realizace řešení (výpočtu), úroveň interpretace výsledku.

V situaci nedostatečného porozumění zadání úlohy dochází obvykle k jednomu z následujících způsobů reakce žáka (Hejný & Stehlíková, 1999):

- rezignace – žák řešení úlohy vzdá, o řešení se vůbec nepokusí,
- podvádění – žák se snaží řešení získat bez vlastního přičinění, například opsat od spolužáků,
- náhodná kalkulace – žák vezme (někdy jen některá) čísla ze zadání úlohy a „něco s nimi náhodně udělá“ – sečte je, vynásobí apod.,
- náhradní uchopování – žák se při řešení opírá o „vnější poukazy“. Poukazem se rozumí to, že žák dostane určitou dodatečnou informaci, ať už od učitele či ji nalezne v zadání úlohy („signál“, což je slovo nebo slovní spojení mající charakter idiomu, který ve vědomí žáka asociuje jistý kalkulativní postup).[10]

Přestože pedagogika ani oborové didaktiky pojem nestandardní učební úloha jednoznačně nevymezují, RVP ZV s pojmem *nestandardní aplikační úlohy a problémy* explicitně pracuje. Považuje je za důležitou součást matematického vzdělávání a charakterizuje je jako takové úlohy, „jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení“ (RVP ZV, 2005). Uvedené vymezení akceptujeme pro účely našeho výzkumného šetření. Příslušné učivo 1. stupně ZŠ uvádí pouze ve čtyřech heslech: slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce, prostorová představivost.

V didaktických materiálech, učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ a metodických příručkách jsou očekávané výstupy tematického okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* různým způsobem konkretizovány, vztaženy k naplňování klíčových kompetencí a propojovány s jinými tematickými celky a pojmy. Uveďme jeden příklad, jak může být očekávaný výstup RVP „žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky“ podrobněji rozpracován.

10 Uvedené žákovské reakce se zřetelně ukázaly v našem výzkumném šetření. Promítly se do počtu nevyplněných či neřešených úloh – rezignace řešitele v situaci, kdy považuje úlohu nad jeho síly, ale také „tipováním“ odpovědi jako rozhodnutí pro některé z nabídnutých řešení uzavřené testové úlohy.

V publikaci Novák a Nováková (2008) se

- připomíná návaznost očekávaného výstupu na jiné výstupy – „řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace“, „popisuje jednoduché závislosti z reálného života“, „zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky“, „čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy“ aj.,
- očekávaný výstup dále konkretizuje a dává do souvislosti s vymezeným učivem – „doplňuje číselné a logické řady a určuje, podle jakých pravidel a pravidelností jsou vytvořeny“, „matematizuje jednoduché reálné situace s využitím zlomku a desetinného čísla a řeší je“, „řeší úlohy, které mají více než jedno řešení, objevuje postup řešení (magické čtverce, číselné pyramidy a hrozny, kombinatorické úlohy aj.)“, „řeší slovní úlohy (např. z matematických soutěží) vyžadující logickou úvahu“,
- uvádějí odkazy na konkrétní ukázky úloh v učebnicích, směřujících k realizaci očekávaného výstupu,
- zdůrazňuje význam výstupu pro dosahování cílů matematického vzdělávání na 1. stupni ZŠ a utváření klíčových kompetencí, především kompetence k řešení problémů (např. zaměřením edukačních strategií k rozvoji logického myšlení a úsudku žáků, experimentováním a objevováním nejen výsledků úloh, ale také cest a efektivních postupů k jejich řešení).

Nestandardní učební úlohy mají často divergentní („rozbíhavý“) charakter, na rozdíl od úloh konvergentních, které v tradičních učebnicích výrazně převládají. Zelina a Zelinová (1990) uvádějí, že je jich zde 90–95 %. Konvergentní úlohy vyžadují myšlenkové procesy, jež využívají zejména vnímání, diferenciaci, poznávání věcí, paměť, analýzu a syntézu, indukci a dedukci na úrovni konkrétních vztahů, aplikaci poznatku v konkrétní situaci, je pro ně charakteristický logický a algoritmický postup vedoucí ke správnému závěru.

Řešení divergentních úloh vyžaduje divergentní myšlení, které nevede k jedné správné odpovědi, ale vyžaduje vygenerovat co nejvíce návrhů, alternativ či možných strategií řešení. Divergentní myšlení kromě produkce více alternativ vyžaduje zvažování důsledků návrhů, jejich hodnoty, správnosti. Při řešení divergentních úloh se významně uplatňují také hodnotící a rozhodovací procesy (Zelina & Zelinová, 1990). Uvedení autoři v této souvislosti upozorňují na paradox, kdy velmi mnoho úkolů a situací, které řešíme v praktickém životě – od vytváření vztahů, přes řešení pracovních úloh až po každodenní úkoly jako je oblékání, využívání volného času, apod. – má divergentní charakter; naproti tomu ve školním vzdělávání výrazně převažují úlohy konvergentní.

V pojetí divergentního charakteru úlohy se autoři odborných textů poněkud liší. V obecném pojetí obvykle chápou divergentní úlohu jako úlohu, kde ke správnému řešení vede více cest, případně má úloha více řešení. Malinová (2014) uvádí příklad úlohy, která může být považována za konvergentní, ale také za divergentní:

Tatínek chtěl mamince koupit kytici růží. V květinářství mají jen bílé růže po 9 Kč a rudé po 11 Kč. Kolik kterých růží mohl tatínek koupit, když chtěl za kytici utratit 100 Kč?[11]

Pokud žák pochopí zadání tak, že tatínek chce utratit přesně 100 Kč, k řešení využívá konvergentní myšlení. Úlohu by bylo možno řešit užitím diofantovské rovnice $9x + 11y = 100$, což ovšem přesahuje poznatkovou výbavu žáka primární školy. Žák na 1. stupni ZŠ může řešit úlohu zkoumáním, experimentováním – například úvahou a využitím tabulky, do které si vypíše násobky jedenácti, dopočítá rozdíl do 100 a posoudí, zda je rozdíl dělitelný devíti.[12] Úloha má právě jedno řešení: *Tatínek mohl koupit 5 rudých a 5 bílých růží.*

Počet rudých růží (**y**)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Celková cena za rudé růže (c)	11	22	33	44	55	66	77	88	99
Zbývá Kč (100 - c)	89	78	67	56	45	34	23	12	1

Žák, jenž vidí v zadání úlohy více možností, používá divergentní myšlení, může klást následující otázky: *Chtěl tatínek utratit přesně 100 Kč? Chtěl koupit růže jen jedné barvy nebo obou barev? Dostal nějaké peníze nazpět? Mohl koupit jen jednu růži?* V druhém případě žák může nalézt celou řadu odlišných řešení (Malinová, 2014, s. 59).

Typickými nestandardními učebními úlohami bývají úlohy kombinatorické (Scholtzová, 2006). Směřují k rozvíjení klíčových kompetencí, především kompetence k řešení problémů tím, že vedou žáka k „rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů“.[13] Scholtzová (2004) na základě analýzy žákovských řešení kombinatorických úloh rozpracovala jednotlivé aspekty řešení do podoby 13 „elementů“, charakterizujících proces řešení od „analýzy textu a nabytí vhledu do situace úlohy“, až po „samostatné vytvoření kombinatorické úlohy“.

Podle Dvořákové (2010) lze využít kombinatorické úlohy i k uvědomění si a rozvíjení mezipředmětových souvislostí. Uveďme alespoň několik příkladů: sestavování rytmu dle zadaných délek not, při tvoření akordů (kombinace určitého počtu různých tónů tvoří akord) v hudební výchově, různé kombinace barev, tvarů či vzorů (mandala) jako rozvoj estetického cítění a vnímání žáků, sportovní utkání

11 Ceny růží v naší úloze dokumentují velmi ošidnou a problematickou kontextovou stránku úloh z oblasti finanční matematiky, obsahujících často nereálné, rychle se měnící údaje.

12 Nebo do které vypíše násobky devíti, dopočítá rozdíl do 100 a posoudí, zda je rozdíl dělitelný jedenácti.

13 *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. (2007). Dostupné z http://www.vuppraha.cz/ramcove-vzdelavaci-programy/zakladni-vzdelavani

družstev či pořadí na stupních vítězů, skládání slov ze zadaných písmen či vět ze slov (tvarosloví, syntax), hledání cest, kterými lze dojet či dojít do určitého místa, plánování rozvrhu či jídelníčku (přísady na sendvič či pizzu, kopečky zmrzliny), oblékání, rozsazení dětí ve třídě, rozměňování mincí, barevnost vlajek nebo Morseova abeceda, Braillovo písmo a tvoření šifer. Řadu dalších inspirací aplikovatelných v prostředí primární školy uvádí rovněž Příhonská (2014), Scholtzová (2007), Engel, Varga a Walser (1974) a jiní.

Makrides (2006) v této souvislosti používá termín *otevřené* úlohy[14] a zdůrazňuje význam jejich využití v práci se žáky nadanými na matematiku (jejich typickým znakem je podle tohoto autora nadprůměrná schopnost rozumět matematice a matematicky myslet, nikoli nadprůměrná schopnost provádět matematické výpočty a dostávat dobré známky z matematiky). Mezi významné charakteristiky vhodných úloh pro nadané řadí obtížnost, která je pro některé nadané žáky výzvou. Je nezbytné předkládat úlohy dostatečně náročné, jež rozvíjejí poznání, metakognici a motivaci.

Podnětné jsou výstupy výzkumného šetření Budínové, která v případových studiích řešení úloh několika nadanými žáky analyzovala „vývojové linie“ vybraných geometrických pojmů. Autorka uvádí domněnku, že „poznávací proces nadaných žáků postupuje rychleji než u jejich vrstevníků. To může znamenat i to, že nadaný žák 5. ročníku ZŠ se nachází na úrovni konceptuálních generických modelů a je schopen útvary charakterizovat pomocí základních vlastností, pracuje s abstrakty a nikoli s konkrétními objekty“ (2015, s. 21).

Obecnější pohled na aktivity využívající nestandardní učební úlohy v edukaci nadaných prezentuje rovněž Škrabánková (2009, 2012). Pro úlohy, podněcující badatelský přístup, používá Samková (2014) termín *badatelská úloha* a uvádí ukázky různých podob uplatnění nestandardních úloh v badatelsky orientované výuce. Náměty úloh podněcujících badatelsky orientované vyučování matematice uvádí rovněž přehledová studie Samkové a kol. (2015). Žilková (2013), Nocar a Novák (2015) i další autoři naznačují potenciál objevitelských aktivit při řešení nestandardní geometrické úlohy prostřednictvím manipulativních činností, také s využitím počítačového programu dynamické geometrie Cabri II Plus. Další podněty pro edukační praxi lze čerpat také z publikací našich i zahraničních autorů, například Prídavkové (2003), Manna (2006), Scholtzové (2007), Pavlovičové a kol. (2012), Blažkové a Vaňurové (2013), Swobody (2014).

— — —

14 Pojem „otevřená úloha“ vymezují ovšem různé teoretické rámce rozdílně. Nohda (2000, cit. podle Samková et al., 2015) rozlišuje úlohy s otevřeným postupem řešení (existuje více správných způsobů, jak úlohu vyřešit), úlohy s otevřeným koncem (existuje více správných odpovědí) a úlohy, u kterých existuje více možností, jak úlohu dále rozvíjet. Jednotlivé typy otevřených úloh se prolínají, jedna a tatáž úloha může náležet k více typům zároveň.

Jednou z podob práce s nestandardními učebními úlohami především u nadaných žáků je obměňování a samostatná tvorba úloh. Tollingerová (1971) zařazuje kladení otázek a formulaci úloh do nejvyšší kategorie své taxonomie, do skupiny úloh vyžadujících tvořivé myšlení.[15] Školská praxe potvrzuje, že tvorba či obměna úloh je jednou z aktivit, kterými lze významně obohatit matematické vyučování. Sarrazy v této souvislosti uvádí, že „víra v kreativitu žáka je pro učitele zásadní, ale tato pedagogická humanistická víra je často zanechává bezradné, když se jedná o vytvoření podmínek pro matematickou tvorbu: pouhá vůle je neúčinnou zbraní v boji s ignorancí a s nepochopením ze strany žáků" (2011, s. 35). Přitom je možné využít různých způsobů, jak žákům specifikovat zadání pro vytváření úloh. Žáci mohou například tvořit úlohy, v jejichž zadání se vyskytují předem daná čísla (úlohy s daným matematickým modelem), mohou tvořit úlohy související s daným tématem (Bureš & Novotná, 2008), úlohy ke konkrétnímu příběhu, k zadanému obrázku nebo k reálné situaci (Palková et al., 2011). Domníváme se spolu s Novotnou (2000*),* že při samostatné tvorbě úloh se žáci dostávají do nové role, kdy se z pasivních příjemců úloh zadaných učitelem nebo učebnicí stávají jejich samostatnými tvůrci a blíží se tak samotné podstatě matematické aktivity.

Tichá a Hošpesová (2011) zdůrazňují význam tvoření úloh také pro rozvoj profesních kompetencí studentů učitelství. Autorky studovaly proces tvoření úloh (*problem posing*) z různých úhlů pohledu. Ve svém výzkumu se zaměřily na dva směry, které charakterizují jako:

a) „uchopování situace" ve smyslu myšlenkového procesu, v němž se prolíná vnímání situace, objevení klíčových objektů, jevů a vztahů, stanovení určitého směru uchopování (zaměření na určité schéma, pojem, metodu, …), vytvoření modelu, který umožní formulování hroznu úloh („stejnorodé" úlohy vytvářené v určitém prostředí či k jedné metodě) nebo „kaskády" (úlohy s rostoucí nebo klesající obtížností), formulování otázek a úloh vyrůstajících ze situace. Tyto činnosti jsou zaměřeny na zkoumání[16] a pochopení situace a jejich cílem je formulování otázek, problémů, úloh,
b) překlady mezi různými mody reprezentace. Vycházejí z přesvědčení o významné roli různých modů reprezentace při rozvíjení a prohlubování pojmů, kdy úroveň a kvalita porozumění závisí na soustavném obohacování zásoby různých modů reprezentace a pěstování schopnosti „překládat" mezi nimi – například mezi zápisem aritmetické operace a slovní úlohou (Tichá & Hošpesová, 2011, s. 42).

K samostatné tvorbě úloh žáky primární školy směřuje v aktuálním kurikulu – Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání – jeden z očekávaných výstupů tematického okruhu *Číslo a početní operace*, který je formulován

15 Podkladem uvedené taxonomie učebních úloh byla autorce Bloomova taxonomie kognitivních cílů.
16 Například Kopka, J. (1999). *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně; Kopka, J. (2004). *Výzkumný přístup při vyučování matematice*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

takto: *Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel.* Standardy vzdělávání na výstupu primárního matematického vzdělávání[17] uvádějí k danému očekávanému výstupu dva indikátory:

- žák přiřadí k zadanému jednoduchému matematickému vyjádření smysluplnou slovní úlohu (situaci ze života),
- žák tvoří slovní úlohu k matematickému vyjádření.

V tomto smyslu nejde tedy o sestavování či formulaci úloh s vágním zadáním („sestavte slovní úlohu na sčítání, na násobení, …“), ale o postižení významu explicitně zadaného matematického modelu – v terminologii vzdělávacích standardů *matematického vyjádření*, např. aritmetickou operací s danými (přirozenými) čísly – a jeho ukotvení ve smysluplném věcném kontextu, obsahujícím jednotlivé parametry úlohy (podmínky, operátor, otázka). Indikátory jsou konkretizovány ilustrační úlohou:

Přiřaď k jednotlivým úlohám odpovídající matematické vyjádření:
36 + 4 = ***36 – 4 =*** ***36 × 4 =*** ***36 : 4 =***
Úlohy vyřeš.

a) *Mamince je 36 let. Její dcera je čtyřikrát mladší. Kolik let je dceři?*
Matematické vyjádření ______

Odpověď: Dceři je ______ *roků.*

b) *Pavel měl ve sbírce 36 modelů letadel. Od dědečka dostal 4 nové modely. Kolik modelů letadel má nyní celkem?*
Matematické vyjádření ______

Odpověď: Pavel má nyní celkem ______ *modelů.*

c) *V počítačové učebně bylo původně 36 počítačů. 4 počítače však již byly zastaralé a poruchové, proto byly z učebny odstraněny. Kolik počítačů v učebně zůstalo?*
Matematické vyjádření ______

Odpověď: V učebně zůstalo ______ *počítačů.*

17 *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. (2007). Dostupné z http://www.vuppraha.cz/ramcove-vzdelavaci-programy/zakladni-vzdelavani; *Standardy – základní vzdělávání. Matematika.* (2013). Dostupné z http://www.msmt.cz/file/16601

d) *Ve školní jídelně připravovala kuchařka 4 mísy s jablky. V každé míse bylo 36 jablek. Kolik jablek měla kuchařka celkem?*
Matematické vyjádření

Odpověď: Kuchařka měla celkem ________ jablek.

– 2 – 1 – 3 Vybrané nestandardní učební úlohy a jejich řešení ve vztahu k učivu primární školy

V předchozí kapitole již bylo uvedeno, že Rámcový vzdělávací program pro ZV ve vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* obsahuje tematický okruh *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*. V návaznosti na dosahování cílů kurikula jsou do didaktických materiálů pro matematiku v 1.–5. ročníku ZŠ zařazovány úlohy, v nichž žák

- doplňuje číselné a logické řady a určuje, podle jakých pravidel a pravidelností jsou vytvořeny,
- matematizuje jednoduché reálné situace s využitím zlomku a desetinného čísla a řeší je,
- řeší úlohy, které mají více než jedno řešení, objevuje postup řešení,
- řeší slovní úlohy vyžadující logickou úvahu.

Zdůrazňuje se význam výstupu pro dosahování cílů matematického vzdělávání a utváření klíčových kompetencí, především kompetence k řešení problémů (např. experimentováním a objevováním nejen výsledků úloh, ale také cest a efektivních postupů k jejich řešení více způsoby).[18]

Tyto úlohy mají výrazný motivační a popularizační charakter. Současně se při řešení matematických úloh a problémů, především kontextových (slovních) úloh s vhodnými náměty z prostředí žákům známého, využívá interdisciplinárních souvislostí a průřezových témat.[19]

Žáka ovlivňuje neobvyklý způsob zadání, prezentace úloh (často ilustrací, obrazem, schématem nebo jiným způsobem grafické reprezentace), úlohy různého zaměření i obtížnosti. Pokusíme se o stručnou charakteristiku několika úloh, jež považujeme za vhodné pro žáky primární školy, a postupu jejich řešení, který neklade nároky na matematické znalosti přesahující rámec primárního matematického vzdělávání.[20]

— — —

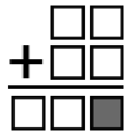
18 Viz *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, s. 11–14.
19 Viz *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, s. 104–105.
20 Úlohy jsou převzaty ze starších ročníků soutěže Matematický klokan v kategoriích Cvrček a Klokánek, případně upraveny do podoby otevřených úloh.

Uvedeme několik námětů pro práci s nestandardními učebními úlohami ve školní edukaci. Jsou koncipovány tak, aby umožnily přiřadit jednotlivé úlohy k tematickým okruhům RVP ZV a nabídly možný – v textu uvedený – způsob řešení úloh k vlastnímu posouzení učitelem. Zadání všech je možné najít ve sbornících minulých ročníků na webové stránce soutěže Matematický klokan.

Úloha 1

Tematický okruh: Číslo a početní operace; očekávaný výstup: žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace. Úlohu je možno ovšem považovat za nestandardní a zařadit ji do tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Napiš každou z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 do čtverečků, aby bylo sčítání správné. Která číslice bude v šedém čtverečku?



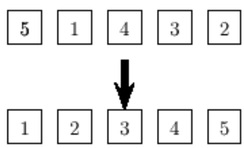
A) 2 B) 3 C 4) D) 5 E) 6

Úlohu typu jednoduchého algebrogramu lze zadat jako uzavřenou v podobě, jež je uvedena v soutěži Matematický klokan. Učitel nemusí ovšem nabídku odpovědí uvést a převést tak úlohu na otevřenou, resp. divergentní – je zřejmé, že ke správnému součtu 105 lze dospět ze sčítanců 42 + 63, 43 + 62, 62 + 43, 63 + 42. Řešení je založeno na experimentu, při kterém se využije znalosti zápisu čísel v desítkové soustavě, vlastností početních operací sčítání a odčítání a dovednosti počítání zpaměti (na místě stovek musí být 1, číslice 0 nemůže být u sčítanců na pozici desítek).

Úloha 2

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy; očekávaný výstup: žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

Na stole leží pět karet označených čísly 5, 1, 4, 3, 2. Tvým úkolem je seřadit je do následujícího pořadí: 1, 2, 3, 4, 5 (prohlédni si obrázek). Vyměnit můžeš kterékoliv dvě karty. Jaký nejmenší počet výměn musíš udělat?



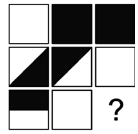
Řešení úlohy je založeno na (myšlenkovém) experimentu, jenž může být doprovázen písemným záznamem jednotlivých kroků záměny karet. Charakteristická je absence matematických pojmů a známých numerických postupů, ale také „aranžmá“ úlohy s grafickým znázorněním výchozí situace. Ke správnému řešení vedou tři výměny karet, které mohou být postupně zapsány například takto: 5 1 4 3 2 → 2 1 4 3 5 → 1 2 4 3 5 → 1 2 3 4 5.

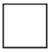
Divergentní charakter úlohy poskytuje příležitost pro hledání a objevování, následnou diskusi a argumentaci žáků (je možno najít ještě další postupy řešení?).

Úloha 3

Tematický okruh: Geometrie v rovině a v prostoru; očekávaný výstup: žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.

Který čtverec musíme přidat, aby obsah bílé části obrázku byl stejný jako černé?



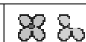
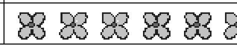
A)  *B)*  *C)*  *D)*  *E)* 

Jedná se o uzavřenou úlohu s výběrem z 5 odpovědí. Správná odpověď *B)* se zakládá na porovnání obsahu černých a bílých čtverečků – ke třem bílým je třeba doplnit třetí černý čtvereček. Zbývající tři čtverce jsou již rozděleny na dvě stejné části – bílou a černou.

Úloha 4

Tematický okruh: Závislosti, vztahy a práce s daty; očekávaný výstup: žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy.

Tabulka nás informuje, kolik květin roste v botanické zahradě. Když se Tomáš zeptal zahradníka, zjistil, že v zahradě je 35 tulipánů, 50 kosatců a 85 růží. Kolik roste v zahradě gerber?

tulipány	
kosatce	
růže	
gerbery	

Podmínkou úspěšného řešení je dovednost číst a interpretovat údaje v diagramu. Zadání úlohy poskytuje informaci o tom, že jeden okvětní lístek na obrázku květiny v diagramu vyjadřuje 5 květin: tulipánů je 35, proto v diagramu je 7 okvětních lístků atd. Odtud vyplývá správné řešení – gerber je 110.

Úloha 5

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy; očekávaný výstup: žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

Ulice na obrázku se jmenuje Barevná. Najdete tam modrý, červený, žlutý, růžový a zelený dům. Domy jsou očíslovány od 1 do 5. Víme, že:

- *modrý a žlutý dům jsou označeny sudými čísly,*
- *červený dům sousedí pouze s modrým domem,*
- *modrý dům stojí mezi zeleným a červeným domem.*

Jakou barvu má dům číslo 3?

Řešení logické úlohy typu „zebra“ vyžaduje logickou úvahu, založenou na analýze jednotlivých podmínek (Uhlířová, 2004). Nepředpokládá prakticky žádné předběžné matematické poznatky (kromě pojmu sudé číslo, intuitivně chápaného vztahu „mezi“ a výrazu „pouze“).

Dům číslo 3 musí být zelený, ale jsou různé možnosti umístění zbývajících domů: Č M Z Ž R nebo Č Ž Z M R nebo R M Z Ž Č nebo R Ž Z M Č.

Úloha 6

Tematický okruh: Číslo a početní operace; očekávaný výstup: žák modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku.

V misce ležely bonbóny. Filip vzal z misky polovinu bonbónů. Ze zbytku pak Radka odebrala polovinu. Poté vzal ještě Jonáš polovinu zbylých bonbónů. Nakonec zůstalo v misce 6 bonbónů. Kolik bonbónů bylo v misce na začátku?

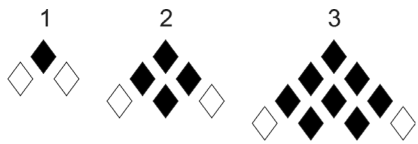
Řešení úlohy předpokládá porozumění zlomku jako části celku a zlomku „jedna polovina“ jako naznačené dělení dvěma. Celek je v tomto případě prezentován pomocí „oddělitelných“ prvků, bonbónů na misce, ze které se postupně odebíralo. Formulace „Filip vzal polovinu bonbónů“ znamená, že původní počet je třeba dělit dvěma. Tento postup se opakuje ještě dvakrát (Radka, Jonáš). Efektivní řešení úlohy může být tedy založeno na inverzní operaci násobení dvěma k číslu 6: kdyby Jonáš „vrátil“ odebrané bonbóny, bylo by jich $2 \cdot 6 = 12$, kdyby je vrátila Radka, počítalo by se $2 \cdot 12 = 24$, pokud by je vrátil i Filip, byl by bonbónů původní počet, tj. $2 \cdot 24 = 48$. V misce bylo původně 48 bonbónů.

Úloha je propedeutikou algebry. Ze zadání lze vytvořit rovnici:
$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} = 6$, odtud ekvivalentní úpravou $x = 48$.

Úloha 7

Tematický okruh: Závislosti, vztahy a práce s daty; očekávaný výstup: žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel.

Na obrázku jsou bílé a černé kosočtverce, sestavené do „trojúhelníků“. V každém dalším trojúhelníku je přidána řada kosočtverců. Krajní kosočtverce každé spodní řady jsou bílé, všechny ostatní jsou černé. Kolik černých kosočtverců má šestý trojúhelník v řadě vytvořené podle stejného pravidla?



Úloha vychází z motivu Pythagorových figurálních (trojúhelníkových) čísel.[21] Řešení úlohy může být založeno na objevení číselné posloupnosti: 3, 6, 10, 15, 21, 28… Každé další číslo lze znázornit „trojúhelníkem“, v němž je počet prvků ve spodní řadě o 1 větší než ve spodní řadě trojúhelníku předchozího: 6 = 3 + **3**, 10 = 6 + **4**, 15 = 10 + **5**, 21 = 15 **+ 6**… Z podmínky úlohy však plyne, že je od každého následujícího čísla nutno odečíst 2 („krajní kosočtverce každé spodní řady jsou bílé“). Proto bude počet černých kosočtverců 1, 4, 8, 13, 19, **26**. Šestý trojúhelník bude tedy mít 26 černých kosočtverců.

Pravděpodobně se žáci uchýlí častěji k řešení grafickému: odvíjí se od postupného zakreslování obrázků trojúhelníků s černými a bílými kosočtverci podle obrázku v zadání. Ze šestého takového trojúhelníku lze vyčíst hledaný počet černých kosočtverců.

Úloha 8

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy; očekávaný výstup: žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

Natálka napsala každé z čísel od 1 do 9 do políček tabulky. Pouze čtyři z těchto čísel vidíš na obrázku. Všimla si, že pro číslo 5 je součet čísel v sousedních čtvercích roven 13 (Sousední čtverce jsou ty, které mají společnou stranu.). Totéž platí i pro číslo 6.

1		2
4		3

Které číslo napsala Natálka do šedého čtverce?

Úloha poněkud připomíná magický čtverec 3×3, ale v zadání se nepožaduje, aby součet čísel v řádcích a sloupcích byl stejný. Pro řešení je významná informace v zadání, že součet čísel v sousedních čtvercích je roven 13. Čtverce v rozích sousedí (mají společnou stranu) se dvěma, čtverec uprostřed se čtyřmi, zbývající čtverce se třemi jinými čtverci. Hledáme tedy volné čtverce, do nichž budou zapsána čísla dávající součet $a + b + c = 13$. Experiment (pokus a omyl) vede k závěru, že do šedého čtverce nemůže být zapsáno číslo 5 ani 6. Tato čísla nelze zapsat ani do volných čtverců v horní a spodní řadě, mohou být pouze v obou krajních sloupcích, pak je do šedého čtverce třeba zapsat číslo 8.

Úloha má jediné řešení, přesto ji lze považovat za divergentní. Čísla mohou být v tabulce zapsána čtyřmi různými způsoby:

4	6	1
7	8	9
3	5	2

4	6	1
9	8	7
3	5	2

4	5	1
7	8	9
3	6	2

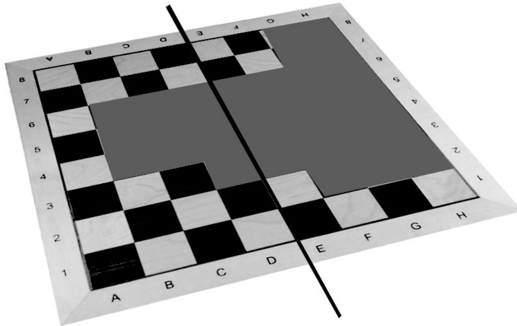
4	5	1
9	8	7
3	6	2

21 Idea znázorňování přirozených čísel pomocí vhodně uspořádaných předmětů (figur, odtud figurální čísla) se přisuzuje řeckému matematikovi Pythagorovi ze Samu. Trojúhelníková čísla vzniknou tehdy, jsou-li prvky souboru uspořádány do tvaru trojúhelníku. Jeden z námětů na didaktické využití práce s figurálními čísly v prostředí primární školy uvádí Dofková (2008).

Úloha 9

Tematický okruh: Geometrie v rovině a v prostoru; očekávaný výstup: žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.

Šachovnice je poškozená. Kolik černých čtverců chybí na pravé polovině šachovnice?



Nedílnou součástí zadání úlohy je obrázek. Předpokládá se uplatnění poznatku, že šachovnice obsahuje 8×8 = 64 polí (32 černých a 32 bílých), na každé polovině šachovnice je 16 černých a 16 bílých polí. Protože na „pravé polovině" jsou na obrázku pouze 4 černé čtverce, chybí jich 12.

Úloha 10

Tematický okruh: Číslo a početní operace; očekávaný výstup: žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace, čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti.

Kolik žabek tito tři pelikáni dohromady chytili?[22]

———

22 Zadání úlohy využívá podoby jednoduchého kresleného obrázku, znázorňující „bublinový" rozhovor obvykle několika osob/dětí (v naší úloze ovšem pelikánů), označovaný jako *Concept Cartoon*. Texty v bublinách jsou stručné a používají jednoduchý jazyk. Jako výuková pomůcka pro podporu přírodovědného, ale i matematického vzdělávání je využívána především ve Velké Británii (Keogh & Naylor, 1999).

Řešení úlohy předpokládá pozorné čtení podmínek vyjádřených na obrázku (nejméně, méně než, více než) a logický úsudek. Pelikán Peli mohl chytit 2, 3… žab, pelikán Kanu 1, 2, 3 nebo 4 žáby. Prostřední pelikán musel tedy ke splnění podmínek chytit 3 žáby (to je více než Peli, jenž chytil 2 žáby, méně než Kanu, který chytil 4 žáby). Součet všech tří úlovků: 2 + 3 + 4 = 9. Úloha má jediné řešení.

– 2 – 1 – 4 Matematické učební úlohy jako nástroj hodnocení

– 2 – 1 – 4 – 1 Didaktický test a úlohy v testu

Učební úlohy, které ve vyučovacím procesu jakoby „vstupovaly“ mezi učitele a žáka, se stávají významným instrumentem řízení učební činnosti žáků. Dovednost řešit úlohy se obvykle považuje také za jeden z hlavních indikátorů úrovně zvládnutí matematického učiva i matematických schopností žáků; úlohy mají funkci kontrolní a diagnostickou. Uvedený aspekt učebních úloh je zkoumán z různých teoretických východisek a s využitím rozmanitých metod a technik.

Specifickým druhem kontroly a prověrky učební činnosti a současně jedním z diagnostických prostředků zaměřených na hodnocení (evaluaci) vzdělávacích výsledků – kterým rozumíme v obvyklé pedagogické komunikaci každé sdělení učitelů určené žákům o jejich úspěšnosti, chybách, projevech (Slavík, 1999) – jsou zkoušky jako jedna z procedur získávání údajů pro hodnocení (Kalhous et al., 2002*)*.

Zvláštním typem zkoušky, obvykle písemné, je test. Test je zkouška, která má stejnou podobu pro všechny zkoumané osoby a jejich výsledky jsou posuzovány podle pravidel a převáděny do číselného vyjádření. V pedagogickém výzkumu, ale i v edukační praxi je využíván zejména test výkonu, test didaktický (*achievement test*). Nejčastěji se didaktický test vymezuje jako systematický postup (nástroj) měření vzorku výsledků výuky (Byčkovský, 1980), jenž má řadu podob a variant. V uvedené definici jsou pod pojmem *výsledky výuky* míněny změny v osobnostech žáků způsobené výukou. „Vzorkem výsledků výuky“ se rozumějí výsledky dosažené pomocí reprezentativního výběru učiva, který rovnoměrně pokrývá celé učivo, jež je předmětem měření (zkoušení). „Systematičnost postupu“ je zajišťována tím, že didaktický test je navrhován, ověřován, skórován a interpretován podle určitých, předem stanovených pravidel. Jedná se tedy o „nástroj zjišťování výsledků výuky, který se orientuje na objektivní zjišťování úrovně zvládnutí učiva u určité skupiny osob“ (Chráska, 2007, s. 184). Jeho základními vlastnostmi jsou validita, reliabilita, praktičnost, obtížnost, citlivost.

Test označíme jako *validní*, pokud skutečně zjišťuje to, co je deklarováno – že test bude zkoumat, zda postihuje měřený znak; validita je obvykle posuzována odborníky, je ovlivněna názory autora testu, příp. názory posuzovatele testu.

Reliabilita testu vypovídá o tom, v jaké míře je test ovlivněn náhodnými vlivy. Koeficient reliability nabývá hodnot z intervalu od 0 do 1; čím vyšší koeficient, tím je větší spolehlivost testu a menší vliv náhody. Aby byl výpočet reliability smysluplný a věrohodný, měl by posuzovaný test obsahovat homogenní úlohy a být řešen dostatečně velkým počtem žáků. Reliabilita závisí také na počtu úloh. Obsahuje-li test malý počet úloh (10 a méně), koeficient reliability se pohybuje nejvýše kolem hodnoty 0,60. U nestandardizovaných testů má reliabilita omezenou platnost, je třeba vybrat vhodný model výpočtu; i přes zmíněná omezení je však vhodné provést výpočet reliability pro orientační posouzení testu (Chráska, 2007).

V testech z matematiky se používají (s přihlédnutím k charakteru testu, věku žáků a dalším okolnostem) obvykle některé z následujících typů matematických úloh (testových položek):

a) úlohy uzavřené (s výběrem ze dvou nebo častěji z více alternativ, obvykle z 4–5, s vícenásobnou volbou – *multiple choice*).

Respondent vybírá z nabízených možností vyjádřených písmeny nebo čísly, případně slovy, grafickými symboly nebo obrázky, obvykle právě jednu správnou odpověď. Jsou často používány ve standardizovaných testech, pro žáka primární školy je to typ málo známý, neobvyklý.

Mohou mít i podobu dichotomické volby mezi pravdivou či nepravdivou odpovědí:

Rozhodni, která věta je pravdivá:

A) 15 je třikrát více než 5.	*ano/ne*
B) 18 je o tři více než 6.	*ano/ne*
C) Činitel je výsledkem při násobení.	*ano/ne*
D) Dělitel dělíme dělencem a dostaneme podíl.	*ano/ne*
E) Polovinu získáme tak, že číslo násobíme 2.	*ano/ne*
F) Nulou se nedá dělit.	*ano/ne*

Mezi nevýhody tohoto typu úloh patří nebezpečí „náhodného uhádnutí“ – například je-li v nabídce 5 distraktorů jedna správná odpověď, je pravděpodobnost uhádnutí správné odpovědi 20 %. Odpověď neumožňuje odhalit aktivní znalost testovaného jevu, pouze jeho znovupoznání – žák by správnou odpověď nevyprodukoval, ale v nabídce odpovědí ji rozezná. Je tedy třeba nabídku výsledků chápat jako pomoc při řešení úlohy (Chráska, 2005). Uzavřené úlohy s výběrem z 5 odpovědí jsou uplatněny v testech soutěže Matematický klokan.

b) úlohy otevřené (s tvorbou odpovědi)[23] jsou častější v nestandardizovaných didaktických testech (písemkách, prověrkách), které obvykle vytváří učitel ad hoc, podle konkrétní potřeby a situace ve třídě. Mohou být různého typu, podle charakteru a zaměření testu, rozlišují se:

23 Termín „otevřená úloha“ ve smyslu testové položky jako protikladu k pojmu „uzavřená úloha“ v didaktickém testu je používán v jiném významu než v kapitole 2.1.2.

- úlohy doplňovací obvykle obsahují tvrzení, ve kterém musí žák doplnit číslo, slovo, termín, frázi aj. Většinou se aplikují tam, kde preferujeme znalost před znovupoznáním, protože zjišťují aktivní ovládání faktů a termínů:

  Doplňte chybějící čísla v řadě:
  1, 3, 6, 10, x , y, 28, ...
  Doplňte čísla , která do řady patří:
  1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, _ , _
  1, 4, 9, 16, 25, 36, _ , _

- otevřené úlohy se stručnou odpovědí vyžadují, aby žák zformuloval a napsal vlastní odpověď (číslo, slovo, krátkou větu, vzorec apod.). Žák nevybírá z nabídnutých odpovědí, ale sám odpověď – řešení úlohy – produkuje,
- otevřené úlohy se širokou odpovědí jsou nejfrekventovanějším typem úloh v nestandardizovaných didaktických testech. Jedná se například o slovní úlohy typu:

  Záhon ve tvaru čtverce o délce strany 10 metrů se má opatřit plotem. Proto bude do země zasazen určitý počet sloupků ve vzdálenosti 2 metry od sebe. Kolik sloupků bude třeba?

  Ježek Marek si stěžoval svým kamarádům: „Kdybych sesbíral dvakrát více jablek, než jsem opravdu sesbíral, měl bych nyní o 24 jablek více.“ Kolik jablek Marek sesbíral?

  Pan Dvořák je řidičem autobusu. V pondělí ujel 246 km, v úterý o 25 km méně. Kolik kilometrů ujel za oba dny?

Otevřené úlohy se širokou odpovědí umožňují zjistit, do jaké míry je žák schopen porozumět úloze a jakým způsobem dokáže prezentovat svá řešení. Proces tvorby odpovědi většinou obsahuje kognitivní činnosti vyššího řádu. V praxi to znamená, že úkolem žáka je nejen napsat odpověď, ale také popsat postup řešení, pomocí kterého došel k výsledku.

- úlohy „s otevřeným koncem“ – (*open ended*; divergentní) umožňují nacházet různá řešení, různé způsoby řešení – rozvíjejí logické myšlení žáků, mají často charakter nestandardní úlohy, k jejímuž řešení známé postupy a algoritmy nestačí:

  Popiš nějaké zajímavé vlastnosti této tabulky čísel:
  1 3 6 10 15 21 ...
  2 5 9 14 20 ...
  4 8 13 19...
  7 12 18 ...
  16 ...

  V jednom měsíci je pětkrát středa i pátek. Který den připadl na 23. v tomto měsíci?

Hejný a Kuřina (2001) považují za významné „diferencované“ hodnocení, které umožňuje proniknout hlouběji do subtilních mechanismů učení matematice, co nejpřesněji objevovat a lokalizovat případné nedostatky, případně pokrok v učení a osvojování pojmů. Pokud možná nejjemnější diferenciace může být provedena:

- podle jednotlivých partií učiva matematiky (hodnocení zvládnutí tématických celků, kapitol v učebnici, …). Uvedený přístup je použit i v publikaci Rendl a kol. (2013),
- podle jednotlivých druhů kognitivních (poznávacích, myšlenkových) operací. Kubínová (2002) rozlišuje obvykle úrovně:
  a) konceptuálního porozumění (úroveň osvojení si pojmů číslo, početní výkon, geometrický útvar, …),
  b) zvládnutí činností (operace, procedury, algoritmy: sčítání přirozených čísel zpaměti, dělení dvojciferným dělitelem, určení největšího společného násobku, …),
  c) strategie řešení problémů (s důrazem na divergentní úlohy),
  d) úroveň argumentace (dokazování, verifikování, obhajování vlastních řešících postupů).

Burjan (2003) zdůrazňuje požadavek posílit diagnostickou a formativní funkci hodnocení a rozlišuje:

- sumativní (finální) hodnocení, zaměřené na konečný celkový přehled o dosažených výkonech nebo na kvalitativní roztřídění souboru žáků. Jeho podstatou je hodnocení typu *ano – ne*, *vyhovuje – nevyhovuje*, jeho cílem je žáka zařadit. Může se jednat o diagnózu
  - vstupního nebo výstupního stavu (jak je žák připraven na přijetí nového poznatku, jaká je jeho úspěšnost po nějakém delším úseku vykonané práce) nebo
  - průběhu osvojování, například v průběhu probírání tematického celku (dát žákovi informaci o stavu jeho vědomostí a tím optimalizovat průběh jeho dalšího učení),
- formativní hodnocení, zaměřené na podporu dalšího efektivního učení žáků. Nabízí radu, vedení a poučení orientované na zlepšování budoucích výkonů, poskytuje hodnotící informaci (zpětnou vazbu) ve chvíli, kdy se určitý výkon nebo činnost dá ještě zlepšit. Jde tedy nejen o hodnocení výkonu žáka v testu, ale také jeho potencí, schopností, vlastností osobnosti (úplnost a samostatnost řešení, sebekontrola…), kultury výpočtů, kvality rýsování, grafické úpravy, originality řešení (řešení různými způsoby).

Záměrem je především minimalizovat negativní průvodní jevy hodnocení na psychiku žáků (obavy ze zkoušek a ze známek). Testování, zkoušení, hodnocení je třeba spojit s prožitkem úspěchu, s uspokojením ze správného řešení úlohy. Úlohy koncipované jako příležitost k úspěchu, k uplatnění všech sil a tvořivých schopností řešitele – nikoliv jako léčka, nastražená past, která má dokumentovat řešitelovu neschopnost a nevědomost – považujeme za jeden z významných nástrojů hodnocení. Příznivé jsou zkušenosti s využitím sebehodnocení žáků spojeným s odhadem vlastních schopností (žák si sám vybírá úlohy podle různé úrovně obtížnosti nebo sám posuzuje úspěšnost svého řešení).

– 2 – 1 – 4 – 2 Úlohy v testech mezinárodních srovnávacích měření

Připomeňme v této souvislosti široce koncipovaná mezinárodní srovnávací měření výsledků matematického a přírodovědného vzdělávání TIMSS[24] (Janoušková & Tomášek, 2013; Dvořák, 2010). Úlohy lze dělit podle typu odpovědi, a to na úlohy s výběrem odpovědi a na úlohy s otevřenou odpovědí. Koncepce matematické části se skládá ze dvou složek: obsahové a operační. Obsahová a operační složka tvoří v šetření TIMSS základ hodnocení žáků. Obsahová složka vymezuje tematické okruhy, které jsou v šetření sledovány (čísla, geometrické tvary a měření, znázornění dat). Operační složka určuje sledované oblasti nebo procesy myšlení (tj. prokazování znalostí, používání znalostí a uvažování) ve čtyřech úrovních. Jsou v ní popsány kognitivní dovednosti, které jsou při řešení matematických úloh od žáka očekávány:

1. na první úrovni prokazuje určité základní matematické znalosti – sčítá a odčítá přirozená čísla, zná trojúhelníky, používá neformální soustavy souřadnic a jednoduché tabulky,
2. na druhé úrovni uplatňuje znalosti v jednoduchých situacích,
3. na třetí úrovni využívá znalosti a dovednosti k řešení problémů. Řeší složité slovní úlohy s přirozenými čísly, chápe jednoduché zlomky, určí chybějící člen řady nebo vztah mezi dvojicemi členů, využívá data z tabulek a diagramů aj.,
4. na nejvyšší, čtvrté úrovni prokazuje dovednost uvažování – řeší složité situace a vysvětluje své úvahy. Aplikuje logické myšlení, chápe zlomky a desetinná čísla, zná dvojrozměrné a trojrozměrné útvary, umí uspořádat a interpretovat data. Z hlediska taxonomie učebních úloh Tollingerové (1970) se jedná o úlohy vyžadující nejen pamětní reprodukci poznatků a jednoduché myšlenkové operace, ale také složité myšlenkové operace a tvořivé myšlení, které poskytují respondentům možnost prokázat vyšší kognitivní kompetence – porovnávat, verifikovat, dokazovat, argumentovat.

Jak vyplývá ze zveřejněných údajů (Hejný et al., 2013), Česká republika dosáhla v roce 2011 poměrně netypického výsledku, kdy výkon našich žáků v úlohách na uvažování převýšil jejich výkon na celkové škále. V případě zemí na prvních místech žebříčku celkového výkonu zaostává výsledek na škále uvažování za celkovým výkonem – jedná se o některé asijské země (Singapur, Korea, Japonsko), ale i Severní Irsko, Anglii, Finsko nebo vlámskou část Belgie. České děti tedy byly obecněji znevýhodněny spíše slabými znalostmi než úlohami, které vyžadují „přemýšlení“. Autoři studie upozorňují, že tato skutečnost by si zasloužila další rozbor.

— — —

24 TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) je mezinárodním šetřením matematického a přírodovědného vzdělávání. Jedná se o projekt Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání IEA. Šetření TIMSS je zaměřeno na školní vědomosti a dovednosti rozvíjené ve výuce a vychází z učebních osnov matematiky a přírodovědných předmětů zúčastněných zemí. Vědomosti a dovednosti se zjišťují pomocí písemných testů, které obsahují úlohy z matematiky a přírodních věd. V roce 2011 se šetření v České republice účastnili jen žáci 4. ročníku základních škol. Bylo to více než 4500 žáků ze 177 základních škol a téměř 500 učitelů a ředitelů. Celkově se do šetření TIMSS 2011 v této věkové kategorii zapojilo 52 zemí.

Usuzují, že je možné, že výsledek ukazuje na specifickou a nezastupitelnou úlohu matematického školního vzdělávání. Na jednu stranu i děti nadané a z podnětného prostředí potřebují školu, aby si osvojily důležité matematické pojmy a postupy, bez nichž nemohou dosáhnout výborného celkového výsledku. Na druhou stranu země na špičce žebříčku uspívají mimo jiné proto, že jednodušší úlohy tam dokáže vyřešit větší podíl žáků, což znamená, že dokážou dovést na jistou minimální úroveň znalostí a dovedností větší část dětí. Otázka kvality výuky matematiky se někdy zjednodušuje na dilema, kde proti sobě stojí nácvik hbitého numerického počítání a slovní či problémové úlohy „z praktického života". Úlohy TIMSS ukazují, že pro rozvoj matematických dovedností jsou důležité i jiné přístupy, zejména zaměření na důkladné porozumění základním pojmům a vztahům a schopnost nalézat v datech pravidelnosti či zákonitosti a těch využívat k řešení obtížnějších úloh.

Hejný a kol. (2013) při analýze zaměřující se na porovnání úspěšnosti českých žáků při řešení jednotlivých úloh spadajících do různých okruhů učiva nebo vyžadujících různé typy operací (kognitivních dovedností) označili 10 úloh, u kterých se v roce 2011 nejvíce lišila průměrná úspěšnost českých žáků od průměrné úspěšnosti žáků všech zemí účastnících se téhož šetření. Z nich bylo 7 z tématu Zlomky a desetinná čísla (z toho 6 z nejnižší úrovně kognitivních dovedností – na prokazování znalostí, 1 na používání znalostí). Například níže uvedená úloha byla českými žáky řešena s úspěšností 31,5 % oproti mezinárodnímu průměru 46,5 %.

Které tvrzení vyjadřuje, že Honza snědl $\frac{2}{4}$ pizzy?

A) Honza snědl $\frac{1}{5}$ pizzy. *C) Honza snědl $\frac{1}{3}$ pizzy.*

B) Honza snědl $\frac{1}{4}$ pizzy. *D) Honza snědl $\frac{1}{2}$ pizzy.*

Autoři studie upozorňují v této souvislosti na další úskalí mezinárodních srovnání. Testy TIMSS jsou konstruovány, aby odrážely pojetí kurikula účastnických zemí či jejich průměrnou představu o tom, co by měl umět žák určitého ročníku školy. Přes snahu o určitou „spravedlnost" z hlediska obsahu testu může nastat rozdíl mezi testem a kurikulem konkrétní země a ten pak má velmi závažné dopady na výsledek této země (téma Zlomky a desetinná čísla nebylo v době testování učivem primární školy, do RVP ZV se opět zařadilo až v roce 2013).

Čeští žáci byli výrazně neúspěšní i při řešení následující úlohy, označované v anglosaských zemích *number sentence*. Jde o jednoduchou rovnici řešenou v oboru přirozených čísel, v níž je neznámá vyjádřena jinak než písmenem *x*. Autoři si kladou otázku, zda neobeznámenost českých dětí s tímto typem úloh je pouze důsledkem neznalosti konkrétního způsobu zápisu nebo jestli hlubší příčinou obtížnosti uvedené úlohy pro žáky je nedostatečné konceptuální porozumění rovnosti a rovnicím:

Které číslo patří do čtverečku, aby byl zápis pravdivý?
$3 + 8 = \square + 6$

A) 17 *B) 11* *C) 7* *D) 5*

Z nízké úspěšnosti řešení uvedené úlohy autoři rovněž vyvozují, že testy jako forma ověřování znalostí žáků jsou u nás neprávem podceňovány. Úloha ukazuje, že i „jednoduchá“ úloha s výběrem odpovědi, někdy hanlivě označovaná jako „zaškrtávačka“, umožňuje ověření porozumění látce a ne jen kontrolu zapamatovaných faktů. Promyšlená volba nabídnutých nesprávných odpovědí (distraktorů) navíc umožňuje odhadnout příčiny žákova neúspěchu při řešení úlohy. V tomto případě např. častá volba distraktoru B) českými žáky ukazuje na chápání znaku „rovná se“ jako pokynu k výpočtu směrem doprava bez ohledu na výraz na pravé straně.

Rovněž publikované výstupy studie OECD/PISA[25] (například PISA SK 2003, 2004) prostřednictvím analýzy výsledků didaktických testů zřetelně potvrzují, že školská matematika hraje významnou roli v rozvoji komplexu osobnostních charakteristik žáka. Matematická gramotnost je zde vymezena jako „schopnost použít nástroje matematiky v reálném světě a použít je pro vlastní potřebu člověka, jako schopnost poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana“ (Straková, 2002, s. 11).[26] Je zaměřena na tři dimenze: matematické postupy, matematický obsah, situace a kontexty. Úroveň matematické gramotnosti se projeví, když jsou matematické znalosti a dovednosti používány k vymezení, formulování a řešení problémů z různých oblastí a kontextů a k interpretaci jejich řešení s užitím matematiky. Tyto kontexty sahají od čistě matematických až k takovým, ve kterých není matematický obsah zpočátku zřejmý, a je na řešiteli, aby ho v nich rozpoznal. Je třeba zdůraznit, že uvedené vymezení se netýká pouze matematických znalostí na určité minimální úrovni, ale jde v něm o používání matematiky v celé řadě situací, od každodenních a jednoduchých až po neobvyklé a složité.

Úlohy „PISA matematiky“ tvořily skupiny, které vycházely z jednoho matematického problému, s nímž se žáci mohli setkat v běžném životě. Každá z úloh v testu byla zaměřena na používání a uplatňování matematiky v rozmanitých situacích (např. osobní, vzdělávací/pracovní, veřejné a vědecké) a kontextech (autentický, hypotetický) při rozvíjení kompetencí zaměřených na matematické uvažování, matematickou argumentaci, matematickou komunikaci, modelování, vymezování problémů a jejich řešení, užívání matematického jazyka, užívání pomůcek a nástrojů (Fuchs & Zelendová, 2015).

— — —

25 PISA (*Programme for International Student Assessment*) – výzkum probíhá periodicky od roku 2000. V roce 2015 byl realizován již pošesté, tentokrát v 73 zemích. Zjišťuje připravenost mladých lidí ve věku 15 let, resp. absolventů povinné školní docházky, vypořádat se s požadavky současné informační společnosti.

26 Matematickou gramotnost lze ovšem charakterizovat i jinak. Srov. např.: „Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému), schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie, dovednost řešit úlohy jak z matematiky, tak i z jejích aplikací, které jsou (obvykle bezprostředním) užitím probraného učiva“ (Hošpesová et al., 2011, s. 26). „Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby“ (Fuchs & Zelendová, 2015, s. 10).

Matematický obsah byl seskupen kolem čtyř nosných myšlenek, jimž odpovídaly jednotlivé oblasti školské matematiky:

a) kvantita (algebra, diskrétní matematika a teorie čísel – význam čísel, různé reprezentace čísel, operace s čísly, představa velikosti čísel, počítání zpaměti a odhady, míra),
b) prostor a tvar (geometrie – orientace v prostoru, rovinné a prostorové útvary, jejich metrické a polohové vlastnosti, konstrukce a zobrazování útvarů, geometrická zobrazení),
c) změna, vztahy a závislosti (funkce – závislost, proměnná, základní typy funkcí, rovnice a nerovnice, ekvivalence, dělitelnost, inkluze; vyjádření vztahů symboly, grafy, tabulkou),
d) neurčitost (pravděpodobnost a statistika – sběr dat, analýza dat, prezentace a znázorňování dat, pravděpodobnost a kombinatorika, vyvozování závěrů).

– 2 – 1 – 4 – 3 Analýza výsledků didaktického testu

Data, získaná při analýze a následné interpretaci řešení učebních úloh v didaktických testech, se mohou stát zdrojem zajímavých a užitečných informací pro učitele i žáky. Bývají považována za jednu z významných procedur získávání informací pro hodnocení (Chráska, 1999; Gavora, 2000). Poskytují cenné informace, použitelné k co možná nejpřesnějšímu, objektivnímu a komplexnímu zjišťování stupně osvojených znalostí, vědomostí a dovedností. Umožňují postihování příčin zjištěného stavu (diagnostický aspekt) a odhadování dalšího vývoje (někdy se v této souvislosti uvádí funkce prognostická). Poskytují zpětnou vazbu hodnocenému žákovi i hodnotiteli (učiteli), příp. rodičům, školské správě, ale mají také svou motivační (formativní) funkci – především pozitivní stránka hodnocení ve smyslu potřeby žáka zažít úspěch. Můžeme se z nich dozvědět nejen o konkrétních testovaných žácích, ale také o různých skupinách žáků, o jednotlivých úlohách v testu i o testu jako celku. Data z didaktických testů obvykle využívají spíše učitelé či autoři testů, ale jednoduché analýzy mohou provádět i sami žáci.

Jeden z možných přístupů k analýze výsledků didaktického testu uvádí Burjan (2003). Používá jej slovenská společnost EXAM®, která je tvůrcem a distributorem školních testů. Databáze je zpracována do podoby obdélníkové matice, data se získala strojovým zpracováním nebo ručně. Autor považuje za minimální počet respondentů 100, optimální 1 000. Každý řádek kromě záhlaví zahrnuje údaje o jednom žákovi, první sloupec nebo několik prvních sloupců obsahuje identifikaci žáka – jméno nebo identifikační kód. Následující sloupce v matici dat obsahují odpovědi žáků na jednotlivé položky v testu.[27]

— — —

27 Podobným způsobem jsme zpracovali data a vytvořili matici dat v našem výzkumu.

Postup analýzy lze v Burjanově koncepci vyjádřit v několika krocích:

- analýza „nedosaženosti“ jednotlivých úloh žáky,
- analýza neřešenosti jednotlivých úloh žáky,
- analýza frekvence volby jednotlivých nabídnutých alternativ,
- výpočet a analýza hrubých skóre jednotlivých žáků,
- analýza obtížnosti jednotlivých úloh v testu,
- analýza citlivosti jednotlivých úloh v testu,
- analýza reliability testu a chyby měření,
- další následné dílčí analýzy.

Identifikace nedosažených úloh jako zvláštního případu úloh neřešených (nedosažené úlohy lze považovat za podmnožinu úloh neřešených) umožní v matici dat zavést speciální znak pro tyto úlohy. Vychází se přitom z hypotézy, že nedosaženou úlohu žák vůbec nečetl, v testu k ní vůbec nedospěl, „nedosáhl“ na ni v pořadí řešení jednotlivých úloh. Analýza nedosaženosti umožňuje posoudit rychlost (či spíše pomalost) jednotlivých žáků při vypracování testu, časovou náročnost testu jako celku (podle názoru autora alespoň 80 % žáků by mělo dosáhnout alespoň na 80 % úloh) a přesněji určit obtížnosti jednotlivých úloh, zejména úloh umístěných v závěrečné části testu.

Kvantitativní vyjádření „skutečně neřešených“ úloh jako rozdílu počtu všech neřešených a nedosažených nabízí možnost

- identifikace možných chyb či nepřesností ve formulaci úlohy. Je vhodné se podívat, kteří žáci neuvedli žádnou odpověď, jsou-li to žáci „slabí“ nebo „dobří“,
- přesnějšího odhadu obtížnosti jednotlivých úloh. Zde autor nabádá k opatrnosti – neřešenost může být projevem toho, že žáci sami odhadli, že neumějí úlohu řešit,
- posouzení míry „hádání“, odhadování, tipování jedné z nabídnutých alternativ řešení. Vysoká neřešenost poukazuje na malou míru hádání.

Také Chráska (2005) v této souvislosti upozorňuje, že je třeba věnovat zvýšenou pozornost úlohám, u nichž neodpovědělo více než 20 % žáků – v této souvislosti však nerozlišuje mezi úlohami nedosaženými a neřešenými, dle Burjanovy terminologie.

Rovněž frekvence volby jednotlivých nabízených alternativ nejsou náhodné, jsou stabilní vlastností testované populace, jde-li o náhodný nebo aspoň reprezentativní výběr a větší počet žáků. Při optimálně sestaveném testu by žádná frekvence neměla být velmi malá (pod 5 %) a žádná by neměla být větší než frekvence správné odpovědi. Některé distraktory můžeme považovat za „chytré“ chyby, některé za „hloupé“. Velmi rozdílné frekvence volby nesprávných odpovědí poukazují na malou míru hádání.

Hrubé skóre, tj. počet bodů, které žák v testu získal, je základním výstupem každého testování. Pro výpočet hrubého skóre jednotlivých žáků musíme v matici dat nahradit znaky bodovými hodnotami dílčích odpovědí. Vychází se přitom z klíče a systému hodnocení pro daný test. V nejjednodušším případě je správná odpověď oceněna 1 bodem, nesprávná, neplatná (například více než jedna označená odpověď) nebo žádná odpověď 0 body. V tomto nejjednodušším případě se hrubé skóre rovná počtu správně vyřešených úloh. Mají-li úlohy různé váhy, je výpočet hrubého skóre složitější.[28] Hrubé skóre vypovídá o úrovni jednotlivých konkrétních žáků, o úrovni testované skupiny jako celku, ale také o testu jako celku – například zda byl přiměřeně náročný pro danou skupinu žáků či zda byl přiměřeně citlivý v té části spektra, ve které jsme to potřebovali. Hrubé skóre se může stát východiskem pro následné jemnější analýzy, vztahující se k jednotlivým charakteristikám žáků.

Stanovení obtížnosti jednotlivých úloh v testu informuje o skupině testovaných žáků (co konkrétně umějí a co ne) i o testu samotném. Burjan vyjadřuje v této souvislosti názor, že vhodnější je použít termín „lehkost“ úlohy (snadnost, *facility*) než „obtížnost“ (*difficulty*). Při binárním hodnocení se obtížnost úlohy stanoví jako podíl správných odpovědí a počtu všech žáků, kteří úlohu řešili. Při složitějším, vícebodovém hodnocení se obtížnost stanoví jako podíl počtu bodů, jež získali všichni žáci za příslušnou úlohu, a maximálního počtu bodů, který mohli získat. V obou případech považuje za určitý problém případné zohlednění nedosaženosti či neřešenosti úlohy.

Burjan (2003) navrhuje optimální obtížnost jednotlivých úloh v testu takto:
- každý test by měl obsahovat 1–2 velmi lehké úlohy zařazené na začátku (80–90 %), které nemají výpovědní hodnotu, ale jejich zařazení je motivováno psychologickými důvody,
- spektrum obtížnosti by mělo být široké, ale v mezích 30–70 %. Úlohy s obtížností pod 30 % a nad 70 % málo diskriminují, přinášejí málo informací o žácích. Optimum je kolem 50–60 %, i když nejvhodnější obtížnost velmi závisí na charakteru a účelu testu.

– 2 – 1 – 4 – 4 Žákovská řešení úlohy

Detailnější pohled na žákovská řešení úloh umožňuje nejen detekci a identifikaci typických použitých postupů (strategií) řešení, ale také odhalení „zvláštních“ výkonů žáků. Pro učitele přináší tato analýza otázky typu: *Které obtíže mohou vyvstat při porozumění žákovským produktům? Jaké interpretace jsou možné? Které nečekané obtíže se přitom objevily* (ve smyslu odchylky od dosavadních vlastních zkušeností učitele nebo od údajů uváděných v literatuře)*?*

Za vhodný rámec pro analýzu myšlenkového procesu žáka lze považovat rozčlenění řešení úlohy na několik kroků. Stehlíková (1995) rozlišuje:
a) přístup k problému – úloha působí na žákovo vědomí. Ten si uvědomuje úkol a rozhoduje se, zda jej bude či nebude řešit. V případě kladného rozhodnutí následuje další krok,

28 Taková situace nastává v testu soutěže Matematický klokan, kde se správná odpověď hodnotí podle předpokládané obtížnosti úloh 3, 4 nebo 5 body.

b) porozumění úloze – žák nachází relevantní údaje a vztahy mezi nimi. Uvědomuje si, co je dáno a co hledáme. Stupeň porozumění může být ovšem různý – žák může „porozumět“ úloze i nesprávným způsobem, pochopit nebo interpretovat informace nesprávně,
c) matematizace – žák formuluje úlohu v jazyce matematiky. Jednotlivé kvantitativní údaje a vztahy mezi známými a neznámými prvky úlohy jsou zapsány formálním (matematickým) jazykem nebo pomocí obrázků, grafů a jiných znázornění,
d) výpočet – žák vypočítá matematicky formulovanou úlohu a dospěje k jistým údajům, které považuje za výsledek řešení úlohy,
e) interpretace – žák formuluje výsledek v kontextu otázky úlohy, slovně jako slovní odpověď na otázku úlohy nebo jiným způsobem,
f) sémantická zkouška – žák ověřuje, zda výsledek odpovídá kontextu úlohy a/nebo realitě. Pokud je odpověď kladná, řešení končí, v záporném případě následuje korekce,
g) korekce – žák hledá chybu, nachází ji a formuluje novou odpověď.

Uvedený rámec je primárně konstruován pro řešení úloh produkčních, s tvořenou odpovědí, v nichž řešitel jakoby „procházel“ jednotlivými fázemi řešení v určité následnosti. V našem výzkumu bylo použito testových položek s výběrem odpovědi, proto nebudeme postupy řešení úloh sledovat po jednotlivých krocích, ale povšimneme si pouze dominantních znaků, které je možno z písemného projevu žáka odhalit. Přesto považujeme za vhodné prezentovat ukázky grafických záznamů, zpracovaných při řešení soutěžních úloh v minulých letech. K následné analýze zvolíme dvě kontextové (slovní) učební úlohy z prostředí žákům blízkého a srozumitelného, zadané v textové podobě.[29]

Petr a Jakub spolu chodí do jedné třídy. Při hodině tělesné výchovy se celá třída seřadila podle velikosti do jedné řady. Za Petrem stálo 16 spolužáků. Jedním z nich byl Jakub. Před Jakubem stálo 14 spolužáků. Mezi Petrem a Jakubem stálo 7 dětí. Kolik žáků stálo v řadě?

Slovy, v přirozeném jazyce, jsou formulovány podmínky úlohy, požadavek na řešení je vyjádřen otázkou: „Kolik žáků stálo v řadě?“ Úloha klade minimální nároky na uplatnění matematických poznatků řešitele. Můžeme ji charakterizovat jako aritmetickou úlohu s tematikou porovnávání přirozených čísel v oboru numerace do 100 (číselná řada, binární relace „před/za“ ve významu uspořádání přirozených čísel). Řešení vyžaduje kromě správného úsudku pouze znalost sčítání a odčítání.

Uvedeme ukázky několika žákovských řešení[30]. Zjištěné strategie řešení můžeme zasadit do rámce:

29 Volně jsme využili techniku „mikroanalýzy“ řešení úlohy (dle Hejný & Michalcová, 2001).

30 Následující ukázky jsou převzaty z výzkumu realizovaného v disertační práci autorky monografie (Kubátová, 2005). Jména, kterými jsou označeni žáci, však neodpovídají skutečným jménům respondentů výzkumu.

• *aritmetického* (je založen na úsudku vyjádřeném slovním nebo numerickým záznamem nebo jejich kombinací).

Řešení lze vyjádřit jako syntézu řešení dvou jednoduchých slovních úloh: 16 – 7 = 9 (Jakub a počet dětí, které stály za ním), 14 + 9 = 23 (počet dětí, které stály před Jakubem, Jakub a počet dětí, které stály za ním),

• *grafického* (opírá se o grafické znázornění jednotlivých podmínek úlohy, vedoucí ke grafickému řešení).

Řešení lze vyjádřit například takto: I I I I I I P I I I I I I I J I I I I I I I I

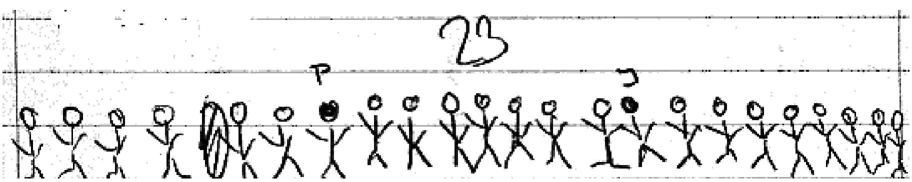
• *kombinace obou uvedených typů.*

Na ukázce demonstrujeme interpretace jednotlivých řešitelských postupů. Liší se navzájem způsobem záznamu a pořadím zpracování informací žákem – pro vlastní řešení relevantních podmínek úlohy:

za Petrem stálo 16 spolužáků, jedním z nich byl Jakub,
před Jakubem stálo 14 spolužáků,
mezi Petrem a Jakubem stálo 7 dětí.

Jirka

Ke znázornění zadání úlohy byl použit grafický záznam, v němž řešitel vyjádřil jednotlivé osoby vystupující v úloze pomocí schematického záznamu postav.



Obrázek 1 ***Znázornění vedoucí ke správnému grafickému řešení***

Myšlenkový postup řešitele, který se promítl do pořadí grafického zpracování informací, můžeme interpretovat třemi různými způsoby:

1. postup:

Nejprve nakreslil postavu Petra (označil písmenem P a kroužek znázorňující hlavu „začernil“) a za ním – ve směru zleva doprava – vyznačil 16 postav spolužáků. Poté evidoval třetí podmínku úlohy („mezi Petrem a Jakubem stálo 7 dětí“) a vyznačil postavu Jakuba (označil písmenem J a vybarvil kroužek označující Jakubovu hlavu). Grafický záznam poslední podmínky úlohy (v textu ovšem uvedené jako druhé – „před Jakubem stálo 14 spolužáků“) již umožnil „přečíst“ z obrázku grafické řešení úlohy: na záznamu je celkem 23 žáků, jejichž řazení respektuje všechny podmínky úlohy. Správné grafické řešení transformoval do podoby číselného údaje (23) a nadepsal nad grafický záznam.

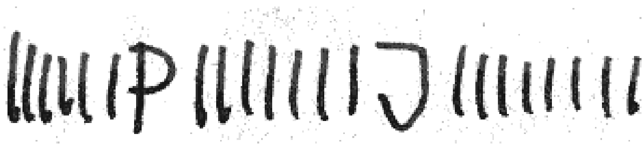
2. postup:
Výchozím bodem je vztah mezi postavením Petra a Jakuba. Nejprve zakreslil postavy Petra a Jakuba (mezi nimi je 7 postav). Následuje záznam žáků stojících za Petrem a Jakubem (zde je možná záměna pořadí – nejprve Jakuba, potom Petra).

3. postup:
Jde o přesný záznam informací v pořadí uvedeném v zadání: postavení Petra, počet žáků za ním stojících, pozice Jakuba, počet žáků stojících před Jakubem, vztah mezi postavením Petra a Jakuba daný číselným vztahem.

V dalších ukázkách řešení byl použit vždy některý z popsaných postupů. Komentář vychází z rozhovorů s řešiteli následně po vykonání testu.

Tomáš

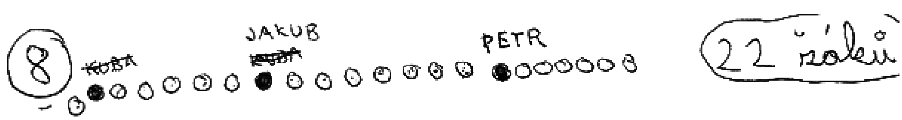
Další podoba správného řešení úlohy je obdobně jako u předchozího řešitele založena na grafickém záznamu výchozích podmínek. Místo schematického znázornění postav dětí je však užito abstraktnějšího znázornění pomocí čar, reprezentujících jednotlivé žáky v řadě. Výchozí a pro popis postupu řešení úlohy významnou informací je vzájemné postavení Petra a Jakuba; řešitel volil třetí z popsaných postupů:



Obrázek 2 ***Záznam využívající k reprezentaci dětí v zadání úlohy čárek***

Marek

Ke znázornění dětí stojících v řadě použil kroužky. Rozlišil přitom „bezejmenné“ děti (označené „prázdnými“ kroužky) a děti, v zadání úlohy označené jménem Petr a Jakub (označil je „vyplněnými“ kroužky a nadepsal začátečními písmeny jmen obou aktérů úlohové situace). Svým značením je situace zčásti obdobná jako u první ukázky (řešení Jirky), s tím rozdílem, že je zde zaměněna pozice obou chlapců (vpravo, vlevo). Je zřejmé, že řešitel použil třetí popsaný postup řešení.

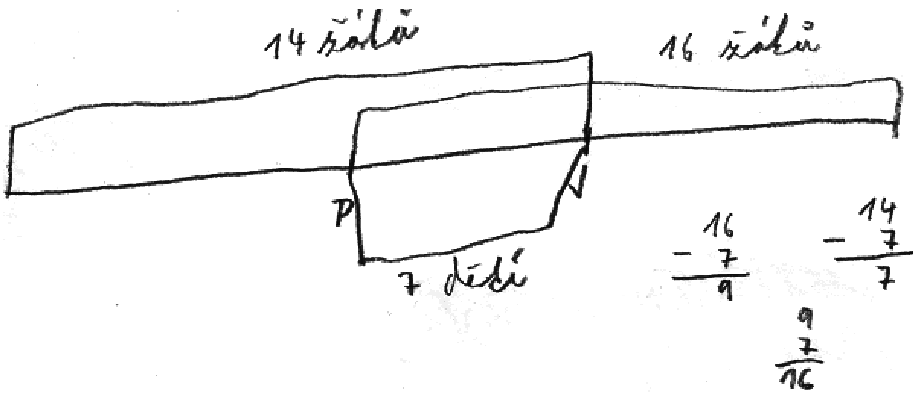


Obrázek 3 ***Nesprávný záznam počtu dětí vedoucí k nesprávnému řešení***

Došlo však k chybě v prvním záznamu při vyznačení počtu spolužáků stojících za Petrem. Místo v úloze vystupujících 16 žáků jich bylo vyznačeno pouze 15, což v konečném důsledku – přes další správně vyznačené podmínky úlohy – vedlo k nesprávnému „přečtení" počtu žáků v řadě, a tedy k nesprávnému řešení úlohy.

Ota

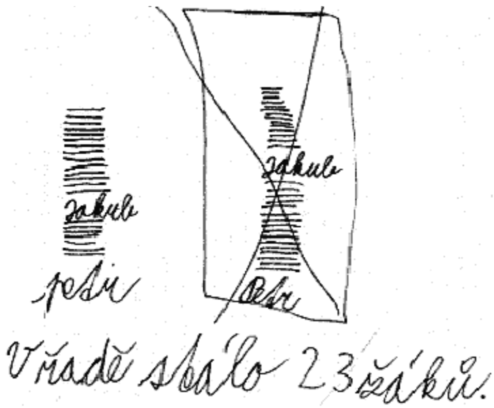
K nesprávnému řešení úlohy vedla i další kombinace grafického záznamu zadání úlohy a numerického výpočtu. Ke znázornění podmínek úlohy v zadání je užito úseček – úsečkou jsou vyjádřeny řady žáků stojících za Petrem, před Jakubem i mezi oběma chlapci. Situace je obrázkem vyjádřena správně (včetně uvedení číselných vztahů), nesprávné je vyjádření numerickými výpočty. K součtu obou vypočtených rozdílů (číslům 9 a 7) bylo nutno ještě přičíst počet 7 dětí stojících mezi oběma jmenovanými chlapci. Tento výpočet proveden nebyl, což je příčinou nesprávného řešení.



Obrázek 4 ***Znázornění podmínek úlohy využívající úsečky***

Zuzka

Žákyně uplatnila třetí postup řešení. První pokus se opíral o záznam vpravo (následně přeškrtnutý). V původním Zuzčině zpracování chybí vztah mezi postavením Petra a Jakuba, správně vyjádřený počtem spolužáků stojících mezi nimi (místo správných 7 je znázorněno nesprávných 14). Z nákresu je patrné, že Zuzka ve svých řešeních nepracovala s předložkami za (Petrem), před (Jakubem). Podle grafického záznamu by žáci nestáli jedním směrem, chlapci by museli stát zády k sobě. Z řešení je zřejmé zcela izolované vnímání informací a jejich použití nesprávným způsobem.



Obrázek 5 ***Nesprávný záznam podmínek úlohy, ale správná písemná odpověď***

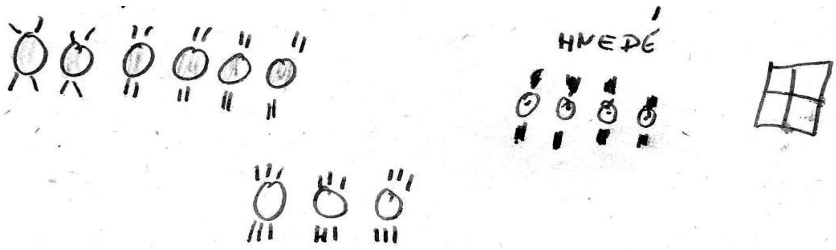
Ve druhém pokusu o řešení Zuzka zpracovala jiné informace. Začala tou, díky níž upustila od předchozího řešení. Jako by nyní zpracovávala informace „od konce“. Mezi Petrem a Jakubem je zaznačeno 7 žáků. Zachováme-li postavení Jakuba zády k nám, stojí před ním 14 žáků. Další informace ale zůstávají bez povšimnutí, není respektována další podmínka („za Petrem stálo 16 spolužáků“). Ze znázornění je zřejmé, že řešení je nesprávné, i když v odpovědi je uveden údaj správný. Ke „správnému“ číselnému vyjádření výsledku (23), který také vyznačila do karty odpovědí, dospěla na základě nesprávného úsudku „sečtením“ Petra, 7 žáků stojících mezi ním a Jakubem, Jakuba a 14 žáků stojících za Jakubem. Zde se projevila známá skutečnost, že není dobré do hodnocení žákovy práce zahrnout pouze kontrolu „konečného výsledku“, ale i proces řešení úlohy a jeho zdůvodnění.

V klubovně je 6 modrých stolů, u každého z nich jsou 4 židle. U okna stojí 4 hnědé stoly, u každého z nich jsou 2 židle, uprostřed místnosti stojí 3 bílé stoly, u každého z nich je 6 židlí. Kolik židlí je v klubovně?

Uvedená úloha umožňuje uplatnit různé přístupy žáků směřující k jedinému správnému řešení. Různorodost se v našem případě projevila v grafickém záznamu úlohy, které bylo zároveň grafickým řešením. Uvádíme tři různé autentické způsoby záznamu téhož postupu řešení, téže úvahy, téhož úsudku žáka. Přestože všechna řešení jsou správná, můžeme vysledovat různou míru abstrakce uplatněnou řešitelem. Před samotným uvedením ukázek je třeba zdůraznit, že se jednalo o pomocné soukromé zápisky řešitelů. Vyloučena je tím pravděpodobnost „nadbytečných“ poznámek „pro učitele“.

Jana

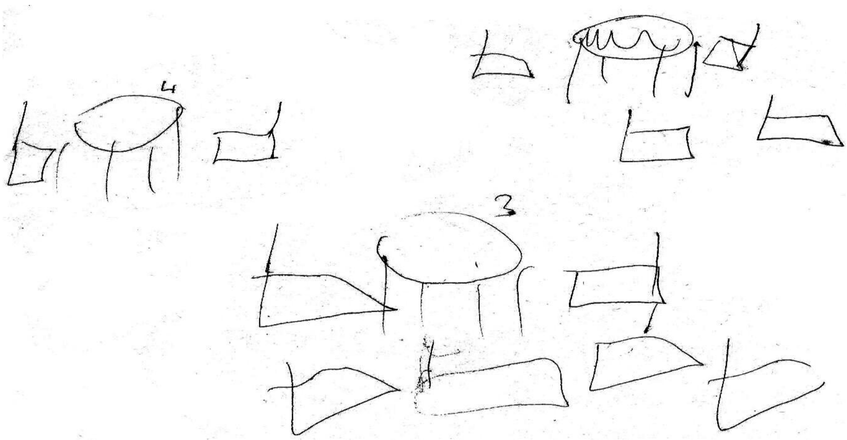
Projevuje se pečlivým, přesným záznamem třech různobarevných druhů stolů včetně všech židlí. Obrázek okna vyjadřuje umístění hnědých stolů v klubovně.



Obrázek 6 ***Řešení Jany s pečlivým grafickým záznamem podmínek úlohy***

Adam

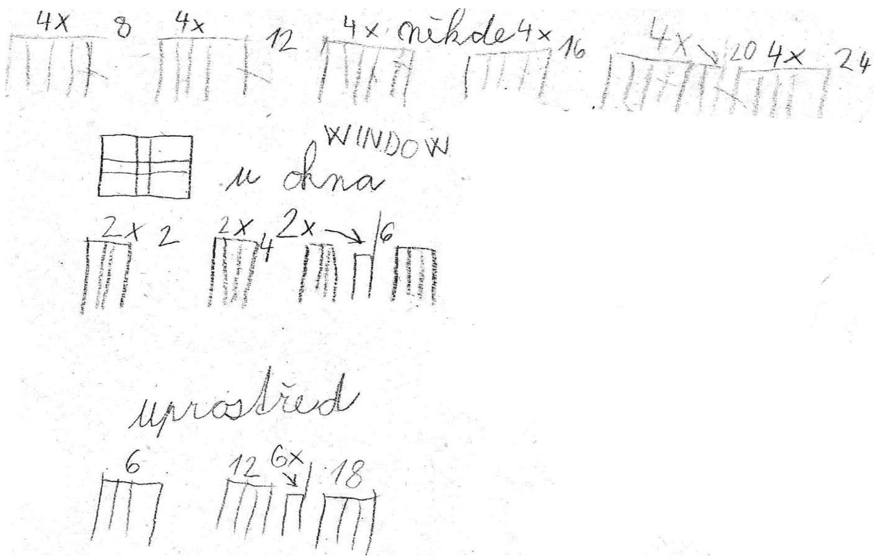
Každá ze skupin stejně barevných stolů je reprezentována jedním stolem, u něhož je zakreslen příslušný počet židlí. U dvou stolů je uvedeno číslo, vyjadřující počet stolů v tomto uspořádání.



Obrázek 7 ***Obrázek Adama s vyznačením židlí u jednotlivých stolů***

Jarda

Stoly jsou naznačeny pouze symbolicky. Jejich počet i počet židlí k nim příslušejících je zaznamenán číselně. O snaze zaznamenat veškeré vztahy plynoucí ze zadání úlohy svědčí nadpisy u skupin stolů, informující o jejich umístění v místnosti. Zároveň nám tato informace odkrývá, že řešitel neidentifikoval uvedené informace jako nadbytečné. Možný je také popis umístění stolů v průběhu prvního čtení zadání úlohy, a tudíž identifikování jejich nepodstatnosti pro řešení úlohy až po vytvořeném záznamu, tedy po přečtení otázky.



Obrázek 8 *Znázornění Jardy akcentující nadbytečné údaje v zadání*

Z popisu způsobů grafického záznamu a řešení úloh jednotlivými žáky se můžeme pokusit o formulaci obecnějších závěrů:

- zřetelně se projevuje „síla“ sémantického pozadí úlohy (nákresy postav nebo stolů a židlí v reálných situacích zadaných v úloze), která při „uchopení“ úlohy hraje dominantní roli,
- žáci převádějí do grafické podoby postupně jednotlivé informace v pořadí daném formulací zadání úlohy,
- při transformaci textové podoby úlohy do jazyka matematiky grafickou reprezentací se projevují obtíže vedoucí často k nesprávnému řešení (nevhodná grafická reprezentace, nepostižení vzájemné souvislosti jednotlivých dílčích informací ze zadání).

Naučit žáky správnému písemnému a slovnímu vyjadřování a argumentaci by podle Calábka a kol. (2010) mělo být jedním z cílů práce s matematickými talenty na základních školách. Jak však upozorňují Rendl a kol. (2013), výzkumy potvrzují neochotu žáků používat obrázky a náčrty pro řešení slovních úloh.

Uvedené ukázky řešitelských postupů žáků poskytují učiteli primární školy příležitost a vhodný námět pro následnou individuální nebo kooperativní reflexi žákova výkonu. Domníváme se, že společná analýza žákovských řešení má své významné místo i v přípravě budoucích učitelů. Dokládá to řada výzkumných šetření, o nichž informují například Hošpesová (2014), Samková (2015) nebo Tichá (2014). Zemanová (2014) prezentuje písemné řešení geometrické úlohy žáky 4. ročníku ZŠ a následnou společnou reflexi studentů učitelství zaměřenou na detailní analýzu a interpretaci strategií řešení a identifikaci chybných řešení.

Tyto zpětnovazební informace při použití pouze kvantitativního způsobu zpracování testu zůstávají nepovšimnuty. Reflexe učebních úloh, které jsou žákům v matematickém vyučování zadávány a následně řešeny, se mohou stát jedním z elementů reflexe a sebereflexe činnosti učitele. Jde o výběr úloh z hlediska jejich didaktických funkcí ve vyučování, o „design" úloh, způsob reprezentace jejich matematických obsahů, stupeň určenosti, míru zobecnění, míru úplnosti slovní úlohy a její strukturu a o další aspekty včetně reflexe komunikačních a interakčních struktur, jež ve vyučovací hodině při řešení úloh vznikly: interakce žák – učitel, žák – žák, otázky učitele.

– 2 – 1 – 5 Predikce a sebehodnocení jako součást řešení soutěžních úloh

V jednom dílčím samostatném výzkumném šetření jsme se zaměřili na predikci a sebehodnocení úspěšnosti řešení učebních úloh žáky primární školy (Nováková, 2015a, 2015b). Vedla nás k tomu dosavadní zkušenost, získaná při práci se soutěžními úlohami.

Obecně se predikcí rozumí předpověď či prognóza tvrzení o tom, co se stane nebo nestane v budoucnosti (Petráčková et al., 2000). Predikce je závislá na smýšlení žáka o vlastní zdatnosti. Žák si přirozeně vybere úkol, o kterém věří, že je v jeho schopnostech ho vyřešit, a vyhýbá se těm, které považuje za příliš náročné a podle jeho mínění či odhadu „nad jeho síly".

Souhlasíme se Schoenfeldem (1992), že žáci, kteří umějí promýšlet své strategie učení a řešení úloh, disponují dobrým metakognitivním řízením vlastní činnosti, dokážou predikovat úspěšnost svého řešení a disponují také vyšší úrovní sebehodnocení. Fisher (1997) v této souvislosti mluví o „meta-žácích", kteří přemýšlejí o svém myšlení, soustředí se na úkol, vědí, co dělat, když uváznou, a jsou v používání svých strategií úspěšní.

Zaměřili jsme se na pokus o zjišťování reálné míry predikce a úrovně sebehodnocení žákova výkonu jako součásti procesu řešení vybraných soutěžních úloh.[31] Cílem výzkumu bylo zjistit, jaká je míra predikce a úroveň sebehodnocení žáků 4. a 5. ročníku ZŠ a zda se liší podle jejich úspěšnosti řešení úloh. Předpokládali jsme, že žáci, kteří budou v řešení úloh úspěšní, dosáhnou významně vyšší míry predikce než žáci neúspěšní. Při formulaci výzkumné otázky jsme operacionalizovali proměnné výzkumného šetření:

a) výkon žáka, který se projevuje mírou úspěšnosti řešení úloh: celkový počet (součet) bodů z testu (max. 20 bodů) z celkového počtu 10 úloh. Správná odpověď byla hodnocena 2 body, částečná 1 bodem, za nesprávnou nebo chybějící nezískal řešitel žádný bod. Každý respondent mohl získat 20 bodů. Podle úspěšnosti řešení úloh jsme řešitele rozdělili na úspěšné se ziskem 20–10 bodů a neúspěšné (9–0),

— — —

31 Inspirací pro naše výzkumné šetření byl výzkum P. Zgarbové (2011).

b) míra predikce žáků vztahující se k řešení soutěžních úloh, tj. porovnání mezi vnímanou osobní zdatností žáků a jejich skutečným výkonem (max. 20 bodů),
c) úroveň sebehodnocení žáků vztahující se k řešení úloh, tj. porovnání mezi vnímáním úspěšnosti po vyřešení úloh a jejich reálným výkonem (max. 20 bodů).

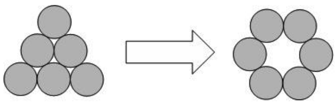
Byly formulovány dvě výzkumné otázky:
1. Jaká je míra predikce a úroveň sebehodnocení žáků 4. a 5. ročníku základní školy při řešení nestandardních slovních matematických úloh?
2. Jak se liší míra úspěšnosti řešení nestandardních slovních matematických úloh žáků 4. a 5. ročníku základní školy v závislosti na různé míře predikce a úrovni sebehodnocení?

Jako základní výzkumnou techniku jsme použili didaktický test tvořený 10 soutěžními úlohami, který zahrnoval také otázky zaměřené na zjištění míry predikce žáků a jejich úrovně sebehodnocení. Úlohy byly vybrány ze soutěžních testů minulých ročníků kategorie Klokánek a následně upraveny do podoby otevřených testových položek. Každá z úloh má jediné správné řešení. Byly zvoleny úlohy nižší obtížnosti: 8 úloh, které jsou v soutěži ohodnoceny 3 body a 2 úlohy čtyřbodové. Jednotícím faktorem, který „zastřešoval" rozmanitost obsahové stránky úloh (úlohy vyžadující aritmetické výpočty, představa zlomku jako části celku, úlohy vyžadující prostorovou představivost) i způsobu jejich prezentace (zadané slovy nebo textem doplněným obrázkem, kontextové – jako výsledek matematizace reálné situace) byl nestandardní charakter učebních úloh. Test byl shodný pro žáky 4. a 5. ročníku základních škol.

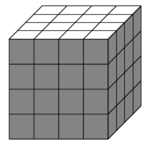
Pokyny pro žáky:
- V testu najdeš zadání matematických úloh. Přečti si postupně všechny úlohy od 1. až po 10., ale zatím je nezkoušej řešit.
- Nejprve zkus odhadnout, jak dokážeš každou úlohu vyřešit. Zakřížkuj u každé úlohy tvoji předpověď. Postupuj tak od úlohy 1 až po úlohu 10.
- Nyní zkus postupně všechny úlohy vyřešit. Pod zadání každé úlohy napiš své řešení. Můžeš si vzít prázdný papír na pomocné výpočty.
- Nakonec zakřížkuj v tabulce odpověď, jak myslíš, že jsi každou úlohu dokázal(a) vyřešit. Postupuj opět od úlohy 1 až po úlohu 10.

Testové úlohy:
1. *Soňa čtyřikrát hodila hrací kostkou. Celkový počet hozených bodů byl 23. Kolikrát padla šestka?*
2. *Tři veverky – Zrzečka, Rozárka a Pizizubka – nasbíraly 7 ořechů. Každá z nich nasbírala jiný počet ořechů, ale každá našla aspoň jeden. Zrzečka nasbírala nejméně ořechů a Rozárka nejvíce. Kolik ořechů našla Pizizubka?*
3. *Vyučovací hodina matematiky začala v 11:50 a trvá čtyřicet minut. Přesně v polovině vyučovací hodiny vletěl do třídy pták. V kolik hodin to bylo?*
4. *Janek, Petr a Lukáš hrají hru. Janek násobí třemi, Petr přičítá 2 a Lukáš odčítá 1. V jakém pořadí kluci počítali, když se od čísla 3 dostali k číslu 14?*

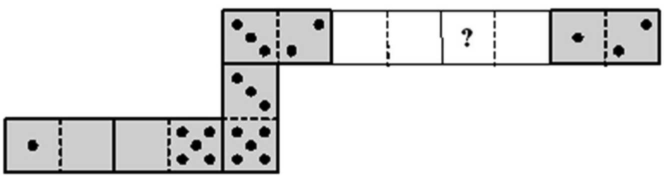
5. *Na oslavě byl každý ze dvou stejných dortů rozdělen na 4 stejné části. Poté byla každá část ještě rozdělena na 3 stejné dílky. Takový dílek dostal každý z účastníků oslavy a 3 dílky ještě zbyly. Kolik lidí bylo na oslavě?*
6. *Karel položil 6 stejných mincí do tvaru trojúhelníku (jako na obrázku vlevo). Jaký nejmenší počet mincí musel přemístit, aby mince tvořily kruh jako na druhém obrázku?*



7. *Toník, Kája, Cyril, Zdenda, Eda a František házeli kostkou. Každému z nich padlo jiné číslo. Toníkovo číslo je dvakrát větší než Kájovo, Toníkovo číslo je třikrát větší než Cyrilovo, Zdendovo číslo je čtyřikrát větší než Edovo. Kolik hodil František?*
8. *Velká krychle (podívej se na obrázek) byla sestavena ze 64 malých stejně velkých bílých krychliček. Tomáš natřel 5 stěn velké krychle zelenou barvou. Kolik malých krychliček má 3 stěny zelené?*



9. *Franta sestavil „hada“ ze 7 dílků domina. Přiložil vedle sebe vždy dílky se stejným počtem teček. Na všech dílcích hada bylo celkem 33 teček. Jeho bratr Jirka odstranil dva dílky (podívej se na obrázek). Kolik teček bylo původně na místě označeném otazníkem?*



10. *Jirka zapsal dvě čísla pomocí číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6. Obě zapsaná čísla jsou trojciferná a každou z číslic použil právě jednou. Nakonec obě čísla sečetl. Urči největší možný součet.*

Ke každé úloze v testu byla přiřazena jedna otázka na predikci a jedna otázka na sebehodnocení, tj. celkem 10 otázek zkoumajících míru predikce a 10 otázek zjišťujících úroveň sebehodnocení.

Při vyhodnocování míry predikce a úrovně sebehodnocení jsme nebrali v úvahu souhrnnou hodnotu, kterou žáci zakřížkovali na škále (tj. jejich subjektivně vnímanou hodnotu), ale skutečnou míru jejich predikce a sebehodnocení, tzn. že jsme jimi vnímanou míru srovnali s jejich skutečným výkonem při řešení testových úloh (v každé úloze zvlášť). Predikoval-li například respondent, že úlohu jistě vyřeší správně a skutečně ji správně vyřešil, byl hodnocen 2 body. Jestliže si nebyl jistý, ale předpokládal, že úlohu správně vyřeší a vyřešil ji správně, získal

1 bod. Pokud predikoval, že úlohu vyřeší správně a nevyřešil ji, nezískal žádný bod. Vztah mezi předpovědí žáka a skutečnou úspěšností řešení úlohy (bodové hodnocení míry predikce) je zachycen v tabulce 1.

Tabulka 1 *Vztah mezi předpovědí žáka a úspěšností řešení úlohy*

předpověď (predikce) žáka	**úspěšnost řešení úlohy**	
	vyřešil správně	**nevyřešil správně nebo neřešil**
vím jistě, že úlohu vyřeším správně	2	0
asi úlohu vyřeším správně	1	0
asi úlohu nevyřeším správně	0	1
vím jistě, že úlohu nevyřeším správně	0	2

Zcela analogicky jsme postupovali při vyjádření vztahu mezi sebehodnocením žáka, provedeným následně po vyřešení úlohy, a skutečnou úspěšností řešení – bodové hodnocení úrovně sebehodnocení uvádí tabulka 2.

Tabulka 2 *Vztah mezi sebehodnocením žáka a úspěšností řešení úlohy*

sebehodnocení žáka	**úspěšnost řešení úlohy**	
	vyřešil správně	**nevyřešil správně nebo neřešil**
vím jistě, že jsem úlohu vyřešil(a) správně	2	0
asi jsem úlohu vyřešil(a) správně	1	0
asi jsem úlohu nevyřešil(a) správně	0	1
vím jistě, že jsem úlohu nevyřešil(a) správně	0	2

Šetření bylo realizováno na souboru 204 žáků 16 základních škol ve čtyřech krajích České republiky v listopadu 2014. Výzkumný vzorek tvořilo 54 žáků ve věku 9 let (26,9 %), 109 žáků ve věku 10 let (53,4 %) a 41 žáků ve věku 11 let (20,1 %). Získaná data jsme zpracovali v intencích kvantitativního metodologického přístupu, ale také jsme se pokusili o analýzu řešitelských postupů některých respondentů.

Výzkumem byla zjištěna nízká úroveň úspěšnosti řešení nestandardních úloh – průměrná úspěšnost 8,39 bodu (tj. 4 úspěšně vyřešené úlohy z 10). Pouze 6 řešitelů (2,9 %) vyřešilo správně všech 10 úloh, 9 řešitelů (4,4 %) nevyřešilo správně žádnou úlohu. Jednu z příčin uvedeného stavu, který považujeme za alarmující, spatřujeme do značné míry v tom, že řešení vyžadovalo porozumění slovně formulovanému zadání v otevřených testových úlohách. Správné řešení není založeno na rutinním výpočtu, vyžaduje spíše vhled do úlohové situace, uplatnění matematických schopností.

Když se podíváme na míru predikce a úroveň sebehodnocení na vzorku všech respondentů, zjišťujeme, že jsou hodnoty vyrovnané a dosahují poměrně nízkého skóre. Celková míra predikce dosahovala průměrné hodnoty 8,04 bodu z celkového počtu 20 bodů a celková úroveň sebehodnocení dosahovala hodnoty 8,85 bodu z celkového počtu 20 bodů.

Mezi úspěšnými řešiteli (10 a více získaných bodů) byly zjištěny průměrné hodnoty výkonu 13,80, predikce 9,16 a sebehodnocení 10,38, mezi neúspěšnými řešiteli byly dosaženy průměrné hodnoty podstatně nižší: výkon 4,92, predikce 7,23 a sebehodnocení 7,89. Úspěšní řešitelé dosahovali významně vyšší úrovně míry predikce i úrovně sebehodnocení než žáci v řešení úloh neúspěšní. Usuzujeme, že žáci v matematice úspěšní, kteří disponují vyšší úrovní matematických schopností a prokazují to výsledky řešení nestandardních úloh, jsou rovněž schopni objektivněji predikovat i hodnotit svůj výkon.

Můžeme též sledovat predikci, výkon i sebehodnocení u jednotlivých žáků, a to jak z pohledu celého testu, tak jednotlivých úloh.

Uvedeme dvě žákovská řešení jedné úlohy (zadání viz výše):

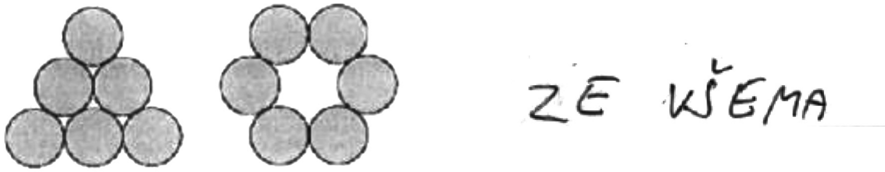
Obrázek 9 ***Záznam Vojtova správného řešení***

V této úloze Vojta získal 2 body za predikci a 2 body za sebehodnocení. Při predikci vybral možnost *vím jistě, že úlohu vyřeším správně*, pro sebehodnocení *vím jistě, že jsem úlohu vyřešil správně*. Úlohu správně vyřešil, což je důvod, proč získal 2 body za predikci i sebehodnocení. V celkovém hodnocení Vojta získal 10 bodů za predikci, 11 bodů za sebehodnocení a 14 bodů za samotné řešení úloh.

Nyní se lze zamyslet nad interpretací takové situace. Můžeme se zaměřit na osobnost řešitele či úlohu samotnou, vyjít z písemného řešení nebo z rozhovoru s řešitelem.

Vojtovo grafické řešení je jasné, komentáře jsou správné. Byl si jistý svým řešením. Výsledkem bylo poměrně malé číslo. Menší je už jen číslo 0 (to nedává smysl volit, protože by mince již musely být v požadované poloze) a číslo 1 (přesunem jedné mince kruh zjevně nevznikne). Vzhledem k malému počtu přesouvaných mincí bylo pro žáky možné použít mentální manipulaci. Tedy již po přečtení zadání úlohy Vojta výsledek „viděl“, řešil úlohu vhledem.

Vojta získal za predikci 2 body. Úspěšná predikce byla zapříčiněna též skutečností, že úloha byla zadána obrázkem. Přesnost predikce i sebehodnocení však může ovlivnit řada dalších okolností.



Obrázek 10 ***Záznam Janina nesprávného řešení***

V této úloze získala Jana 0 bodů za predikci a 0 bodů za sebehodnocení. Predikovala možnost *asi úlohu vyřeším správně*. Při sebehodnocení zvolila *asi jsem úlohu vyřešila správně*. V obou případech se mýlila, protože úlohu správně nevyřešila.

V celém testu získala 7 bodů za predikci, 10 bodů za sebehodnocení a 2 body za řešení úloh. Řešení Jany je chybné, ale „pouze“ proto, že nevzala v úvahu část otázky v zadání („… nejmenší počet“). Zajímavé je, že pokud bychom tuto skutečnost pominuli, bylo by Janino řešení správné. Na prvním obrázku je 6 mincí stejně jako na druhém.

Právě úlohy ze soutěže Matematický klokan se zdají být vhodným nástrojem pro zjišťování míry predikce, ale i sebehodnocení žáků. Specifický způsob hodnocení v soutěži Matematický klokan (penalizace za nesprávné řešení úlohy, ale žádná penalizace za neřešení úlohy) vede řešitele k obezřetnosti a ke zvážení míry rizika při tipování záznamu do karty odpovědí v případě, že si není správnou odpovědí jistý. Soutěž tak poskytuje žákům i možnost

a) predikovat svou úspěšnost řešení: mám na to, abych úlohu vyřešil, pustím se tedy do řešení nebo vyhodnotím úlohu jako příliš obtížnou, časově náročnou, neřeším ji a pokračuji řešením jiné úlohy. Je třeba také vzít v úvahu, že doba vlastní soutěže je časově limitována, proto musím zhodnotit, které úlohy si k řešení vyberu,
b) vlastní řešení úlohy evaluovat: jsem si jistý, že mé řešení je správné, a proto svou odpověď zaznamenám. Nejsem si jistý, mám možnost výsledek nezaznamenat, v konečném důsledku ji tak vynechat a tím do celkového výsledku bodově nepromítnout.

– 2 – 2 Učební úlohy v soutěži Matematický klokan

– 2 – 2 – 1 Charakteristika matematických soutěží a soutěžních úloh

Vnímání určitého souboru úloh se mění jeho uvedením v kontextu slova *soutěž*. Asociace spojované s tímto slovem jsou v mnohém shodné s obvyklým významem – soutěž o nejlepšího, závodění, závod, utkání, boj, také konkurenční boj. Výstižné jsou také vazby k tomuto slovu – s kým, oč, proti komu, v čem. Do jisté míry mohou být zarážející některé přívlastky vážící se k soutěži. Soutěž může být dravá, nekalá, ostrá, volná, ale také zdravá. Ve výkladovém slovníku nalezneme dvě roviny významu slova *soutěž*: 1. situace, ve které dva nebo více lidí nebo skupin se snaží dostat něco, co nemůže mít každý, 2. událost, které se lidé účastní, aby zjistili, kdo je nejlepší v určité činnosti. Termín *soutěž* však může nabývat ještě jiné významové dimenze. Je to hravost, kterou lze uplatnit i ve významu soutěže v matematickém vyučování. Pro soutěž i hru můžeme nalézt mnohé společné atributy: obě aktivity jsou motivovány prožitky, mají závazná pravidla, jsou provázeny pocity napětí a radosti. Hartl a Hartlová (2000) takové soutěže dělí do dvou kategorií. V první z nich je dominantní prvek náhody. Ve druhé situaci je vše založeno na úporném úsilí jednotlivce či skupiny. I v pojetí Průchy (2002) má hra řadu aspektů společných se soutěží: poznávací, procvičovací, emociální, pohybový, motivační, tvořivostní, pro mnohé i rekreační a snad pro všechny učitele také diagnostický aspekt.

Uvedené přístupy jsou reflektovány také školskou praxí. Učitelé obvykle znají a využívají soutěží ve dvou odlišných významech s různými didaktickými cíli, záměry a přístupy:

- „uvnitř“ vyučovací hodiny jako krátké „pětiminutovky“, „denní cviky“ či „početní rozcvičky“, obvykle sloužící k procvičení a fixaci základních počtářských dovedností, často realizované formou jednorázové nebo etapovité didaktické hry. Takto koncipované soutěžení jednotlivců nebo skupin žáků je organickou součástí vyučovacího procesu (může vést ke krátkodobému nebo střednědobému školnímu projektu), metodou řízení učební činnosti žáků a prostředkem (nástrojem) učení žáků,
- „vně“ vyučovacího procesu, i když ve škole realizované celé nebo zčásti. Celostátními soutěžemi zaměřenými k předmětu matematika, vyhlašovanými MŠMT, soutěžemi kategorie A, jsou Matematická olympiáda, Pythagoriáda a Matematický klokan. V tomto významu budeme matematickou soutěž vnímat v dalším textu publikace.

Pravděpodobně nejznámější soutěží uvedeného typu a s nejdelší tradicí je Matematická olympiáda. Ve školním roce 2014/15 proběhl pod odbornou garancí Jednoty českých matematiků a fyziků již její 64. ročník. Soutěží se v několika věkových kategoriích: kategorie A, B, C pro studenty středních škol, kategorie Z9–Z6 pro žáky jednotlivých ročníků 2. stupně ZŠ, kategorie Z5 je určena pro žáky 5. ročníku ZŠ.

U všech kategorií nejdříve probíhá „domácí“ kolo, v němž mají soutěžící předloženo 6 úloh, správné vyřešení 4 z nich stačí k postupu do školního kola. Texty soutěžních úloh jsou zveřejněny v samostatných letácích a také v časopisech Rozhledy matematicko-fyzikální, Matematika, fyzika, informatika a Učitel matematiky. Poté proběhnou jedno až tři kola (podle kategorie) pro soutěžící úspěšné v kole předcházejícím. Úlohy jsou ve vyšších kolech postupně náročnější. Soutěž probíhá po celý školní rok a na závěr se vyhlašují nejúspěšnější řešitelé v jednotlivých kategoriích na úrovni okresu, regionu či republiky. Šest nejúspěšnějších řešitelů kategorie A reprezentuje Českou republiku na Mezinárodní matematické olympiádě.

Zejména vyšší kola Matematické olympiády a Mezinárodní matematickou olympiádu lze označit jako soutěže výkonové. Jejich smyslem je podnítit nadané studenty k hlubšímu poznání a většímu nasazení pro matematiku. Zde úlohy jen volně navazují na školní učivo matematiky, obvykle vyžadují hlubší prostudování některého matematického tématu, lze využívat vedle nadání a znalostí také zkušenosti řešitelů s určitým typem soutěžních úloh. Mohou zde být i úlohy s delším a méně názorným logickým řetězením dílčích úloh, rozbor úloh bývá obvykle hlubší a diskuse jemnější (Trávníček, 2002).

Význam matematických soutěží nelze ovšem spatřovat pouze ve vyhledávání a rozvíjení matematických talentů nebo v absolutizaci výsledků žáků ve smyslu reprezentace školy jako prostředku zvyšování její prestiže. Soutěžní úlohy umožňují i mnohem širší bezprostřední využití ve vyučovacím procesu. Společná analýza řešení úloh po skončení soutěže nebo zařazování úloh ze starších ročníků do vyučování mohou vytvářet prostor pro diskusi, hledání i obhajování žákovských řešení, používání argumentů vlastních i přijímání argumentů jiných. Výsledky žáků v soutěžích se mohou v některých případech lišit i od jejich hodnocení a klasifikace v matematice. Tím může řešení soutěžních úloh přispívat ke zpřesnění a objektivizaci hodnocení: pomoci učiteli diagnostikovat dosud neodhalené schopnosti a potence žáků, korigovat dosavadní představy učitelů. K tomu mohou přispět i spontánní rozhovory a besedy se žáky po skončení soutěže. Žákovské reflexe vlastního výkonu (*Kolik myslíš, že máš správně vyřešených úloh? Čemu jsi v zadání nerozuměl? Které úlohy byly pro tebe nejtěžší a které nejlehčí?*) mohou poskytovat učiteli cennou zpětnou vazbu a řadu dalších pedagogicky využitelných podnětů.

Soutěžní úlohy nabízejí možnost potenciálního využití interdisciplinárních vztahů a souvislostí, například matematiky s výchovou dětského čtenáře. Pohádkové náměty nebo v úloze vystupující pohádkové či literární postavy vytvářejí prostor pro dosahování formativních cílů často efektivněji než klasické vyučování, např. s využitím dramatizace známého pohádkového příběhu, diskuse nad literárním či jinak ztvárněným dílem na základě vlastní četby nebo sledování filmu či televizního programu:

Pinocchio měl nos dlouhý 9 cm. Pokaždé když zalhal, prodloužil se mu nos o 6 cm. Když řekl pravdu, nos se mu zkrátil o 2 cm. Pinocchio třikrát zalhal a dvakrát řekl pravdu. Jak dlouhý nos měl potom?

Prófa se jednou zeptal Sněhurky, kolik je jí let. Ta odpověděla: „Jestliže k mému věku přičteš číslo 3, od tohoto součtu odečteš 6 a vzniklý výsledek dělíš 5, obdržíš číslo, které je ciferným součtem čísla 111.“ Prófovi to stačilo. Umíš určit Sněhurčin věk také?

V Zemi obrů musel Gulliver chodit rychleji než byl zvyklý, jestliže chtěl s obry udržet krok. Zatímco obr udělal 3 kroky, Gulliver jich musel udělat 12. Při cestě z tržiště do královského paláce udělal obr 42 kroků. Kolik kroků udělal Gulliver při stejné cestě?

Jak upozorňuje Kubátová (2005), řešení soutěžních úloh lze současně považovat za námět dalších navazujících činností a žákovských aktivit. Po skončení soutěže se vlastní řešitelova zkušenost s řešením může stát východiskem následného matematického zkoumání. Jeho smyslem je pokus o kognitivní reorganizaci výchozí úlohové situace na základě postižení principu nebo schématu řešení – objevení nových vazeb mezi jednotlivými komponentami úlohy – jehož výsledkem může být řešení pěknější, efektivnější, rychlejší. Následnou analýzu původního žákova řešení považujeme za smysluplný projev aktivity zaměřené k produktivnímu osvojování nových poznatků žákem.

Vhodnou zásobu úloh svým matematickým obsahem, námětem či způsobem prezentace neobvyklých, často vyžadujících od řešitele „pouze“ správný úsudek, postřeh, vhled do problému nebo experiment než matematické vědomosti a dovednosti, poskytuje mezinárodně koordinovaná soutěž Matematický klokan.

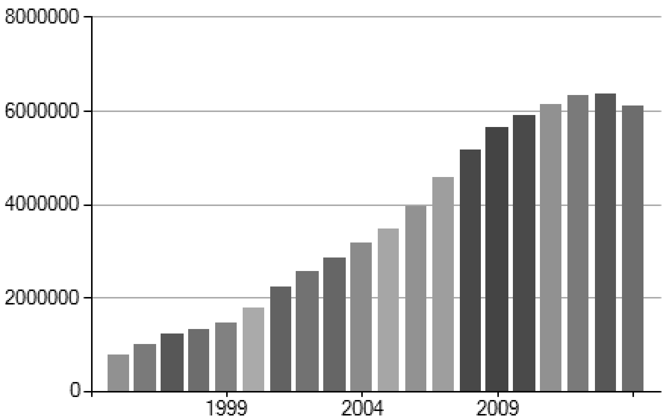
– 2 – 2 – 2 Soutěž Matematický klokan v České republice a jeho mezinárodní dimenze

Nestandardní úlohy, uvedené v předchozí kapitole, jsou převzaty z minulých ročníků soutěže Matematický klokan, z kategorií Klokánek a Cvrček. V dalším textu se pokusíme o stručnou charakteristiku historie a současné podoby uvedené soutěže.

Již v roce 1991 zorganizovala skupina francouzských matematiků soutěž, jejímž symbolem se stal australský klokan. To proto, že počátky této soutěže jsou spojeny se jménem australského matematika Petera O´Hallorana. Z jeho podnětu vznikla kolem roku 1980 soutěž, která nebyla určena pro nejlepší a nejtalentovanější matematiky, ale jejím smyslem bylo získávat pro matematiku „normální“ žáky, dokázat jim, že matematika nemusí být vždy nudný, nezáživný a obávaný školní předmět. Možná právě z tohoto důvodu si soutěž získala v krátké době značnou oblibu u žáků i učitelů v Austrálii i v dalších zemích Evropy.

Za „evropský“ start soutěže lze považovat 15. květen 1991, kdy se konal první ročník ve Francii. Vysokoškolští učitelé matematiky – André Deledicq a Jean-Pierre Boudine spolu se svými spolupracovníky – uspořádali soutěž pro francouzské žáky a studenty pod názvem „Klokan“. Ve stejném formátu se soutěž uskutečnila o rok později též v Bělorusku, Maďarsku, Nizozemí, Polsku, Rumunsku a ve Španělsku.

Skutečnou mezinárodní dimenzi získala v červnu roku 1994. Na setkání ve francouzském Štrasburku byla ustavena mezinárodní asociace s názvem „Kangourou sans frontières“ se sídlem v Paříži, sdružující již zástupce 10 evropských zemí. Byly přijaty stanovy asociace, formulována pravidla soutěže a postupně ustaveny jednotlivé kategorie: pro žáky ve věku 10–11 let s názvem *Ècolier,* 11–13 let *Benjamin*, 13–15 let *Cadet*, 15–17 let *Junior* a starší *Student*.[32] Byl také zvolen první prezident asociace, francouzský profesor matematiky Claude Deschamps, v dalším období stál v čele asociace André Deledicq. Soutěž se postupně otevírala i mimoevropským zemím – z Asie, Afriky, Severní a Jižní Ameriky. V současné době je prezidentem asociace slovinský profesor matematiky Gregor Dolinar. Akreditovaným českým zástupcem v mezinárodním výboru asociace je profesor Josef Molnár z Univerzity Palackého v Olomouci.[33] V průběhu let se postupně zpřesňovala pravidla soutěže (počet úloh v jednotlivých kategoriích, časový limit, možnost používání kalkulátorů) a komunikace mezi národními organizátory a evropským centrem asociace Kangourou sans frontières (*Kangaroo without borders*). Zvyšoval se počet účastnických zemí a celkový počet účastníků. V roce 2015 se soutěže zúčastnilo již více než 6 milionů účastníků z šesti desítek zemí čtyř kontinentů. Vývoj počtu účastníků je patrný z grafu:



Obrázek 11 ***Vývoj počtu účastníků soutěže v letech 1995–2015. Převzato z www.aksf.org.***

Každoroční setkání zástupců pořadatelských zemí se koná pod názvem „Annual Kangaroo Meeting“ v podzimních měsících střídavě v jednotlivých účastnických zemích. Česká republika pořádala takové setkání v roce 2000 v Čelákovicích,

32 V ČR je od roku 2005 ještě šestá kategorie Cvrček pro žáky 8–9leté, na mezinárodní úrovni byla tato kategorie vyhlášena poprvé v roce 2011 s názvem *Pre-ècolier.*

33 Aktuální údaje o mezinárodních souvislostech soutěže lze nalézt na webových stránkách http://www.mathkang.org; http://www.aksf.org/.

v roce 2015 se konalo ve švédském Göteborgu. Jeho cílem je obsahově a organizačně připravit příští ročník, stanovit jednotný termín konání soutěže, kterým je vždy pátek nejbližší prvnímu jarnímu dni, a především sestavit soubor soutěžních testů pro jednotlivé kategorie v angličtině. Účastníci setkání mají k dispozici množinu úloh nabídnutých jednotlivými účastnickými zeměmi, jež pořadatelé setkání s časovým předstihem předem připraví (každá země zasílá organizátorům návrh několika úloh pro každou kategorii). Výběr nejvhodnějších úloh je velmi náročnou činností. Promítá se do ní posouzení rozdílnosti matematického kurikula jednotlivých států a jeho odlišnost na jednotlivých stupních a typech škol. Rozdílné je také chápání toho, co je „typická klokanská“ úloha – s rozmanitými akcenty danými představou jednotlivých účastníků a jejich dosavadní zkušeností s uskutečňováním soutěže ve vlastní zemi. Úkolem účastníků je rovněž hledání vhodného pořadí úloh v testu související s odhadováním jejich obtížnosti, distribuce správných odpovědí a stanovení distraktorů. Uvedené skutečnosti spolu s nezbytností zajištění jazykově přesné formulace úloh v jednotlivých mateřských jazycích účastníků vedly k dohodě, podle níž může každá země zaměnit či upravit nejvýše 5 úloh v každé kategorii.[34]

Vlastní soutěž je jednorázová a individuální. Ve všech pořadatelských zemích se koná na školách ve stanoveném termínu. Obvykle je to ve třetím březnovém týdnu. Účastníci vypracovávají test obsahující 24 úloh, na jehož řešení bývá vymezeno 60 minut. Soutěžní úlohy jsou v testu uspořádány podle gradující obtížnosti. Za správné řešení jednotlivých úloh lze získat 3, 4 nebo 5 bodů. Jestliže účastník nezvolí žádnou odpověď, nezíská žádný bod, odpoví-li nesprávně na kteroukoli úlohu, 1 bod ztrácí. Každý vstupuje do soutěže s bonusem 24 bodů – v případě, že všechny úlohy vyřeší nesprávně, dosáhne celkem 0 bodů.

Od tradičních soutěží typu Matematické olympiády nebo Pythagoriády se tedy Matematický klokan v řadě ohledů odlišuje:

- svým celkovým zaměřením a smyslem: především má rozvíjet zájem žáků o matematiku, pozitivní vztah žáků k matematice jako školnímu předmětu, v němž mohou prožít úspěch. Významně tedy vystupuje do popředí především motivační aspekt soutěže,
- „cílovou skupinou“, které je soutěž adresována: na rozdíl od Matematické olympiády to nejsou ti nejnadanější, talentovaní, nejlepší žáci, ale umožňuje – a předpokládá – také účast žáků s průměrnými nebo slabšími výsledky v matematice. Poskytuje jim příležitost vyzkoušet si své možnosti, schopnosti a matematické dovednosti, porovnat je se svými vrstevníky v celostátním či mezinárodním srovnání tím, že řeší stejné úlohy jako ostatní,

34 Každoročně v lednu se setkávají garanti jednotlivých kategorií se skupinou zkušených učitelů různých stupňů a typů škol, na kterém připravují českou verzi soutěže.

- charakterem soutěžních úloh: zřetelně se prosazuje tendence k zařazování nestandardních kontextových úloh oproti úlohám abstraktně matematickým. Právě při řešení kontextových (slovních) úloh se otvírají žákovi značné možnosti pro experimentování, které bývá zpočátku obvykle založeno na prostém uplatňování metody pokusu a omylu bez nacházení hlubších, obvykle latentních souvislostí zkoumaných problémů. Z praktických důvodů obsahuje test v soutěži soubor uzavřených testových položek (s výběrem jedné správné odpovědi z 5 nabídnutých možností). Tento typ testu v našem vzdělávacím systému významnější místo dlouho neměl, ve školské praxi se uvedený způsob kontroly prakticky nepoužíval, žáci zejména primárních škol na něj nejsou zvyklí a připravení – pro některé z nich je to první setkání s testem tohoto typu (Novák et al., 2005).

V České republice se první ročník soutěže uskutečnil 23. března 1995 především zásluhou Josefa Molnára, který se zúčastnil zakládající konference asociace. Pořádání se ujaly ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP (je garantem kategorie *Klokánek,* což je česká podoba evropské kategorie *Ècolier*, dále kategorie *Benjamín* a *Kadet*) a Katedra algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci (garantuje kategorie *Junior* a *Student*).[35] Od roku 2005 soutěží žáci 2. a 3. ročníku ZŠ v nové kategorii – *Cvrček.* Soutěžní test obsahuje v této kategorii 18 úloh, čas na řešení včetně zadání je 60 minut.

Od roku 1997 je Matematický klokan oficiální soutěží zařazenou mezi soutěže podporované MŠMT ČR. Soutěž se dotuje příspěvky MŠMT ČR a JČMF, které pokrývají náklady na organizaci i ceny pro vítěze jednotlivých kategorií. Účast v soutěži je – na rozdíl od převážné většiny účastnických zemí – pro všechny české účastníky bezplatná. Počet účastníků se postupně zvyšoval, nejvyšší účast mají z pochopitelných důvodů kategorie pro žáky základní školy (Cvrček, Klokánek, Benjamín, Kadet). Česká republika se v počtu účastníků nachází na předním místě jak v absolutních, tak zejména v relativních (v přepočtu na počet obyvatel) počtech soutěžících v celosvětovém měřítku. Počty soutěžících z celostátní statistiky ČR jsou uvedeny v tabulce.

35 Podrobnosti o české verzi soutěže, aktuální data i historie minulých ročníků v ČR lze najít na webové stránce www.matematickyklokan.net. Autorka publikace, která je garantem kategorií Cvrček a Klokánek, působí v současné době na Katedře matematiky Pedagogické fakulty MU v Brně.

Tabulka 3 *Počty soutěžících v ČR v letech 1995–2015 (převzato z www.matematickyklokan.net)*

Ročník	***Cvrček***	***Klokánek***	***Benjamín***	***Kadet***	***Junior***	***Student***	**Celkem**
1995		6 205	7 834	7 280	2 195	1 297	24 811
1996		18 522	30 819	27 262	6 148	3 938	86 689
1997		61 161	59 314	51 769	8 631	7 349	188 224
1998		62 963	67 417	57 653	11 580	8 484	208 097
1999		87 885	79 717	73 578	16 847	6 606	264 633
2000		95 426	87 304	81 893	20 384	10 319	295 326
2001		93 434	86 458	78 408	20 173	11 228	289 701
2002		99 204	86 785	81 440	20 479	10 428	298 336
2003		83 584	74 112	65 839	19 615	9 879	253 029
2004		78 275	75 605	68 324	17 345	9 729	249 282
2005	11 076 [35]	70 886	72 090	69 425	18 333	10 690	252 500
2006	46 832	66 799	69 739	69 104	18 003	9 947	280 424
2007	60 744	70 705	66 840	71 491	17 804	10 274	297 858
2008	70 942	74 668	64 995	69 734	19 101	10 191	309 631
2009	70 084	75 624	62 258	65 614	18 711	10 599	304 970
2010	78 291	81 737	66 731	63 412	18 711	9 646	318 525
2011	79 758	84 031	65 461	60 404	16 326	8 721	314 701
2012	84 221	87 324	67 750	61 010	15 021	8 987	324 313
2013	86 011	86 065	67 794	59 408	15 503	8 243	323 024
2014	97 479	94 525	69 635	61 244	15 479	7 900	346 264
2015	102 346	96 763	71 120	64 074	15 559	7 894	357 756

Úlohy ze soutěže Matematický klokan jsou vnímány jako jeden z možných způsobů pokusit se zbavit matematiku vžité nálepky nudné, nezáživné vědy, určené pouze pro pár vyvolených. Jsou pokusem motivovat široký okruh dětí a přesvědčit je o tom, že při řešení matematických úloh (a v matematickém vyučování vůbec) lze – byť se to mnohým zdá zcela překvapivé – objevit krásu nebo alespoň

36 V roce 2005 se konal v kategorii Cvrček první „ověřovací“ ročník, který ještě neměl mezinárodní ekvivalent. Úlohy pro tento ročník byly sestaveny garantkou soutěže.

zajímavost, zažít pocit radosti a uspokojení z řešení úloh a ze zaslouženého úspěchu, který je výsledkem přemýšlení a uplatnění nejen matematických znalostí, ale i tvořivých schopností (Novák et al., 2005).

Soutěžní úlohy zadávají žákům jejich učitelé matematiky. Jsou obvykle přítomni v průběhu řešení úloh žáky, evidují výsledky jednotlivých žáků, sumarizují výsledky jednotlivých tříd a předávají je k následnému celostátnímu zpracování prostřednictvím systému školních a krajských důvěrníků. Zkušenosti z minulých ročníků naznačují (Psotová, 2001; Novák, 2002), že se tím do určité míry rozšiřuje prostor pro nové podoby vzájemné komunikace mezi učitelem a žákem, která by pomohla vytvořit příznivou atmosféru matematického vyučování a tím poskytnout příležitost k jinému, často i novému, pohledu na edukační realitu.

Psotová (2001) metodou participačního pozorování průběhu soutěže v 5. ročníku ZŠ rozlišila v činnosti učitelky 5 chronologicky navazujících fází, lišících se mimo jiné mírou aktivity učitelky a žáků:

a) instrukce učitelky před zahájením samostatné práce žáků,
b) verbální komentář učitelky k jednotlivým úlohám před zahájením práce žáků,
c) shrnutí instrukcí učitelky a příprava žáků na řešení úloh,
d) samostatná práce žáků,
e) závěrečné činnosti spojené s odevzdáním prací a komentářem k výkonům žáků.

Předpokladem naplnění cílů soutěže je, že určitá popularita a prestiž soutěže a možnost srovnání kvantitativních výsledků žáků (tím i možnost využít tohoto srovnání k hodnocení kvality učitelovy práce) nebude deformovat edukační strategii učitele účelovou orientací na úspěšnost žáků. Zejména verbální komentář učitele k jednotlivým úlohám a případná intervence do samostatné práce žáků může zkreslit skutečný výsledek. Uvedená skutečnost je jedním z důvodů, které vedou k opatrnosti při vyslovování kategorických soudů vztahujících se k využití výsledků soutěže pro diagnostiku skutečné úrovně matematických schopností a dovedností žáků a pro porovnávání výsledků tříd či škol.

Alespoň poznámku je třeba věnovat ohlasu soutěže v řadách rodičů dětí. Zejména v posledním období se každoročně objevuje několik rodičovských reakcí, obvykle bezprostředně po uskutečnění soutěže, které můžeme (bez nároku na úplnost, protože nemáme k dispozici data, která by naši zkušenost jednoznačně průkazně doložila) shrnout do několika oblastí. Jejich společným jmenovatelem je zájem o dítě. Jedna skupina rodičů vychází z preference vnímání soutěžení ve smyslu snahy o dosažení vítězství. Pozitivní aspekt soutěžení je tak deformován účelovou interpretací ze strany některých rodičů:

- kritické výhrady k obtížnosti úloh, kterou považuje řada z nich za příliš vysokou, pro žáky příslušného věku až nepřiměřenou. Rodiče, obvykle velmi ambiciózní, až nekriticky hodnotící kvality svých dětí, se jen obtížně smiřují s tím, že jejich děti nedosáhly plného počtu bodů a že tedy nejsou „absolutními vítězi“,

- výhrady některých rodičů směřují také k tomu, že nebylo podle jejich názoru dosaženo naprosté přesnosti, jednoznačnosti a formulační preciznosti zadání úloh. Uvedenou skutečnost považují rodiče za příčinu toho, že jejich dítě nedosáhlo lepšího výsledku,
- bylo již uvedeno, že soutěž Matematický klokan je soutěží kategorie A, podporovanou MŠMT a zohledňovanou v rámci přijímacího řízení na vyšší stupeň školy – obvykle žáka 5. ročníku k přijetí na víceletá gymnázia. To vede ke snaze využít výsledků v soutěži k získání příslušné bonifikace a tím k potencionálnímu zvýhodnění uchazeče.

U druhé části rodičů se projevuje sdílení procesu řešení úloh se svými dětmi, které se projevuje prosbou o pomoc při řešení úlohy, a to jak z pohledu procesu řešení, jeho výsledku, tak i didaktického zpracování.

– 2 – 2 – 3 Reflexe soutěže Matematický klokan v názorech učitelů primární školy

V kapitole 2.2.2 jsme vyjádřili přesvědčení, že smyslem soutěže Matematický klokan a matematických soutěží obecně není pouze vyhledávání a rozvoj žáků s nadáním pro matematiku nebo porovnávání výsledků jednotlivců, tříd a škol.[37] Práce se soutěžními úlohami nabízí podle našeho názoru vhodné prostředí pro podstatně širší edukační využití. Významnou roli přitom sehrává kvalifikovaný a motivovaný učitel, vybavený osvojenými profesními kompetencemi. Na primárním stupni vzdělávání nabývá uvedený požadavek podle našeho názoru mimořádného významu.

Ve výzkumném šetření, realizovaném v roce 2004, jsme se pokusili zmapovat názory učitelů primární školy na možnosti širšího využití soutěže Matematický klokan a soutěžních úloh ve školské praxi (Kubátová, 2005). Domníváme se, že ani s určitým časovým odstupem od doby získání dat se celkový obraz o dané problematice příliš nezměnil. Zdají se to potvrzovat vlastní zkušenosti autorky z jejího pedagogického působení na základních školách, mnohé rozhovory a diskuse, které jsme absolvovali v souvislosti s přípravou soutěžních úloh (například na každoročním celostátním semináři garantů kategorií a spolupracujících učitelů nad tvorbou české verze soutěžních úloh), i ohlasy řady učitelů vždy při každoročním provedení soutěže v březnu.

— — —

37 Celostátní statistika soutěže Matematický klokan uvádí v jednotlivých kategoriích pouze počty řešitelů, jejich dosažené bodové výsledky, průměrný bodový výsledek a přehled nejúspěšnějších řešitelů (www.matematickyklokan.net). Nezahrnuje porovnávání dosažených výsledků na školách, v okresech či regionech vzhledem ke skutečnosti, že charakter soutěže neumožňuje zajistit zcela objektivní hodnocení, které provádí sám učitel.

K získání dat jsme využili dotazník pro učitele primární školy.[38] Výzkumný vzorek tvořilo 148 respondentů. Z hlediska věkové struktury byly nejpočetněji zastoupeny učitelky ve věku od 26 do 45 let (40,1 %), převažovaly zkušené učitelky s délkou profesní praxe od 7 do 20 let (52,5 %). Více než polovina z nich (50,3 %) působila na vesnici na plně organizované nebo malotřídní škole, 41,1 % učila ve městě a necelých 10 % v době realizace výzkumu z různých důvodů nevyučovalo (zastávalo neučitelskou pozici, nemělo místo, čerpalo mateřskou dovolenou aj.). Z hlediska zaměření výzkumu na kategorii Klokánek bylo významné, že alespoň jeden rok učilo ve 4. ročníku ZŠ 50,0 % respondentů, praxi v 5. ročníku ZŠ má 35,8 %. Zkušenost se soutěží Matematický klokan v roli učitele, zadavatele soutěžních úloh, vykazuje 88,6 % respondentů. Pouze 9 % ze zkoumaného souboru dosud o soutěži Matematický klokan nevědělo. Většina z těch, kteří získali určitou zkušenost se soutěží (84,2 %), se vyjádřila o soutěži velmi příznivě. Svůj názor zdůvodňuje zejména možností dalšího využití soutěže ve vyučování, ale i rozvojem kognitivní složky osobnosti žáka. Některé typické výpovědi jsme pro přehlednost shrnuli do tabulky.

Tabulka 4 *Zdůvodnění oblíbenosti soutěže Matematický klokan pro učitele*

Výpověď	**%**
Využití ve vyučování (motivace, rozvoj zájmu žáků o předmět, pozitivní vnímání matematiky jako školního předmětu, možnost přimět žáky vtipnou a nenásilnou formou učit se matematiku)	36,5
Rozvoj kognitivní složky osobnosti žáka (logického úsudku, matematického myšlení, matematických schopností, dovednosti pracovat s testem, samostatnosti, prostorové představivosti)	29,1
Vliv charakteru úloh na osvojení učiva (pozitivní ovlivnění ve smyslu hlubšího pochopení a trvalejších vědomostí, možnost řešit divergentní úlohy, úlohy jiné než v učebnici, možnost využít mezipředmětové souvislosti)	17,6
Vliv charakteru úloh na odkrytí potence žáků (diagnostika schopností a matematických kompetencí – talentovaných žáků, ale mohou uspět i průměrní a slabší i žáci mýlící se ve výpočtu)	8,8
Systém soutěže (umožňující srovnání nejen mezi účastníky ve třídě, ale i ve škole, regionu, republice, mezinárodní dimenze, nezvyklý typ testových položek s výběrem odpovědi)	6,8

Zajímalo nás také, jaké faktory zjištěný příznivý pohled učitelů (a zprostředkovaně i jejich žáků) na soutěž Matematický klokan ovlivňují. Následující tabulka shrnuje odpovědi na otázku: „Chápou-li Vaši žáci soutěž Matematický klokan kladně, jaký faktor podle Vašeho názoru ovlivňuje nejvíce tento postoj?“

38 Dotazník byl tvořen 35 položkami: 6 otevřených a 29 uzavřených otázek (10 dichotomických a 19 polynomických s výběrem nebo výčtem odpovědí). Z toho 10 položek mapovalo mínění, postoje a motivy respondentů vztahující se ke specifice soutěže Matematický klokan a zpřesňovalo jejich názory na potenciální využití v matematickém vyučování.

Tabulka 5 *Jaké faktory dle názoru učitelů ovlivňují nejvíce kladný postoj žáků k soutěži*

Faktory ovlivňující postoj žáků k soutěži Matematický klokan	**%**
Žákům se líbí charakter soutěžních úloh	53,4
Snaha žáků zažít pocit úspěšnosti z důvodu ocenění tohoto úspěchu okolím	25,7
Snaha zažít pocit úspěšnosti „pro sebe sama“	25,7
Vidina možnosti překonat mnohé spolužáky	20,3
Výsledek soutěže není známkován	14,9
Žáci se „ulijí“ z běžných hodin matematiky	13,5
Vidina možnosti prokázat vyučujícímu své kvality v matematice	13,5
Zaujetí myšlenkou mezinárodní soutěže (řešení stejných úloh ve stejný den jako mnoho dalších řešitelů)	8,1
Nemohu posoudit	30,4

Bližší specifikace charakteru soutěžních úloh jako faktoru oblíbenosti soutěže Matematický klokan žáky:

- skutečnost, že žák se s nimi v učebnicích často nesetkává (39,2 %),
- neobvyklý způsob zadání, prezentace úloh (nabídka odpovědí – úlohy s výběrem odpovědí) – 26,4 %,
- matematický obsah a témata úloh – 16,2 %.

Jednotlivé vyjmenované stránky úloh vzájemně souvisejí. Nejčastěji uváděnou je skutečnost, že soutěžní úlohy nejsou běžnými učebnicovými úlohami. Jsou pro žáky neobvyklé také způsobem prezentace (často ilustrací, obrazem, schématem nebo jiným způsobem grafické reprezentace), svou povahou testové položky s výběrem odpovědi z 5 nabídnutých možností. Poskytují žákům prostor nejen k uplatnění vlastních matematických znalostí a rutinních výpočtů, ale jsou pro ně zajímavé svým neobvyklým obsahem či námětem.

Další zjištěná data mají naznačit, zda soutěž Matematický klokan může být učitelkami reflektována jako příspěvek k dlouhodobější změně v přístupu žáků k matematice jako školnímu předmětu. Pozitivní vnímání soutěže ze strany respondentů je dáno do značné míry právě tímto faktorem. Respondenti uvádějí, že soutěž celkově přispívá ke změně přístupu k matematice (41,9 %), přispívá k oblibě matematiky jako učebního předmětu (29,7 %), motivuje žáky úspěchem v soutěži (12,2 %). Naše zjištění vyjadřuje přesvědčení učitelek 1. stupně základní školy, že účast žáků v soutěži Matematický klokan není situační, jednorázovou záležitostí, ale může přispět k pozitivní změně pohledu na matematiku.

Určitý respekt ze soutěže a obavy některých žáků z případné účasti v ní – strach z neúspěchu – jsou podle názoru učitelek způsobeny především obtížností soutěžních úloh (tento faktor uvádí 40,5 % z nich). Potvrzuje se tím víceletá zkušenost, opírající se o reflexi školské praxe. Soutěžní testy nejen v námi sledované kategorii Klokánek jsou učiteli matematiky považovány za příliš obtížné, obsahující vždy několik úloh s minimálním procentem úspěšných řešitelů [39].

V dotazníkovém šetření jsme se chtěli pokusit také získat informace o tom, jakým způsobem pracují učitelé se soutěžními úlohami po skončení vlastní soutěže. Zajímalo nás, může-li učitel primární školy využít poznatků ze soutěže v širších souvislostech vzájemné pedagogické interakce a komunikace mezi učitelem a žákem, může-li realizace soutěže pomoci vytvořit atmosféru či pozitivně přispět k vytváření klimatu, které poskytují příležitost ke změněnému pohledu na edukační realitu. Odpovědi na otázku: „Jakým způsobem probíhá práce se soutěžními úlohami po ukončení soutěže?" jsme uspořádali v následující tabulce:

Tabulka 6 *Charakteristika zkoumaného souboru podle způsobu práce se soutěžními úlohami po ukončení soutěže*

Způsob práce učitele se soutěžními úlohami po skončení soutěže	**%**
Žáci s učitelem řeší společně všechny soutěžní úlohy (při nejbližší vhodné příležitosti).	37,2
Po skončení soutěže učitel se soutěžními úlohami již nepracuje.	25,7
Žáci s učitelem řeší učitelem vybrané úlohy (při nejbližší příležitosti).	20,9
Učitel opětovně zařazuje úlohy do výuky.	14,9
Žáci s učitelem řeší úlohy, které si vyberou sami žáci.	7,4
Učitel využívá soutěžních úloh mimo hodiny matematiky.	4,1
Žáci se dozvědí správné odpovědi a dále se soutěží nezabývají.	2,7

Ze zaznamenaných údajů vyplývá, že pouze čtvrtina dotázaných po skončení soutěže s úlohami již dále nepracuje (28,4 %). Pro ostatní jsou soutěžní úlohy a jejich následné řešení přímo ve vyučování nebo mimo ně – ať již se jedná o všechny úlohy nebo pouze o některé vybrané – prostředkem k dalšímu didaktickému využití.

Poslední položka dotazníku byla zaměřena na zjištění, zda výsledek žáka v soutěži má vliv na mínění učitele o žákovi (v pozitivním či negativním smyslu). 72,3 % respondentů uvádí, že výsledek žáka v soutěži neovlivňuje mínění učitele o žákovi, ale 19,6 % zohledňuje výsledek v soutěži při následné klasifikaci z matematiky.

39 V soutěžním testu v roce 2015 dosáhlo v kategorii Klokánek 35 účastníků nulového celkového bodového zisku – to znamená, že tito žáci nevyřešili správně žádnou ze 24 testových úloh.

– 3 – Výzkumná část

– 3 – 1 Projekt výzkumu

Studium teoretických pramenů k tématu publikace, tj. k problematice učebních úloh a jejich využití v matematické soutěži, se stalo východiskem pro přípravu a vlastní realizaci výzkumu. Využili jsme rovněž poznatků z výzkumného šetření zaměřeného na kvantitativní analýzu řešení nestandardních matematických učebních úloh z kategorie Klokánek, zadaných v soutěži Matematický klokan v roce 2004 (Kubátová, 2005). Porovnání výsledků předchozího výzkumu s edukační realitou související s řešením učebních úloh ve výuce matematiky a také s dalšími poznatky a zkušenostmi získanými autorkou v následujících letech při přípravě soutěžních testů v kategoriích Cvrček a Klokánek potvrzují očekávání, že analýza učebních úloh ze soutěže a jejich řešení žákem primární školy se může stát zdrojem užitečných informací pro edukační praxi. Skutečnost, že této soutěže se účastní i žáci, kteří nepatří mezi matematické talenty, považujeme za jeden z hlavních faktorů vyvolávajících zájem a příznivou odezvu žáků i učitelů. Nejde přitom, podle našeho názoru, pouze o absolutní dosažené výsledky žáků, například ve smyslu „motivace k vítězství“ – individuálního úspěchu žáka či reprezentace třídy nebo školy, i když je zřejmé, že zejména v posledních letech právě akcent na vítězství či úspěch ve třídě nebo ve škole značně sílí vzhledem ke vzrůstající popularitě soutěže, rostoucímu počtu účastníků a prestiži úspěšných řešitelů.

Na webové stránce soutěže *www.matematickyklokan.net* mají učitelé trvale k dispozici sborníky obsahující všechny soutěžní úlohy ze všech kategorií včetně řešení od roku 2004. Dosavadní zkušenosti organizátorů i učitelů na školách však ukázaly, že bohatého zdroje informací vztahujících se k průběhu a výsledkům řešení učebních úloh v soutěži Matematický klokan není v praxi základní školy stále ještě dostatečně využíváno. Brání tomu některé objektivní okolnosti, značná náročnost na čas i způsob zpracování výsledků, ale také dosavadní malá zkušenost učitelů s touto činností.

V našem novém výzkumu jsme chtěli prokázat oprávněnost uvedené teze o analýze řešení úloh v soutěžním testu jako zdroji užitečných informací, kterých by bylo možno využít v praxi základní školy. Při jeho přípravě bylo možno do určité míry využít také metodiky a výsledků již zmíněného předchozího výzkumu. Tato skutečnost významně přispěla ke zpřesnění výzkumného záměru, zaměření výzkumných otázek a hypotéz.

– 3 – 1 – 1 Cíl výzkumu, výzkumné otázky a hypotézy výzkumu

Základním cílem výzkumu je analýza souboru učebních úloh v soutěžním testu kategorie Klokánek soutěže Matematický klokan v roce 2015 a žákovských řešení testových úloh.

Dílčí cíle výzkumu:

1. Analyzovat soubor učebních úloh v české verzi soutěžního testu v kategorii Klokánek v roce 2015.
2. Stanovit míru úspěšnosti řešení jednotlivých učebních úloh a celkového výsledku žáků 4. a 5. ročníků ZŠ.
3. Zjistit, zda výsledek žáka je ovlivněn intervenujícími faktory, vztahujícími se k osobnosti žáka a k charakteru učebních úloh.

Řešení soutěžních úloh žákem lze považovat za pedagogický jev, který má charakter krátkodobé události, probíhající v daných podmínkách a v daném časově vymezeném úseku. Ve struktuře tohoto jevu jsme vyčlenili tři komponenty, umožňující následnou analýzu směřující k dosažení stanoveného cíle výzkumu:

- osobnost žáka primární školy, popsanou množinou identifikačních znaků, považujeme za nezávisle proměnnou,
- výkon žáka v soutěžním testu, jehož projevem je reálný výsledek dosažený při řešení souboru 24 matematických učebních úloh, považujeme za závisle proměnnou,
- komplex konkrétních podmínek a okolností, za kterých bylo výsledku dosaženo a jež ovlivnily výkon žáka ze tří hledisek:
  a) souborem matematických učebních úloh zadaných k řešení v soutěžním testu,
  b) výukovým stylem učitele/učitelky (jeho konkrétním projevem je například komentář v průběhu řešení úloh),
  c) prostředím, v němž se koncentruje komplex situačních vlivů.

Aspekty uvedené pod body b) a c) jsou v našem výzkumu registrovány, ale nejsou zjišťovány a měřeny.

Výzkum jsme zaměřili na soustavu vzájemně provázaných výzkumných otázek a výzkumných hypotéz směřujících k dosažení stanovených cílů.

Byly formulovány následující výzkumné otázky:

VO_1: Jakých výsledků vyjádřených absolutním bodovým ziskem dosáhli žáci v soutěžním testu?

VO_2: Závisí výsledek žáků na typu a charakteru úloh v soutěžním testu?

VO_3: Jsou výsledky žáků v testu ovlivněny jejich osobnostními charakteristikami?

Hypotézy výzkumu:

H_{21}: Jednotlivé soutěžní úlohy jsou řešeny s různou mírou úspěšnosti. Úlohy ohodnocené 3 body jsou řešeny nejúspěšněji, úlohy ohodnocené 5 body jsou řešeny nejméně úspěšně.

H_{22}: Úspěšnost řešení úloh je ovlivněna jejich matematickým obsahem a tématem učiva, ze kterého jsou zvoleny.

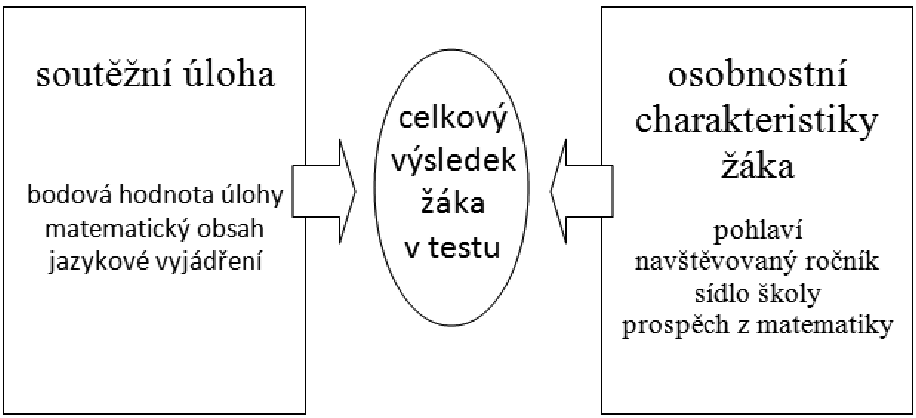
H_{23}: Slovní (kontextové) úlohy mají nižší úspěšnost řešení než úlohy čistě matematické, zadané v matematickém jazyce.

H_{31}: Žáci 5. ročníku dosahují při řešení stejných soutěžních úloh lepších výsledků než žáci 4. ročníku.

H_{32}: Výsledky žáků stejného ročníku nezávisí na pohlaví.

H_{33}: Žáci z městských škol dosahují v soutěži stejných výsledků jako žáci z venkovských škol.

H_{34}: Výsledky žáků v soutěži odpovídají jejich školnímu prospěchu z matematiky. Nejlepších výsledků dosahují žáci klasifikovaní výborně, nejslabších výsledků dosahují žáci klasifikovaní dobře a dostatečně.



Obrázek 12 *Sledované faktory, potencionálně intervenující do výsledku žáka v testu*

– 3 – 1 – 2 Charakteristika zkoumaného souboru žáků a podmínek výzkumu

Výzkum se uskutečnil na vzorku žáků 4. a 5. ročníku ZŠ, kteří na 15 školách České republiky dne 20. 3. 2015 absolvovali soutěžní test v kategorii Klokánek. Celkový počet činil 680 žáků.

Z daného počtu bylo 341 žáků 4. ročníku, 339 žáků 5. ročníku, 328 chlapců, 352 dívek, 505 žáků navštěvovalo některou z městských škol, 175 školy vesnické. S prospěchem výborným bylo 311 žáků, s chvalitebným 265, s dobrým 86 a s dostatečným 18 žáků.

Výzkum byl prováděn na:

- 9 školách Olomouckého kraje – 4 školy ve městech s počtem obyvatel větším než 20 000 a 5 škol vesnických, z toho 1 malotřídní. Jedna z městských škol disponuje třídami s rozšířenou výukou matematiky,
- 2 školách Zlínského kraje – jedna městská a 1 vesnická malotřídní,
- 2 školách Jihomoravského kraje – 1 městská, 1 vesnická plně organizovaná,
- 1 škole Kraje Vysočina se sídlem ve městě,
- 1 škole Středočeského kraje se sídlem ve městě.

V roce 2015 se soutěž Matematický klokan uskutečnila v pátek, 20. března. Rozmístění žáků v učebně bylo ponecháno na uvážení konkrétní situace pedagogem, vždy se však dbalo na zajištění objektivity testování. Organizační práci – manipulaci s rozdáním zadání testu a odpovědních karet, jejich odevzdáním po skončení práce a dalším organizačním pokynům – bylo věnováno přibližně 15 minut, samostatnému řešení úloh žáky 60 minut čistého času. Žáci obdrželi informace o celkové organizaci soutěže včetně jejích pravidel.

Soutěžící své odpovědi zapisovali do karty odpovědí zatržením jedné z 5 nabízených možností. V průběhu řešení nebylo dovoleno užívat kalkulátoru, tabulek ani jiné literatury. Naopak žáci mohli využít pomocné papíry pro záznam vlastních písemných poznámek, náčrtků, nákresů, dílčích výpočtů. Způsob případných oprav v kartě odpovědí závisel na dohodě zadavatele (vyučujícího) a soutěžících. Po skončení soutěže učitelé opravili výsledky testů ve své třídě a výsledky předali k následnému administrativnímu zpracování.

Pravidla soutěže pro kategorie
Klokánek, Benjamín a Kadet

Milý soutěžící,

v následujících 60 minutách Tě čeká stejný úkol, jaký má právě v tento okamžik spousta Tvých vrstevníků v mnoha zemích světa.

Tvým úkolem je v Kartě odpovědí vybrat a křížkem označit vždy jen jednu odpověď, kterou pokládáš za správnou. Pokud odpovíš správně, přidělím Ti za otázku 1. - 8. 3 body, za otázku 9. - 16. body 4 a za otázku 17. - 24. obdržíš 5 bodů. Za neřešenou úlohu nezískáš ani neztratíš žádný bod. Jestliže odpovíš chybně, přijdeš o 1 bod. Na začátek Ti přiděluji 24 bodů, takže můžeš získat maximálně 120 bodů.

Při řešení úloh nesmíš používat kalkulačky ani tabulky.

Přeji Ti hodně štěstí

Tvůj Klokan

KARTA ODPOVĚDÍ

3 body

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

4 body

	A	B	C	D	E
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					

5 bodů

	A	B	C	D	E
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

Kategorie: ____________________________

Jméno: ______________________________

Příjmení:____________________________

Třída: ____________

Získal(a) celkem _______ **bodů.** *(Vyplní učitel(ka))*

Obrázek 13 ***Karta odpovědí účastníka soutěže***

– 3 – 1 – 3 Charakteristika soutěžních úloh

– 3 – 1 – 3 – 1 Soutěžní úlohy z kategorie Klokánek v roce 2015, jejich řešení a didaktická analýza

V kapitole se pokusíme o charakteristiku soutěžních úloh z kategorie Klokánek (*Ėcolier*), které byly zadány v testu v roce 2015. Zaměříme se především na následující hlediska:

- úplná autorská řešení úloh[40], případné očekávané zdroje chybných řešení a dosažená úspěšnost na vzorku respondentů,
- ukázky vybraných žákovských záznamů řešení,
- předpokládané znalosti a kompetence žáků potřebné k řešení úlohy ve vztahu k rozvoji očekávaných výstupů RVP ZV[41],
- metodický komentář včetně možnosti dalšího využití úlohy v mimosoutěžních aktivitách,
- mezipředmětové vztahy, nabízející se především ve slovních úlohách, případně možnosti dalších přesahů úlohy.

Test v našem výzkumu můžeme považovat za:

- kvazistandardizovaný: Chráska jím rozumí „test, který je připraven dokonaleji, než testy učitelské, u něhož ale standardizace nebyla provedena beze zbytku. Konstrukci těchto testů bývá většinou věnována větší pozornost než u testů nestandardizovaných, bývají známy některé jejich vlastnosti a někdy bývají k dispozici i standardy pro hodnocení testových výsledků“ (2007, s. 186),
- kognitivní – měří úroveň (kvalitu) poznání u žáků. Chráska (2007) uvádí jako příklad kognitivního testu takový, ve kterém má žák řešit úlohy z matematiky,
- rozlišující (test relativního výkonu), označovaný (Chráska, 2007) za test statisticko-normativní (*norm-referenced test*). Výkon žáka v tomto typu testu je srovnáván s výkony ostatních žáků,
- objektivně skórovatelný – obsahuje úlohy, u nichž lze objektivně rozhodnout, zda byly řešeny správně či nikoliv.

Reliabilita soutěžního testu byla zjišťována pomocí dvou procedur:

- standardně vypočteného koeficientu Cronbachova alfa (Zvára, 2002), který dosáhl hodnoty $\alpha = 0{,}6919$. Jak však autor uvádí, je třeba k tomuto typu dat přistupovat opatrně a zvážit alternativní metody pro měření reliability, např. logistické C. alfa. To však v našem případě opět nevyšlo příliš rozdílně ($\alpha = 0{,}712052$),

— — —

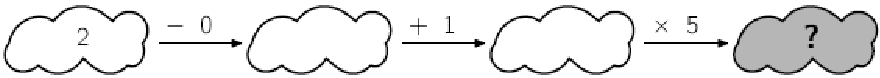
40 Uvedený postup řešení nemusí být jediný možný, pokoušíme se popsat především takový, kterým disponuje žák primární školy. Vycházíme ze Shulmanova konceptu didaktické znalosti obsahu ve smyslu učitelovy znalosti, kterou uplatní, pokud učí žáka nebo anticipuje řešení žáka.

41 U jednotlivých úloh explicitně uvádíme očekávaný výstup RVP ZV, resp. indikátor, který úloha testuje (Standardy vzdělávání Matematika), ale i obecnější schopnosti a předpoklady řešitele. Jednotlivé očekávané výstupy a indikátory jsme byli nuceni mírně upravit (zestručnit, sloučit, event. rozdělit).

- výpočet reliability s využitím Kuderova-Richardsonova vztahu poskytl hodnotu velmi blízkou α = 0,7182, což je stupeň reliability pro didaktický test zcela přijatelný (Chráska, 2007, s. 200).

Všechny úlohy jsou zadány jako uzavřené s vícenásobnou volbou (*multiple--choice*), s nabídkou 5 odpovědí. Všechny úlohy jsou zadány tak, aby měly jediné správné řešení.

3 body

1. 

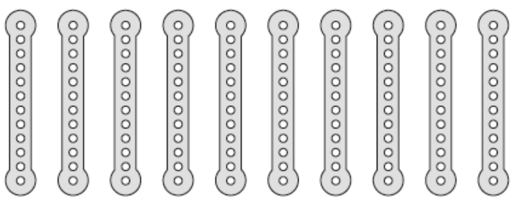
A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 15

Očekávaný výstup	Indikátor
žák provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly	*žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky*

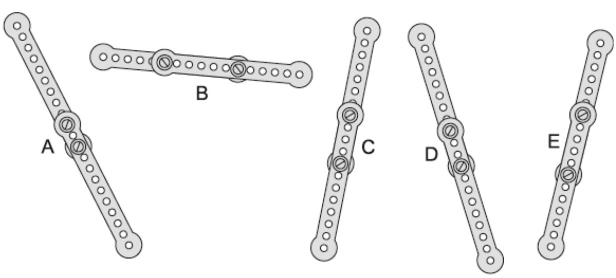
Startovací úlohu s předpokládanou vysokou úspěšností řešení je možné (mimo soutěž) zadat také jako úlohu otevřenou bez nabídky odpovědí. Její zadání využívá grafického znázornění, které má charakter žákům známé podoby „početního řetězce“. Šipka zde vyjadřuje přirozené číslo ve významu operátoru: odečti 0, přičti 1, vynásob pěti: 2 − 0 + 1 × 5 = 15. Úlohu lze řešit zpaměti, kromě základních počtářských dovedností nepředpokládá řešení další znalosti.

Určitý problém se může vyskytnout s užitým symbolem násobení „×“, v učebnicích je obvyklejší symbol „·“. Úloha byla řešena s úspěšností 92,4 %, dosáhla nejlepšího výsledku ze všech úloh v testu.

2. *Eda měl 10 stejných kovových dílků stavebnice.*



Spojil vždy dva dílky a vytvořil pět nových. Který z nových dílků je nejdelší?



A) A
B) B
C) C
D) D
E) E

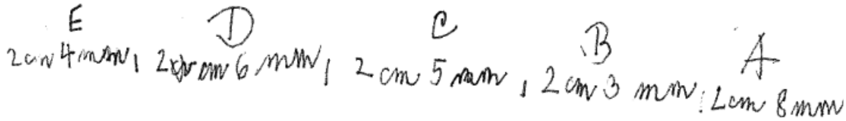
Očekávaný výstup

žák porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky

Indikátor

žák graficky sčítá, odčítá a porovnává úsečky

Úloha využívá dětských zkušeností s manipulativními činnostmi při práci se stavebnicí (například Merkur). Zatímco původní jednotlivé dílky stavebnice jsou stejné, nové spojené dílky mají délku různou. Slovo *nejdelší* v otázce úlohy vede k řešení založenému na skutečném změření délek jednotlivých spojených dílků:



Obrázek 14 ***Ukázka žákovského řešení opírajícího se o změření délek***

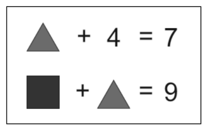
Odhad délek jednotlivých spojených dílků lze ověřit počtem otvorů mezi dvěma spojovacími šroubky – menší počet otvorů (tj. menší vzdálenost mezi spoji) dává delší spojený dílek: v případě správného řešení A) je mezi šroubky pouze jeden otvor, ve všech ostatních případech je počet otvorů mezi šroubky větší. Úloha je vhodná k následné diskusi, směřující k objevení souvislosti mezi délkou spojeného dílku stavebnice a počtem otvorů mezi dvěma spojovacími šrouby.

V edukační praxi lze použít i přeformulované zadání úlohy: seřaď spojené dílky podle jejich délky vzestupně – řešení: B), E), C), D), A) – nebo sestupně – řešení: A), D), C), E), B).

Úloha byla řešena s vysokou úspěšností – 87,5 %.

3. Které číslo se skrývá za čtvercem?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



Očekávaný výstup

žák provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly

žák čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti

Indikátor

žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta

Úloha má charakter soustavy jednoduchých lineárních rovnic se dvěma neznámými (trojúhelník, čtverec), je propedeutikou algebry. V praxi matematické výuky v primární škole se úlohy uvedeného typu řeší metodou „pokus–omyl“, resp. systematickým experimentováním, založeným na postupném dosazování čísel za neznámé. Řešení lze popsat ve dvou krocích: z první rovnice se určí číslo, kterým lze nahradit trojúhelník (7 − 4 = 3), po dosazení do druhé: □ + 3 = 9 se vypočítá 9 − 3 = 6. Správné řešení je E).

Zadání lze modifikovat různými způsoby:

a) zadat jako úlohu otevřenou bez nabídky odpovědí,

b) oddělit jednotlivé rovnice a přeformulovat zadání, například:
Myslím si číslo. Když k němu přičtu 4, dostanu 7. Které číslo si myslím?

Která dvě čísla dávají součet 9? Mohou to být stejná čísla?

Změní se skrytá čísla, pokud zvětšíme nebo zmenšíme některé ze zadaných čísel třeba o 1? Například $\Delta + 5 = 7$ nebo $\Delta + 5 = 8$, případně $\Delta + 3 = 7$ nebo $\Delta + 5 = 6$. Změní se vždy skrytá čísla?

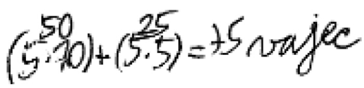
Uvedená zadání poskytují možnost využití úlohy již od nejnižších ročníků ZŠ. Úloha se ukázala být podstatně obtížnější, správně ji vyřešilo pouze 49,3 % žáků.

4. Pan Zahradník má 10 slepic. 5 slepic snáší vejce každý den a dalších 5 slepic snáší vejce každý druhý den. Kolik vajec snesou všechny slepice za 10 dní?

A) 75 B) 60 C) 50 D) 25 E) 10

Očekávaný výstup	Indikátor
žák používá přirozená čísla k modelování reálných situací	*žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)*
žák řeší úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v oboru přirozených čísel	*žák vyhledá v textu jednoduché úlohy potřebné údaje a vztahy*
	žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky

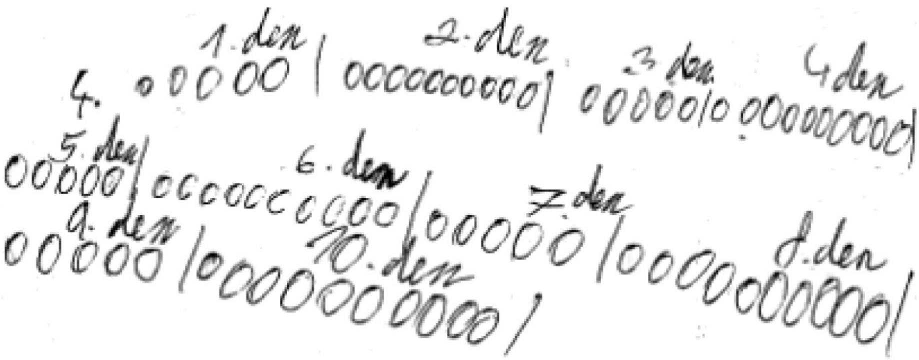
Správné řešení složené slovní úlohy předpokládá orientaci v zadání a porozumění jednotlivým zde obsaženým informacím: některá slepice snáší vejce každý den (tj. za 10 dní snese 10 vajec), některá snáší každý druhý den (tj. za 10 dní snese 5 vajec). Ty, které snášejí denně, snesou za 10 dní $5 \cdot 10 = 50$, ty, které snášejí každý druhý den, snesou $5 \cdot 5 = 25$. Celkem snesou slepice 50 vajec + 25 vajec = = 75 vajec. Správné řešení je A).



Obrázek 15 ***Záznam správného žákovského řešení numerickým zápisem***[42]

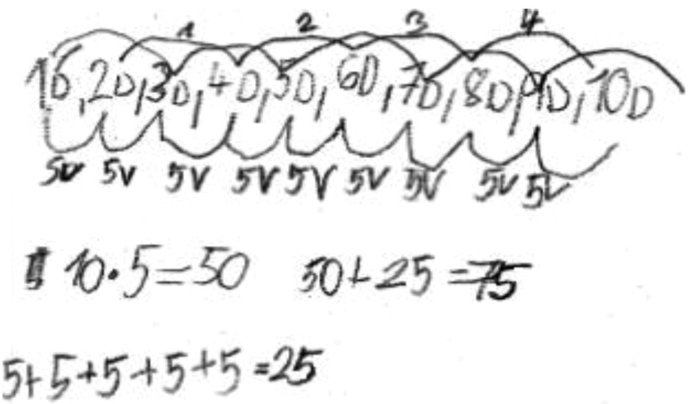
Řešení může být podporováno různou podobou grafického zpracování. Na následující ukázce se jedná o grafické řešení – počet snesených vajec určí žák ze znázornění:

42 K vyznačení výsledků dílčích výpočtů nad závorku mívají učitelé výhrady.



Obrázek 16 ***Znázornění vedoucí ke správnému grafickému řešení***

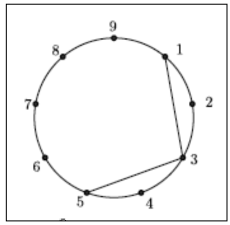
Ve druhé ukázce je zpracována informace ze zadání obecněji. Spodní obloučky vedené mezi každými dvěma sousedními dny znázorňují počty vajec snesených slepicemi, které snáší vejce každý den. Horní obloučky znázorňují počty vajec snesených slepicemi, jež snáší vejce každý druhý den. V zápise vidíme horní obloučky dvakrát. Žák se zabýval možností, zda řešení ovlivní skutečnost, že slepice, které snášejí vejce každý druhý den, začnou snášet první či až druhý den.

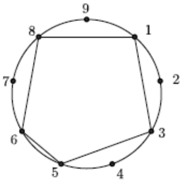


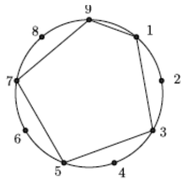
Obrázek 17 ***Záznam Zbyňkova úsudku i numerického výpočtu***

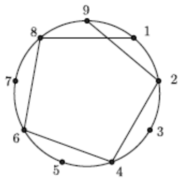
Vlastní výpočet není obtížný, vyžaduje pouze znalost sčítání v oboru čísel do 100. Obtížnost úlohy lze zvýšit zadáním bez nabídky odpovědí – transformací na otevřenou úlohu do podoby na 1. stupni ZŠ obvyklejší. Kontextová stránka úlohy poskytuje prostor pro uplatnění mezipředmětových vztahů s přírodovědou a vlastivědou (oblast RVP *Člověk a jeho svět*) v různých souvislostech, například posuzovat reálnost úlohové situace (snůška vajec u slepic chovaných v přirozeném venkovském prostředí v různých obdobích roku, „výroba“ vajec ve velkochovech, cena vajec v obchodech…). Úloha byla řešena s úspěšností 64,4 %.

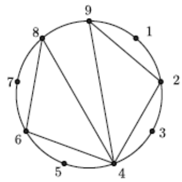
5. *Martina spojovala každou druhou tečku na kružnici (podívej se na obrázek), dokud neskončila u čísla 1. Který obrázek vytvořila?*

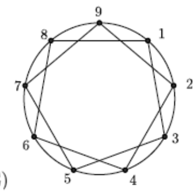



A)


B)


C)

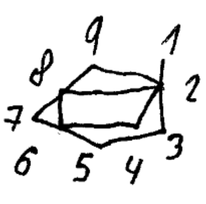

D)

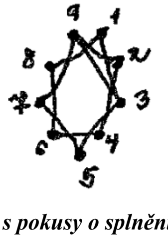

E)

Očekávaný výstup	Indikátor
žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel	*žák rozezná základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnice)*
žák načrtne a sestrojí rovinné útvary	*žák načrtne rovinný útvar podle slovního zadání*

Žák pokračuje v řadě (čísel a jejich obrazů – bodů na kružnici) podle daného vzoru a aplikuje pravidlo, podle kterého je řada utvořena. Správné řešení – uzavřená lomená čára vyjádřená obrázkem E) – dává vzniknout „hvězdicovému devítiúhelníku“, který je popsán konečnou číselnou posloupností 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 1. Tento devítiúhelník lze nakreslit jedním tahem (všechny členy posloupnosti kromě prvního a posledního jsou navzájem různé), jde o poměrně často frekventovanou úlohu označovanou jako „jednotažka“. Úloha tak nabízí možnost kreslit další různé jednotažky podle zadání v učebnicích nebo sbírkách úloh a rozhodovat, kterou čáru lze či nelze nakreslit jedním tahem. Předpokladem správného řešení je znalost pojmu *kružnice*, *body na kružnici*, příp. *lomená čára*, a porozumění formulaci „… každou druhou tečku na kružnici“.

Žákovská řešení se opírala o grafické zpracování formulace „… každou druhou tečku na kružnici“ buď v obrázku zadání, nebo ve vlastním náčrtku žáka:

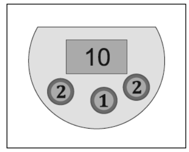




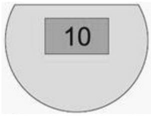
Obrázek 18 ***Náčrtky žáků s pokusy o splnění podmínek úlohy jedním tahem***

Znázornění žákům do určité míry připomíná „násobilkové n-úhelníky“, kdy spojují vždy cifru na místě jednotek dvou po sobě jdoucích násobků daného čísla (např. sudá čísla, násobky dvou: 2, 4, 6, 8…). Mohou tak nejen procvičit násobilkové spoje, ale i sledovat různé pravidelnosti v řadě násobků. Správné řešení vykazuje 43,8 % řešitelů.

6. Lucka jela do Rakouska, kde šla nakupovat. V peněžence měla tyto peníze (podívej se vpravo). V obchodě zaplatila 7 euro za míč. Kolik peněz jí zbylo?

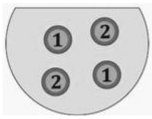


A)



B)

C)



D)

E)

Očekávaný výstup

žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace

Indikátor

žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)

žák provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly

Sémantické pozadí slovní úlohy – ceny zboží a placení za nakoupené zboží – je jako námět slovních úloh na 1. stupni ZŠ časté. Řešení lze popsat ve třech krocích: ze zadání na obrázku je třeba přečíst, kolik euro měla Lucka v peněžence (10 + 2 + 1 + 2 = 15), následně výpočtem zjistit, kolik jí zbylo po nákupu (15 − 7 = 8), a na jednotlivých obrázcích s nabídkou odpovědi vybrat tu peněženku, v níž je 8 euro. Vlastní aritmetické řešení není obtížné, jde o sčítání a odčítání zpaměti v oboru čísel do 20, nestandardní povaha úlohy je dána spíše potřebou transformace vizualizace peněžních hodnot v jednotlivých obrázcích, numerického vyjádření a konfrontace s dětem známou realitou.

Právě určitým nesouladem postupu aritmetického řešení s realitou nakupování interpretujeme neočekávaně nízkou úspěšnost řešení (42,2 % je nejnižší ze skupiny tříbodových úloh): Lucka v peněžence vidí, že v drobnějších mincích má celkem pouze 5 euro, což jí nestačí. Proto musí rozměnit minci v hodnotě 10 euro. Z ní zaplatí 7 euro a vrácený zbytek (2 + 1 nebo 1 + 1 + 1) přidá ke zbylým mincím v peněžence.

V žádné z nabídnutých odpovědí se však uvedené hodnoty mincí neobjevují. Mohla by tedy zaplatit tak, že dala 10 + 2 eura, vráceno dostala 5 euro. Zbylo jí 5 + 2 + 1 euro, odpověď B).

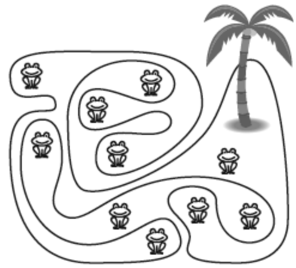
Kontextová stránka úlohy umožňuje:

- uplatnit znalosti české peněžní soustavy, například:
  V jakých mincích můžeme mít obnos 15 Kč? a dále rozvinout úlohy typu:

Tatínek má v peněžence dvacetikorunu a stokorunu. Eliška má do školy přinést 70 korun. Jak si tatínek peníze rozmění, když chce, aby mu zůstalo co nejméně drobných? (Děti nosí do školy peníze přesně připravené, aby nenastaly problémy s vracením mincí.),
- přesah do učiva vlastivědy (Rakousko, euro), diskusi žáků o vlastních zkušenostech z cestování do zahraničí spojených s placením v cizí měně.

7. *Na obrázku je ostrov s podivně členitým pobřežím. Roste na něm palma a sedí na něm několik žabek. Kolik žabek sedí na ostrově?*

   A) 5
   B) 6
   C) 7
   D) 8
   E) 9



Očekávaný výstup

žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary; nachází v realitě jejich reprezentaci

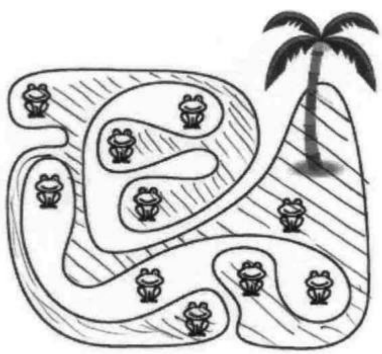
žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Indikátor

žák využívá základní pojmy užívané v rovinné geometrii (čáry: křivá, lomená, přímá)

žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)

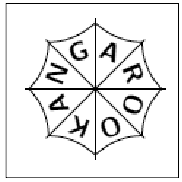
Úloha vyžaduje postřeh, pozornost a geometrickou představivost, je propedeutikou topologických pojmů (uvnitř, vně). Podstatná je informace „roste na něm palma“. To umožňuje ostrov vybarvit, což může také umožnit lepší porozumění formulaci „členité pobřeží“. Vybarvení ostrova vede k odlišení 6 žabek na ostrově od 4 zbývajících. Správné řešení je B).

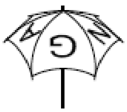
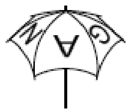


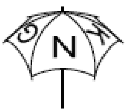
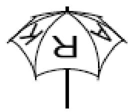
Obrázek 19 ***Správné řešení využívající vyšrafování ostrova***

Úloha není „kognitivně“ náročná. Rozhodující pro úspěšnost řešení je zvolení vhodného způsobu vyjádření plochy ostrova. Pokud by žák volil celé vybarvení ostrova pastelkou či šrafováním, jak je uvedeno na obrázku, snadno se zorientuje v počtu žabek sedících na ostrově. Protože žáci často vyhodnotili úlohu jako jednoduchou, volili si většinou pro určení ostrova pouze pohyb prstem. Takový postup je pro identifikaci žabek na ostrově náročnější, vede k větší chybovosti. Za zásadní považujeme tedy pečlivost při řešení: zda žák vyhodnotí úlohu jako náročnou, predikuje svoje schopnosti a volí adekvátní formu záznamu. Úloha byla řešena s vysokou úspěšností – 65,6 %. Přesah do vlastivědy: ostrovy a ostrovní státy v různých částech světa, práce s mapou, případně vlastní zkušenosti dětí s cestováním.

8. *Na svém deštníku mám napsáno slovo KANGAROO (podívej se na obrázek). Najdi obrázek mého deštníku.*



A)  *B)* 

C)  *D)*  *E)* 

Očekávaný výstup

žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Indikátor

žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)

Úloha vyžaduje postřeh, pozornost a geometrickou představivost. Pohled na deštník shora – na obrázku v zadání úlohy – umožní určit správné řešení A) a eliminovat nesprávné distraktory:

- B) – písmena GAN jsou sice na deštníku při pohledu shora umístěna vedle sebe, ale v jiném pořadí než ve slově KANGAROO,
- C), D), E) – písmena KNG, ARK, RAG spolu ve slově KANGAROO nesousedí.

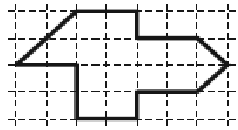
Využije se znalostí anglického jazyka: zadání úlohy obsahuje slovo „kangaroo“ – proč asi?

Úspěšnost řešení – 60,1 %.

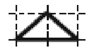
4 body

9. *Zuzka chce rozstříhat tvar na obrázku 1 na stejné trojúhelníky (podívej se na obrázek 2). Kolik takových trojúhelníků dostane?*

   A) 8
   B) 12
   C) 14
   D) 15
   E) 16



obrázek 1



obrázek 2

Očekávaný výstup

žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary

žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

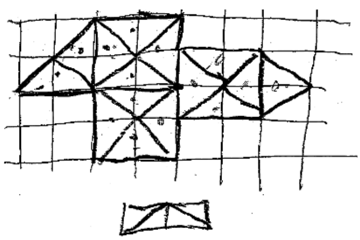
Indikátor

žák určí pomocí čtvercové sítě obsah rovinného útvaru, který lze složit ze čtverců, obdélníků a trojúhelníků

žák porovnává pomocí čtvercové sítě obsahy rovinných útvarů

Řešení náročnější geometrické úlohy vyžaduje představivost, využívá znalosti žáků o znázornění rovinných obrazců (v našem případě nekonvexního n-úhelníku, n = 11) ve čtvercové síti o dané jednotce. Primárně se však nejedná o zjištění obsahu obrazce, jeho vyjádření číslem. Z obrázku 2 je zřejmé, že obsah trojúhelníku se rovná obsahu jednoho čtverce sítě. Protože obsah mnohoúhelníku na obrázku 1 se rovná 15 čtvercům sítě, můžeme dostat 15 malých trojúhelníků. Správné řešení je D).

Úlohu lze řešit graficky, když budeme reprodukovat stříhání vyznačením linie střihu po stranách a úhlopříčkách čtverců vyznačené barevně nebo tučně a vhodně tím rozdělíme n-úhelník na trojúhelníky z obrázku 2. U respondentů našeho výzkumu uvedený způsob významně převažoval. Úspěšnost řešení dosáhla pouze 16,8 %.



Obrázek 20 ***Ukázka správného řešení založeného na evidenci počtu trojúhelníků pomocí teček***

Nepřesnost při vyznačování trojúhelníků či jejich evidenci vede k chybnému řešení. S úlohou můžeme opět pracovat různým způsobem. Předložit ji bez nabídky řešení (otevřená úloha) nebo podněcovat žáky v samostatné formulaci úloh na dané téma. Zadání můžeme například změnit následujícím způsobem: Existuje tvar, který nelze rozstříhat na stejné trojúhelníky? Otvírá se tímto prostor pro úlohy divergentního charakteru i pro úlohy zaměřené na *tesalace* (vyplnění roviny pomocí jednoho nebo více geometrických útvarů, bez překrývání a bez mezer).

10. Leoš měl 7 jablek a 2 banány. Dal 2 jablka Janě. Ta mu na oplátku dala několik banánů. Leoš měl potom stejně jablek jako banánů. Kolik banánů dala Jana Leošovi?

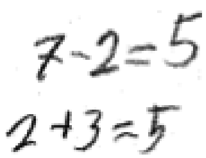
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

Očekávaný výstup	Indikátor
žák používá přirozená čísla k modelování reálných situací	*žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)*
žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v oboru přirozených čísel	*žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky*
	žák čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti

Složená slovní úloha, jejíž řešení vyžaduje čtenářskou gramotnost, porozumění textu, významu pro řešení úlohy relevantních termínů (… dala *několik* banánů, … měl potom *stejně* jablek jako banánů) a logický úsudek. Úsudek směřující ke správnému řešení lze popsat například takto:

Leoš měl původně 7 j + 2 b, dal 2 j, zůstalo mu 5 j + 2 b. Aby měl stejně jablek jako banánů, musel dostat od Jany 3 banány. Potom měl 5 jablek a 5 banánů. Správné řešení je B).

Uvedené řešení vystihuje následující zápis. Protože se však jedná o vlastní žákovské poznámky k řešení, je třeba si domyslet, že první zápis vyjadřuje počty jablek, druhý řádek banánů.



Obrázek 21 ***Záznam numerického výpočtu Radky***

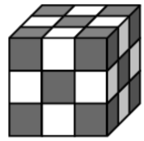
Graficky by bylo možné úlohu řešit s oporou znázornění (grafické řešení však u respondentů našeho výzkumu nebylo vůbec využito). Domníváme se, že je to spíš postup blízký „vysvětlování“ učitelem či aplikovaný při řešení slovních úloh v nižších ročnících:

jablka: ○ ○ ○ ○ ○ ∅ ∅

banány: □ □ ■ ■ ■

Zadání úlohy připomíná známou dětskou říkanku-hádanku: „Měla babka čtyři jabka a dědoušek jen dvě. Dej mi, babko, jedno jabko, budeme mít stejně.“ Úloha byla řešena s vysokou úspěšností – 71,5 % – významně nejvyšší ve skupině čtyřbodových úloh. Charakter úlohy je velmi blízký slovním úlohám vyskytujícím se často v českých učebnicích.

11. Jarda slepil z bílých a černých krychliček krychli (podívej se na obrázek). Nikdy k sobě nepřilepil dvě krychličky stejné barvy. Kolik je v krychli bílých krychliček?

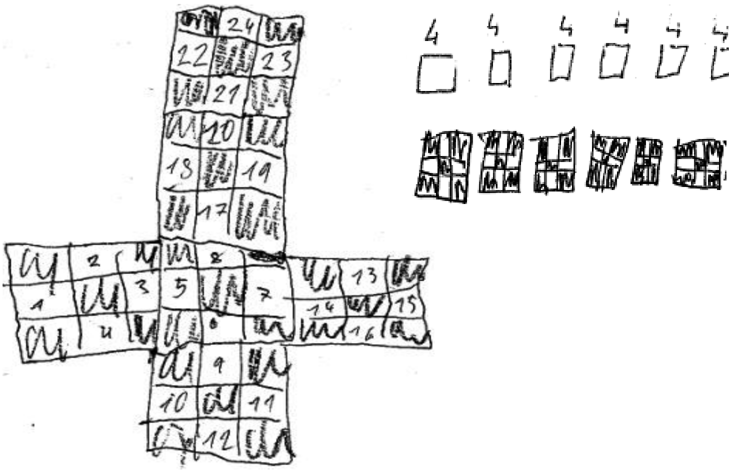


A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Očekávaný výstup	Indikátor
žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti	*žák rozpozná mnohostěny (krychle, kvádr, kolmý hranol, jehlan)*
	žák rozpozná, z jakých základních těles je zobrazené těleso složeno

Řešení vyžaduje prostorovou představivost, alespoň intuitivní znalost pojmu krychle, jejích prvků a vlastností (vrchol, stěna). Podstatné je respektování podmínky zadání – „… nikdy k sobě nepřilepil krychličky stejné barvy“. Velká krychle obsahuje celkem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ krychliček. Protože v každém z 8 vrcholů je černá krychle (viz obrázek), je v první a třetí „vrstvě“ vždy 5 černých a 4 bílé, v prostřední „vrstvě“ 4 černé a 5 bílých krychliček. Bílých je $4 + 5 + 4 = 13$, černých $5 + 4 + 5 = 14$. Správné řešení je C).

Úloha rozvíjí ideu typické úlohy geometrie 1. stupně ZŠ – stavby z krychlí. Situaci si mohou následně po skončení soutěže žáci sami vymodelovat pomocí krychlí dvou barev podle podmínek zadání a přesvědčit se tak o správnosti řešení. Úloha dosáhla velmi nízké úspěšnosti řešení – 12,9 % je nejméně ze skupiny čtyřbodových úloh. Uvedenou skutečnost interpretujeme na základě poznámek žáků a jejich znázornění. Hlavní úskalí a obtíž spočívá v jejich vnímání úlohy. Nezabývají se počtem *bílých krychliček* v krychli, ale počtem *bílých čtverečků* na stěnách krychle. K tomuto vyjádření využívají různých způsobů záznamu:

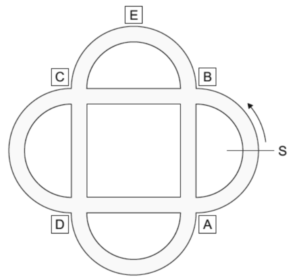


Obrázek 22 ***Různé pokusy o záznam bílých čtverečků na stěnách krychle***

K rozvoji aktivit tohoto charakteru může sloužit „soma kostka“[43].

12. Petr jezdí na kole po cyklostezce v parku (podívej se na obrázek). Vyjel z místa S směrem, který ukazuje šipka. Na první křižovatce zabočil doprava, na druhé doleva, na další doprava, pak doleva. Kterým místem neprojel?

A) A B) B C) C D) D E) E



Očekávaný výstup	Indikátor
žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky	*žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)*

Obrázek tvoří nedílnou součást zadání úlohy, která připomíná hledání cest v labyrintu. Řešení předpokládá správné čtení údajů v obrázku, pravolevou orientaci v rovině – znalost pojmu doprava, doleva, koncentraci pozornosti a respektování podmínek zadání. „Projížďku cyklostezkou“ lze vhodně znázornit tužkou. Vyjedeme-li z místa označeného S ve směru šipky, projedeme křižovatkou označenou B doprava, místem E, na další křižovatce označené C doleva, vrátíme se na křižovatku B, zabočíme doprava ke křižovatce A. Neprojeli jsme křižovatkou D.

———

43 *Soma kostka* je jakousi prostorovou obdobou tangramu. Také je složena ze sedmi dílů, z nichž se dá sestavit neuvěřitelné množství staveb, má však mnohem kratší historii, vznikla či byla objevena až v roce 1936.

Zdrojem případného chybného řešení může být nerespektování směru vyznačeného šipkou nebo nesprávného vyhodnocení směru jízdy (ne vzhledem k pozici cyklisty, ale pozici řešitele). Žáci nevyužívali možnosti pohybovat/otáčet plánkem trasy.

Za vhodný přesah úlohy může být považována situace realizovaná na dopravním hřišti, bezpečnost silničního provozu, ale také různorodá práce s mapou. Úloha byla řešena s nízkou úspěšností – 25,6 %.

13. U lyžařského vleku čekalo v řadě 10 lyžařů. Před Tomášem jich stálo o 3 méně než za ním. Kolikátý v řadě byl Tomáš?

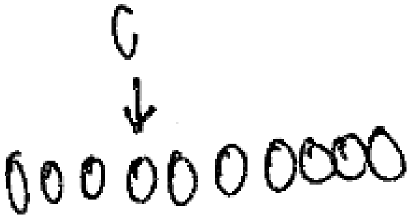
A) 1. B) 3. C) 4. D) 6. E) 7.

Očekávaný výstup	Indikátor
žák používá přirozená čísla k modelování reálných situací	*žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)*
žák užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose	*žák užívá polohové vztahy („hned před“, „hned za“) v oboru přirozených čísel*
žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace	*žák se orientuje na číselné ose a jejích úsecích*
	žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky
	žák čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti

Jedná se o slovní úlohu se sportovní či rekreační tematikou. K určení správného řešení C) – Tomáš stál v řadě jako čtvrtý, před ním čekali 3, za ním 6 lyžařů – je možné využít grafické znázornění, resp. grafické řešení. Postupně lze vyznačovat možné pořadí při dodržení podmínky „… před ním o 3 méně než za ním“, tzn. že za ním stálo o tři více lyžařů než před ním. V řadě 1., 2., 3., **4.**, 5., 6., 7., 8., 9., 10. pouze v pořadí 4. lyžař splňuje podmínku zadání.

Uzavřená úloha umožňuje „vyzkoušet“ jednotlivá nabídnutá řešení a postupně vyloučit ta, která nesplňují podmínku zadání: kdyby stál například první, bylo by za ním 9 osob, před ním žádná, kdyby stál 3., byli by před ním 2, za ním 7, atd. – v těchto případech není splněna podmínka zadání. Úlohu správně vyřešilo 44,6 % žáků.

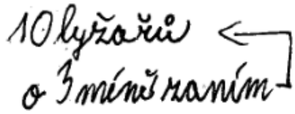
Z ukázek žákovských grafických záznamů je zřejmé, že pro zpracování a z něj vyplývající grafické řešení není důležitá orientace řady lyžařů, tedy směr fronty na vlek.



Obrázek 23 ***Znázornění, na němž nejblíže vleku je první zleva, písmeno C vyjadřuje pozici Tomáše***

Obrázek 24 ***Znázornění, na němž nejblíže vleku je postava vpravo***

Obrázek 25 ***Znázornění, na němž nejblíže vleku je kroužek nahoře, Tomáš je znázorněn jako tmavá tečka***



Obrázek 26 ***Honzův nesprávný záznam zadání úlohy***

14. *Na obrázku vidíš 5 berušek. Kamarádí spolu berušky, jejichž počet teček se liší o jednu. Každá beruška poslala SMS zprávu své kamarádce. Kolik SMS zpráv berušky odeslaly?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Očekávaný výstup

žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

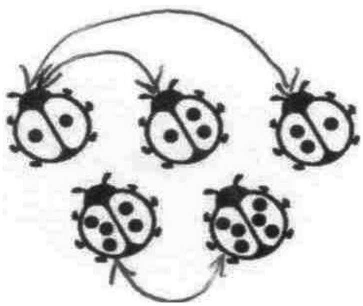
Indikátor

žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)

žák čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti

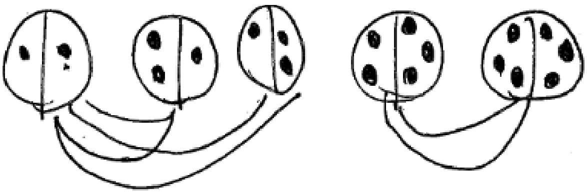
Slovní úloha má kombinatorický charakter, nepředpokládá žádné předběžné matematické znalosti. Řešení se opírá o experiment, který však vyžaduje systematický postup s vhodným písemným či grafickým záznamem: zaslání SMS například vyznačíme šipkou. Omezení počtu zaslaných zpráv je dáno tím, že „spolu kamarádí berušky, jejichž počet teček se liší o jednu“ – tedy ty, které mají 2 a 3, 5 a 6 teček, pouze tyto si budou SMS vyměňovat.

Označíme-li jednotlivé berušky čísly udávajícími počet teček, vytvoříme dvojice: 2→3, 3→2, 2→3, 3→2 (berušky se 3 tečkami jsou dvě!), 5→6, 6→5. Bylo odesláno 6 SMS zpráv, protože každé dvě kamarádky si vyměnily SMS navzájem. Správné řešení je C). Úspěšnost řešení úlohy je 30,9 %.



Obrázek 27 ***Záznam, na němž je zaslání SMS vyjádřeno oboustrannými šipkami***

Každou zaslanou SMS zprávu je možné vyjádřit jednoduchou čarou bez šipek. Počet odeslaných SMS zpráv je dán počtem čar, které berušky spojují. Záznam žák provede do obrázku, který je součástí zadání nebo si berušky překreslí, čímž současně vytváří dvě skupiny berušek, které se kamarádí. Vzhledem k tomu, že v zadání jsou předtištěny berušky, které spolu kamarádí, do dvou řádků, jsou oba záznamy přehledné:



Obrázek 28 ***Ukázka jiného způsobu grafického záznamu***

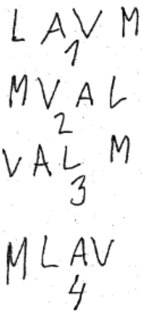
15. Pepa si dává do jedné poličky 4 hračky – auto, míč, vrtulník a loď. Vždy dodržuje tato pravidla: loď stojí vedle auta, vrtulník stojí vedle auta. Kolika způsoby může Pepa hračky umístit?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Očekávaný výstup	Indikátor
žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky	*žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)*

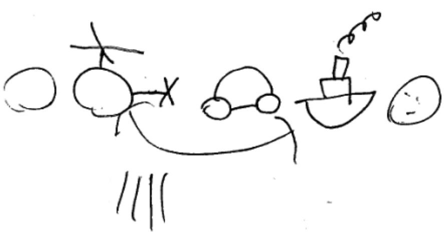
Slovní úloha kombinatorického zaměření vyžaduje experiment s vhodným písemným či grafickým záznamem umístění hraček. Dodržení pravidla „loď stojí vedle auta, vrtulník stojí vedle auta" počet možných řešení této divergentní úlohy omezí pouze na 4 případy: M**LAV**, **LAV**M, M**VAL**, **VAL**M. Správné řešení je B). Řešení nevyžaduje žádné předběžné matematické znalosti, je však třeba zaznamenat všechny možnosti umístění hraček odpovídající podmínce zadání. Úspěšnost řešení dosáhlo 35,4 % žáků.

Opět bylo využito široké škály způsobů záznamů, například vyjádření jednotlivých hraček pomocí počátečního písmene a přehledného výpisu všech možností.



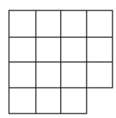
Obrázek 29 ***Písemný záznam s číselným vyjádřením počtu řešení***

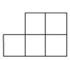
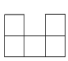
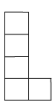
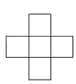
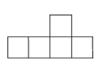
Druhý způsob využívá zakreslení hraček v podobě obrázku. Dvojí možné umístění vrtulníku a lodi vedle auta je znázorněno šipkou. Umístění míče zprava či zleva vzhledem ke zbývajícím je na obrázku zachyceno dvojím zakreslením míče.



Obrázek 30 ***Znázornění, z něhož je patrná evidence každého z řešení čárkou***

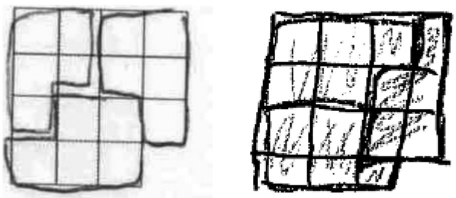
16. Rozděl tvar vpravo na tři stejné dílky. Jak vypadá každý dílek?



A)  *B)*  *C)*  *D)*  *E)* 

Očekávaný výstup	Indikátor
žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary *žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu*	*žák určí pomocí čtvercové sítě obsah rovinného útvaru, který lze složit ze čtverců, obdélníků a trojúhelníků* *žák porovnává pomocí čtvercové sítě obsahy rovinných útvarů*

Řešení geometrické úlohy vyžaduje představivost, schopnost „vidět" tvary ve čtvercové síti, žádné další znalosti řešení úlohy nepředpokládá. Jednotlivými dílky lze otáčet, posouvat – při řešení žák využívá mentální manipulace, experimentu. Správné řešení je A).



Obrázek 31 ***Na žákovských záznamech jsou jednotlivé dílky zaznamenány vyznačením jejich obvodu, šrafováním nebo kombinací obou způsobů***

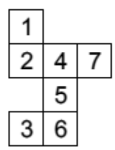
Můžeme dále zkoumat, zda lze jednotlivé dílky umístit do obrázku různými způsoby. Úloha byla řešena s úspěšností 57,1 %.

Zadání připomíná úlohy ze stolních her (například Ubongo) či úlohy o *polyominech*[44], v tomto případě se jedná o pentomina, například: *Kolik existuje různých pentomin? Lze pokrýt šachovnici 8×8 dvanácti pentominy?*

5 bodů

17. Lucka chce složit krychli z této sítě. Omylem ale vytvořila síť ze 7 čtverců místo ze 6 čtverců. Který čtverec lze odebrat, aby i bez něj mohla složit krychli?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 7



Očekávaný výstup	Indikátor
žák načrtne a sestrojí sítě základních těles	*žák rozpozná sítě základních těles (krychle, kvádr, kolmý hranol, jehlan, válec, kužel)*

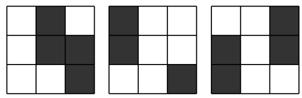
44 *Polyomina* jsou jednodílné útvary složené z jistého počtu buď jen shodných čtverců, nebo jen rovnostranných trojúhelníků, nebo jen pravidelných šestiúhelníků; dva trojúhelníky, čtverce nebo šestiúhelníky mohou mít společnou stranu nebo jen bod. Útvary jsou podmnožinami trojúhelníkové, čtvercové, nebo šestiúhelníkové sítě (http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_45.pdf).

Předpokladem řešení úlohy je znalost pojmu *síť krychle* tvořené 6 shodnými čtverci (stěnami krychle), které leží v jedné rovině a tvoří jeden rovinný obrazec. Při řešení této uzavřené úlohy lze zkoumat jednotlivé případy z nabídky a posuzovat, zda různé případy nekonvexních n-úhelníků, které vzniknou po odebrání jednoho čtverce, jsou sítí krychle a umožní krychli složit. Správné řešení je *C)* – je třeba odebrat čtverec s označením 3. Ve zbývajících případech nelze krychli složit. Při odebrání čtverců s čísly 2 nebo 6 je zřejmé, že by rovinný obrazec nevznikl.

Při řešení se uplatní prostorová inteligence – představivost řešitele, ale také poznatek, že krychle má 11 různých možných sítí. Tím je dán přesah úlohy, umožňující manipulativní činnost a experiment:
- vymodelovat (s využitím vhodných pomůcek, např. Polydron, Magformers, geodeska) různé sítě krychle – divergentní úloha,
- nakreslit/narýsovat různé sítě krychle do čtvercové sítě, vystřihnout a složit.

Úloha vykazuje 41,0 % správných řešení.

18. Na průsvitný papír nakreslil Zbyněk tři čtverce (podívej se na obrázek). Položil je na sebe a otáčel čtverci (vpravo, vlevo) tak, aby získal co největší počet černých čtverců. Kolik černých čtverců viděl?

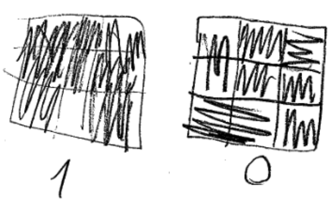


A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Očekávaný výstup	Indikátor
žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici)	*žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu*
žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů	*žák využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata, modely*

Jedná se o geometrickou úlohu vyšší náročnosti, jejíž řešení vyžaduje experiment. Podstatou virtuální/mentální manipulace je otáčení či posunutí čtverců, směřující k pokrytí jejich maximálního počtu z 9 malých čtverců. Vždy však zůstane jeden čtverec bílý. Zbyněk viděl 8 černých čtverců, správné řešení je D).

V jednom z žákovských řešení můžeme sledovat následující postup: v obou případech byly dodrženy podmínky překrytí čtverců podle zadání úlohy.



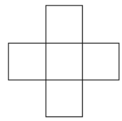
Obrázek 32 ***Záznam žákovského řešení úlohy s využitím šrafování***

Na prvním obrázku je ale zachyceno překrytí všech tří dílů bez jejich otáčení (směr šrafování odpovídá původní poloze). Na druhém obrázku již otáčení nalézáme. První díl zůstává v nezměněné poloze, druhý díl se otáčí o 90° v kladném směru otáčení. Všechny tři čtverečky jsou vidět, použilo se horizontální šrafování. K zakrytí těchto tří čtverečků se mohla využít i rotace posledního čtverce, kdy by jeden dílek zůstal skrytý. Nepřesnost vznikla při zakrytí prvních dvou čtverečků v prvním sloupci (uvažováno shora). Druhý ze čtverečků žák zakrýt nemohl.

Při společném řešení úlohy například následně po ukončení soutěže můžeme využít experimentu, manipulace: čtverce nakreslíme na průsvitný papír, položíme je na sebe, doprostřed čtverce zapíchneme špendlík a hledáme největší počet černých čtverců.

Úloha dosáhla 34,4 % správných řešení.

19. Čísla 2, 3, 5, 6 a 7 napiš do čtverců sestavených do tvaru kříže (podívej se vpravo). Součet čísel v řádku se rovná součtu čísel ve sloupci. Které z čísel může být napsáno uprostřed kříže?



A) jen 3 B) jen 5 C) jen 7 D) 5 nebo 7 E) 3, 5 nebo 7

Očekávaný výstup	Indikátor
žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel	*žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta*
žák čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti	*žák využívá komutativnost sčítání a násobení při řešení úlohy a při provádění zkoušky výpočtu*

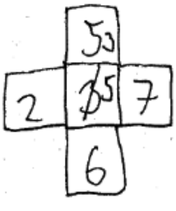
Úloha je obdobou *magického čtverce*[45], v tomto smyslu jde o úlohu divergentní. Čísla podle podmínek zadání lze zapsat čtyřmi způsoby. Dvě řešení v případě, že doprostřed umístíme číslo 5 (součet čísel v řádku i ve sloupci je 14), další dvě řešení s umístěním do středu čísla 7 (součet čísel v řádku i ve sloupci je 15). Správná řešení jsou uvedena níže. Řešení vyžaduje experiment, který zohledňuje jednotlivé nabídnuté distraktory. Správné řešení je D).

	2	
3	5	6
	7	

	7	
6	5	3
	2	

	5	
3	7	4
	2	

	2	
4	7	3
	5	



Obrázek 33 ***Záznam původního Honzova nesprávného řešení s následnou korekcí***

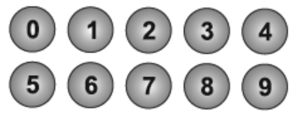
---

45 *Magický čtverec* je tvořen 3×3 nebo 4×4 poli čtverce, ve kterých jsou zapsána čísla 1–9 nebo 1–16 tak, že jejich součet ve všech řádcích, sloupcích i úhlopříčkách zůstává stejný. Magické čtverce byly známy čínským matematikům již před více než 2 500 lety, lze je najít v mnoha dílech starých kultur (Čína, Indie, Egypt). Známý je magický čtverec z obrazu A. Dürera Melancholia I z roku 1514.

Pravděpodobný úsudek vedoucí k nesprávnému řešení lze vyvodit z obrázku. Zvolí si číslo, které vepíše doprostřed kříže (např. 3). Zbývající čísla dávají součet 20 (2 + 5 + 6 + 7 = 20). Součet čísel v řádku i sloupci se má rovnat 10. Z čísel 2, 5, 6 a 7 ale nevytvoříme takové dvě dvojice, jejichž součtem by bylo číslo 10. Proto není číslo 3 řešením úlohy.

Úloha byla řešena s velmi nízkou úspěšností – 12,4 %. Důvodem vysokého počtu neúspěšných řešení může být již neporozumění otázce: „Které z čísel *může být* napsáno uprostřed kříže?“

20. *Kája má 10 míčů očíslovaných 0 až 9. Rozdělil tyto míče mezi své 3 kamarády. Jirka dostal 3 míče, Janek 4 a Anička 3. Kamarádi vynásobili čísla na svých míčích a dostali tato čísla: Jirka 0, Janek 72 a Anička 90. Jaký je součet čísel na Jirkových míčích?*

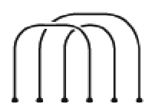


A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Očekávaný výstup	Indikátor
žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace	*žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky*
žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky	*žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)*

Předpokladem řešení náročnější úlohy je porozumění zadání, které obsahuje několik zásadních informací, a dobrá znalost násobilkových spojů. Podmínky úlohy: počet míčů jednotlivých dětí, daný součin tří, resp. čtyř čísel, Jirkův součin roven 0 (0 ve významu agresivního prvku násobení). Číslo 90 (míče Aničky) je součinem tří čísel: 90 = 2 · 5 · 9, číslo 72 (míče Janka) je součinem čtyř čísel: 72 = 1 · 3 · 4 · 6. Zbývají míče s čísly 0, 7 a 8 musí patřit Jirkovi. Součet 0 + 7 + 8 = 15 je součtem čísel na Jirkových míčích. Správné řešení je E). Úspěšných řešení bylo pouze 11,5 %.

21. *Na zemi leží tři části hasičské hadice (podívej se na obrázek). Spoj je s dalšími třemi částmi tak, aby tvořily jeden uzavřený celek. Které části vybereš?*



A)  *B)*  *C)* 

D)  *E)* 

Očekávaný výstup

žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

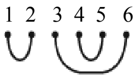
žák analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

Indikátor

žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)

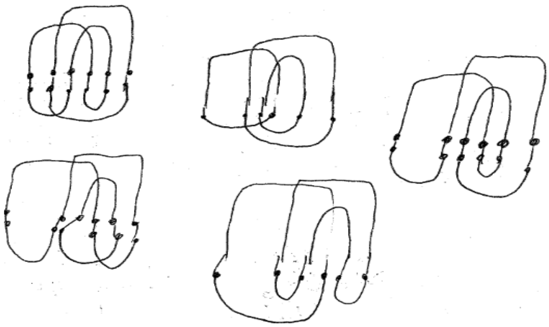
žák vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy

Řešení vyžaduje pozorné čtení a představivost. Součástí zadání je obrázek, obrázky jsou i v nabídce řešení. Každá z nabídnutých odpovědí obsahuje 3 různé části, které je třeba spojit se třemi hadicemi na obrázku v zadání. Správné řešení je C).



Když očíslujeme jednotlivé konce hadic 1–6, je třeba připojit konce 1 a 2, 6 a 3, 5 a 4, abychom dostali uzavřený celek. Tato možnost nastává pouze v případě obrázku C).

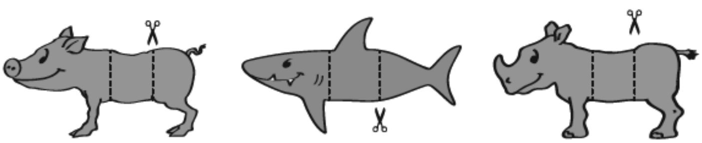
Řešení klade rovněž značné nároky na přesnost. Žáci mohou řešit úlohu překreslením, případně vystřižením nabídek odpovědí, jejich přikládáním k daným dílům hadice a posouzením, zda se jedná o jeden uzavřený celek.



Obrázek 34 ***Znázornění žákovského pokusu o řešení úlohy překreslením***

Kontextová stránka úlohy poskytuje příležitost k diskusi o záslužné práci hasičů, prevenci požárů aj. Úloha byla řešena s nízkou úspěšností – 11, 9 %.

22. Tomáš nakreslil obrázky vepříka, žraloka a nosorožce a rozstříhal je na 3 části (podívej se na obrázek). Potom vytvářel nové obrázky tím, že zaměňoval hlavu, břicho či zadek. Zjisti největší počet takto vytvořených zvířat.



A) 3 B) 9 C) 15 D) 27 E) 30

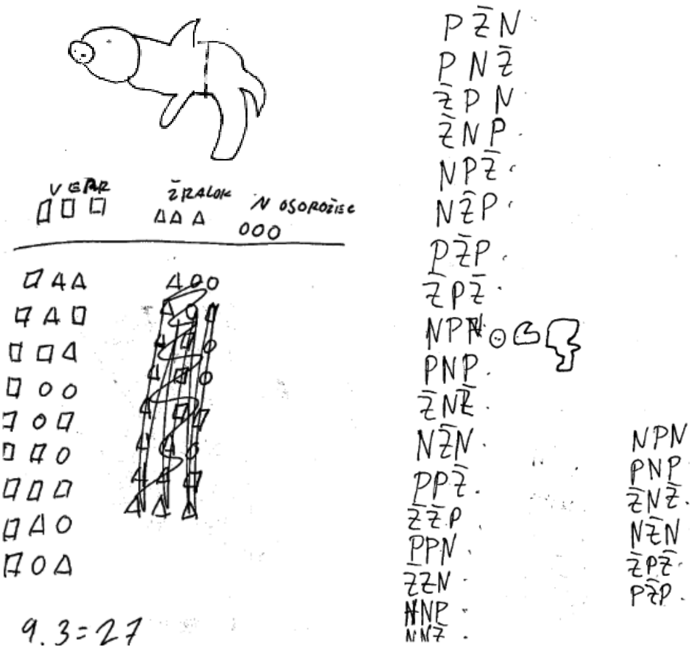
Očekávaný výstup	Indikátor
žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky	*žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)* *žák využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata, modely*

Úloha je propedeutikou kombinatoriky (3členné variace s opakováním ze 3 prvků, jichž je $V'(3,3) = 3^3 = 27$). Žákovské řešení je založeno na experimentu, který vyžaduje systematický postup a vhodný písemný záznam všech možností. Jestliže například ponecháme hlavu vepře a budeme zaměňovat další části těla žraloka a nosorožce, dostaneme 9 možných obrázků. Stejně tak když budeme vytvářet kombinace s hlavou žraloka a nosorožce. Najdeme tedy $3 \cdot 9 = 27$ různých možností:

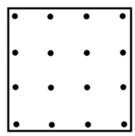
obrázky s hlavou vepře:			obrázky s hlavou žraloka:			obrázky s hlavou nosorožce:		
hlava	tělo	zadek	hlava	tělo	zadek	hlava	tělo	zadek
V	V	V	Ž	Ž	Ž	N	N	N
V	V	Ž	Ž	Ž	V	N	N	V
V	V	N	Ž	Ž	N	N	N	Ž
V	Ž	V	Ž	V	Ž	N	V	Ž
V	Ž	N	Ž	V	N	N	V	N
V	Ž	Ž	Ž	V	V	N	V	V
V	N	V	Ž	N	Ž	N	Ž	Ž
V	N	Ž	Ž	N	V	N	Ž	V
V	N	N	Ž	N	N	N	Ž	N

Správné řešení je D). Je zřejmé, že bez písemného záznamu, který systematicky vyčerpá všechny možnosti, lze úlohu úspěšně vyřešit prostředky žáka 1. stupně ZŠ jen s obtížemi. Diskuse může nastat, máme-li do počtu řešení zahrnout případ, kdy budou obrázky tvořeny třemi částmi těla *stejného* zvířete (VVV, ŽŽŽ, NNN – rozstříhal, pak opět přiložil k sobě). Pokud ne, počet možností by se zmenšil o 3, tj. 24 – takové číslo však v nabídce odpovědí není. Úlohu vyřešilo správně 12,4 % respondentů.

Žáci volí různé reprezentace jednotlivých částí zobrazujících dané zvíře, a to od realistické kresby, geometrických obrazců až po počáteční písmeno zvířete.



Obrázek 35 ***Různé způsoby grafického záznamu evidence jednotlivých možností***



23. Ve čtverci na obrázku je 16 bodů. Jsou od sebe stejně vzdáleny. Maruška tvořila čtverce tak, že vrcholy čtverce byly 4 tečky. Kolik různě velkých čtverců mohla vytvořit?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Očekávaný výstup

žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce

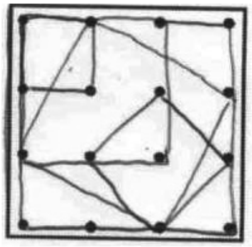
žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů

Indikátor

žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

žák využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata, modely

Předpokládá se znalost pojmu *čtverec* a jeho *obsah*, resp. vztah mezi délkou strany čtverce a jeho obsahem. „Stejně velké čtverce“ ve významu shodných čtverců, jejichž obsahy se rovnají, jsou čtverce o stejné délce stran, „různě velké čtverce“ musejí mít strany různé délky. Na obrázku jsou vyznačeny tři různé čtverce s délkami stran 1, 2 a 3 a další dva s délkami stran ve směru úhlopříček (viz řešení na obrázku). Celkem mohla Maruška vytvořit 5 různě velkých čtverců. Správné řešení je D).



Obrázek 36 ***Nákres správného Jarčina řešení úlohy***

Úlohovou situaci lze následně vymodelovat na geodesce, evidovat jednotlivé možnosti a přesvědčit se tak o správném řešení. Zdrojem chybného řešení může být nerespektování podmínky „různě velkých čtverců“ – řešitelé hledají všechny různé čtverce (i když v nabídce odpovědí není větší počet než 6), případně neuvažují čtverce „na úhlopříčce“. Úspěšnost řešení dosáhla 12,6 %.

24. Kamarádi Alenka, Bohunka, Šárka, David a Eliška o víkendu pekli sušenky. Během celého víkendu upekla Alenka 24 sušenek, Bohunka 25, Šárka 26, David 27 a Eliška 28. Na konci víkendu měl jeden z kamarádů dvakrát více sušenek než po sobotě, jiný měl třikrát více, další čtyřikrát více, další pětkrát více a poslední šestkrát více. Kdo upekl v sobotu nejvíc sušenek?

A) Alenka B) Bohunka C) Šárka D) David E) Eliška

Očekávaný výstup

žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

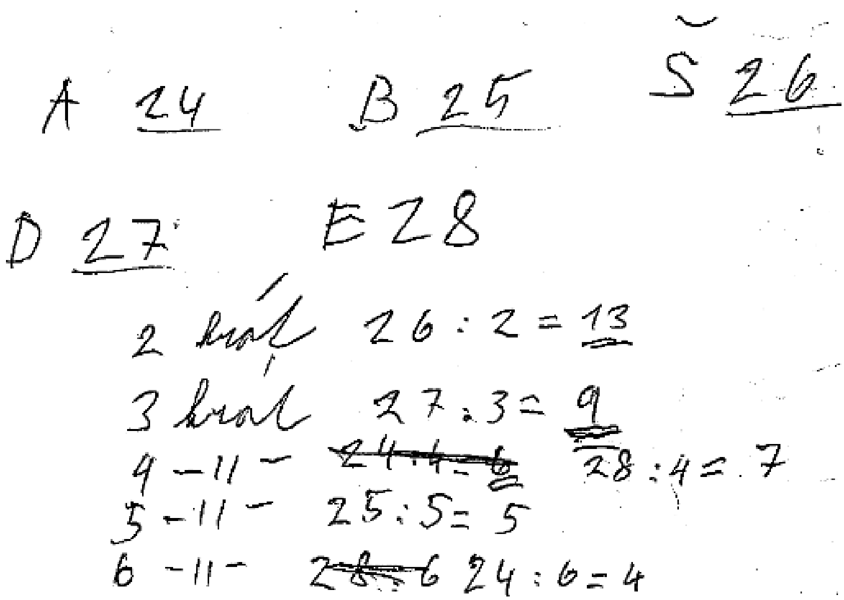
žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace

Indikátor

žák porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy)

žák zpaměti sčítá a odčítá čísla do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky

Slovní úloha, jejíž řešení vyžaduje pozorné čtení zadání a úsudek, založený na inverzním vztahu „n-krát více“, „n-krát méně“. Řešitel může úlohu přeformulovat takto: v sobotu upekl jeden z kamarádů dvakrát méně než na konci víkendu, jiný třikrát méně, další čtyřikrát méně, další pětkrát méně a poslední šestkrát méně. Hledáme, která čísla v zadání jsou dělitelná (beze zbytku) dvěma (24, 26, 28), třemi (24, 27), čtyřmi (24, 28), pěti (25) a šesti (24). Žák musí ještě zohlednit skutečnost, že některá čísla jsou zároveň beze zbytku dělitelná více děliteli. Proto měla v sobotu Alenka 24 : 6 = 4, Bohunka 25 : 5 = 5, Šárka 26 : 2 = 13, David 27 : 3 = 9, Eliška 28 : 4 = 7 sušenek. Nejvíce sušenek upekla v sobotu Šárka. Správné řešení je C).



Obrázek 37 *Ukázka záznamu žákovského řešení*

Kontextová stránka úlohy může být využita v souvislosti s domácími pracemi nebo aktivitami v pracovních činnostech. Úloha dosáhla nejnižší úspěšnosti v celém souboru, pouze 10,3 %.

– 3 – 1 – 3 – 2 Matematický obsah učebních úloh v testu

Analýza souboru učebních úloh zadaných v soutěžním testu[46] poskytla řadu údajů popisujících úlohy z různých stránek, v různých rovinách a majících různou poznávací hodnotu. Obsahová („jevová“) analýza odpovídá na otázku, které matematické jevy (pojmy, algoritmy, pravidla, …) jsou obsahem učebních úloh – sleduje se tedy oborově předmětové kritérium. Sestavili jsme tabulku specifikující obsahovou validitu testu ve třech dimenzích znalosti matematického obsahu:

- v rovině matematické disciplíny,
- v rovině tematického celku učiva matematiky aktuálního kurikula (tematického okruhu vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace RVP ZV),
- v rovině dílčího „atomu“ učiva, jednotlivé obsahové jednotky či jevu.

46 Autentická podoba testu je uvedena v příloze.

Při sestavování mezinárodní verze soutěžních testů na Kangaroo meetingu[47] se úlohy tradičně zařazují do tří základních matematických oblastí:

- aritmetika, teorie čísel a algebra (A),
- geometrie – planimetrie, stereometrie a další skupina úloh obtížně zařaditelných, označovaných jako úlohy na rozvoj prostorové představivosti – (G),
- úlohy „logické“ často z oblasti kombinatoriky (L).

Uvedené třídění úloh – které nemusí být a také není disjunktní (některá z úloh může vykazovat znaky umožňující zařazení do dvou nebo i několika matematických oblastí a témat učiva) – jsme použili i v našem výzkumu.[48]

Tabulka 7 *Matematický obsah soutěžních úloh*

Disciplína (oblast, obor matematiky)	Tematický okruh RVP[49]	Atom učiva	Čísla úloh v testu
aritmetika a teorie čísel, algebra	čísla a početní operace	početní operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení)	1, 3, 4, 6, 10, 13, 19, 20, 22, 24
		rovnice, rovnost	3, 24
		dekadická soustava	6, 20
		porovnávání čísel, číselná řada	10, 13, 24
logika	závislosti, vztahy a práce s daty	kombinatorika	12, 14, 15, 19, 22
geometrie (planimetrie, stereometrie, topologie, míra)	geometrie v rovině a v prostoru	úsečka, délka úsečky	2
		lomená čára	5, 12, 21
		uvnitř, vně	7
		rovinné útvary (trojúhelník, čtverec)	5, 8, 9, 16, 17, 18, 23
		krychle	11, 17

Dalším znakem, který jsme učinili předmětem naší analýzy, je způsob jazykového vyjádření úlohy. Rozlišili jsme úlohy čistě matematické, tj. úlohy zadané v matematickém jazyce, s převažujícím uplatněním matematických termínů a symbolů, a úlohy kontextové (slovní), zadané v přirozeném jazyce, vycházející z reálné

47 Každoroční setkání zástupců jednotlivých zemí, na němž se vybírají soutěžní úlohy.

48 Jsme si vědomi určité subjektivity při posuzování charakteru úloh a z ní vyplývajícího zařazení do jednotlivých tříd, rozhodovali jsme se vždy podle převažujících znaků.

49 Vzhledem ke skutečnosti, že společným znakem úloh v soutěži Matematický klokan je jejich nestandardní charakter, lze zařadit prakticky všechny úlohy do tematického okruhu „Nestandardní aplikační úlohy a problémy“.

situace.[50] Uplatníme-li naznačené třídění pro náš analyzovaný soubor, rozlišíme 12 úloh (50 %), které jsme zařadili do třídy čistě matematických a 12 úloh (50 %) kontextových.

Tabulka 8 *Rozdělení testových úloh podle způsobu jazykového vyjádření*

Jazykové vyjádření úlohy	**Čísla úloh v testu**		
	3bodové	**4bodové**	**5bodové**
čistě matematické – N	1, 2, 3, 5, 8	9, 11, 16	17, 18, 19, 23
kontextové (slovní) – K	4, 6, 7	10, 12, 13, 14, 15	20, 21, 22, 24

Předchozí kritérium pro třídění testových úloh do značné míry souvisí i s posledním hlediskem, které jsme ovšem v naší analýze již dále nezohlednili. Rozlišili jsme úlohy, které jsou prezentovány s využitím obrázku nebo jiného grafického znázornění, a úlohy bez tohoto znaku (zadané matematickou symbolikou nebo pouze textem). Zadání úlohy prostřednictvím obrázku významně převažuje – je použito v 19 úlohách (79,2 %) – zadání prostým textem nebo pouze matematickou symbolikou je užito v 5 úlohách (20,8 %).

– 3 – 2 Metody výzkumu

– 3 – 2 – 1 Metody sběru dat a tvorby výzkumné databáze

V našem výzkumu jsme vzhledem ke stanoveným cílům, formulaci výzkumných otázek a hypotéz využili kvantitativní výzkumné metody.

Faktografické údaje o žácích a výsledky řešení jednotlivých úloh byly zjištěny ex post analýzou písemných dokumentů získaných na příslušné škole. Jako zdroje dat se využily:

- údaje uvedené samotným žákem či jeho učitelem (ročník, klasifikace z matematiky, sídlo školy),
- odpovědní/záznamový list jednotlivého žáka (karta odpovědí),
- listy papíru s případnými (nepovinnými) záznamy pomocných poznámek, náčrtků a výpočtů žáků.

— — —

50 Charakteristika obou uvedených typů úloh byla podána v kap. 2.1.1. I v tomto případě je ovšem možné o uplatněném třídění diskutovat, ostrou hranici lze v prostředí primární školy jen velmi obtížně stanovit.

Data o jednotlivých řešitelích, výsledky řešení soutěžních úloh a celkové výsledky žáků byly zakódovány pro potřebu dalšího následného zpracování a zaneseny do přehledné matice dat.

Tabulka 9 *Význam sledovaných položek a jejich kódové označení*

Pořadí položky	Označení položky	Kód	Výklad významu položky
1.	Ročník	4, 5	Navštěvovaný ročník k datu 20. 3. 2015
2.	Pohlaví řešitele	CH, D	CH: chlapec, D: dívka
3.	Sídlo školy	M, V	Sídlo navštěvované školy – M: město, V: vesnice
4.	Klasifikace z matematiky	1, 2, 3, 4	Známka z předmětu Matematika na pololetním vysvědčení navštěvovaného ročníku
5.	Bodový zisk za řešení jednotlivé úlohy	3, 4, 5, −1, 0	3: správně vyřešená úloha 1–8 4: správně vyřešená úloha 9–16 5: správně vyřešená úloha 17–24 −1: nesprávně vyřešená úloha 0: neřešená úloha
6.	Celkový bodový zisk		0–120 možných získaných bodů

Například identifikační index X/5DM2 označuje x-tého (x = 1, 2, …, 680) žáka z našeho výzkumu, žáka 5. ročníku, dívku, navštěvující městskou školu, která byla klasifikována na pololetním vysvědčení známkou chvalitebnou.

Databáze byla vytvořena takto:

- 4 osobní údaje (identifikační znaky) o 680 uchazečích .... 2 720 údajů,
- výsledky řešení 24 matematických učebních úloh .... 16 320 údajů,
- celkový dosažený bodový výsledek žáků .... 680 údajů.

Celkem tvořilo databázi získanou z písemných dokumentů 19 720 údajů.

– 3 – 2 – 2 Metody zpracování získaných dat

Při zpracování výsledků výzkumu bylo užito statistických metod a postupů pro analýzu dat metrického charakteru. Zvolené postupy jsme konzultovali s Mgr. Kamilou Fačevicovou, Ph.D. z Pedagogické fakulty UP v Olomouci a využili její odborné a technické pomoci při strojovém zpracování.

Při popisném charakteru dat jsme zpřehlednili získaná data použitím tabelárních metod – údaje byly transponovány do tabulek, v nichž jsme vyjádřili absolutní a relativní četnosti. Vybrané údaje jsme zobrazili také graficky, pomocí sloupcových a krabicových grafů.

Datový soubor jsme popsali pomocí číselných charakteristik polohy (střední hodnota, modus, medián) a variability (rozptyl, směrodatná odchylka). Následně jsme přistoupili k testování statistických hypotéz, které nám pomohly při hledání odpovědí na výzkumné otázky. Získané výsledky o platnosti, příp. zamítnutí hypotézy následně interpretujeme.

K testování statistické verifikace hypotéz jsme zvolili několik metod podle typu použitých dat (úrovně provedeného měření). Před samotnou analýzou dat byly ověřovány podmínky pro použití vybraných parametrických testů (zda výběr pochází z normálního rozdělení, zda je zachována homogenita rozptylu):

- po ověření předpokladu normálního rozdělení pomocí Shapiro-Wilk testu a shody rozptylů F a Bartlettovým testem bylo využito parametrických testů (t-test[51], analýza rozptylu ANOVA[52]),
- v případech, kdy byla porušena normalita rozdělení, bylo nutno použít neparametrických testů:
  a) v případě testování dvou souborů dvouvýběrového Wilcoxonova testu[53],
  b) v případě porovnání několika souborů Kruskal-Wallisova testu[54].

Při výpočtu jsme stanovili hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$. Data byla zpracována pomocí statistického softwaru R[55].

— — —

51 *T-test* je jedním z nejznámějších statistických testů významnosti pro metrická data, sloužícím k porovnání dvou datových souborů. Pomocí tohoto testu ověřujeme nulovou hypotézu, že oba soubory pocházejí z rozdělení se stejnou střední hodnotou. Abychom t-test mohli použít, musí oba soubory pocházet z normálního rozdělení s neznámým, ale shodným rozptylem. Shodu rozptylů ověříme pomocí F-testu.

52 *Analýza rozptylu ANOVA* je statistická metoda, která se užívá k testování hypotézy o shodě středních hodnot dané číselné proměnné v několika nezávislých skupinách. Testuje nulovou hypotézu o rovnosti středních hodnot ve skupinách proti alternativní hypotéze, že existují alespoň dvě skupiny, jejichž střední hodnoty se od sebe liší. Metoda je založena na podílu variability mezi skupinami a variability uvnitř skupin. Z tohoto poměru vychází výpočet testové statistiky F.

53 *Dvouvýběrový Wilcoxonův test* se používá pro porovnání dvou souborů v situaci, kdy je alespoň v jedné ze skupin porušen předpoklad normality a nemůže být tedy použit standardní t-test. K ověření nulové hypotézy, že oba soubory pocházejí z rozdělení se stejnou distribuční funkcí, se využívá uspořádání hodnot a následného přiřazení pořadí. Jedná se tedy o zástupce skupiny tzv. pořadových testů.

54 *Kruskal-Wallisův test* je dalším testem ze skupiny tzv. pořadových testů, který představuje neparametrickou alternativu jednofaktorové ANOVY a zobecnění dvouvýběrového Wilcoxonova testu pro případ, kdy testujeme shodu distribučních funkcí ve více než dvou skupinách. Tento test se využívá v situaci, kdy data v jednotlivých skupinách nejsou normálně rozdělena, příp. není dodržen předpoklad shody rozptylů.

55 R Core Team. (2013). *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing. Vienna. Dostupné z http://www.R-project.org/

– 3 – 3 Popis a interpretace výsledků výzkumu

– 3 – 3 – 1 Analýza výsledků soutěžního testu

– 3 – 3 – 1 – 1 Celkové výsledky žáků v soutěžním testu (hrubé skóre žáků)

Celkové výsledky žáků v soutěžním testu (hrubé skóre žáků) jsou sledovány a následně interpretovány ve dvou úrovních:

- v našem analyzovaném souboru, popsaném v kapitole 3.2.1,
- v souboru všech soutěžících kategorie Klokánek v roce 2015 v České republice. Tento soubor tvořilo 96 763 žáků 4. a 5. ročníku ZŠ. Údaje jsou převzaty z webové stránky *www.matematickyklokan.net.*

Uvedený postup umožnil komparovat rovněž data zjištěná v našem výzkumu s údaji z výzkumu realizovaného v roce 2004 (Kubátová, 2005) a tím podle našeho mínění dále zvýšit jejich výpovědní hodnotu.

Očekávali jsme, že celkové výsledky dosažené jednotlivými řešiteli se budou významně lišit. Náš výzkum přinesl zjištění, vyjádřená následujícími charakteristikami popisné statistiky.

Tabulka 10 *Porovnání dat z výzkumných šetření v roce 2015 a 2004*

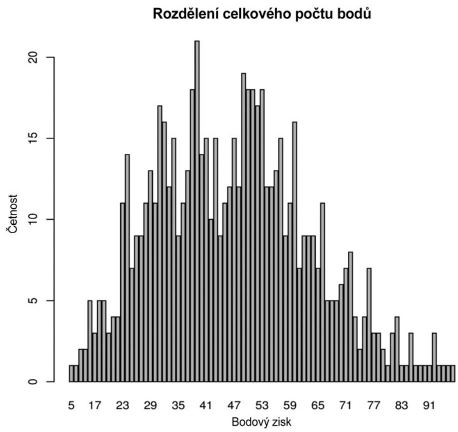
Kategorie Klokánek	**2015**	**2004**
počet řešitelů	680	477
průměrný bodový zisk	46,96	43,82
modus	39	44
medián	47	42
rozptyl	288,10	314,75
směrodatná odchylka	16,97	17,74

Porovnání ukazuje velmi podobné výsledky žáků v našem šetření – v roce 2015 jsou vyjádřeny mírně lepším aritmetickým průměrem.

Přehled počtu soutěžících, kteří získali příslušný počet bodů, jsme vyjádřili tabulkou a grafem.

Tabulka 11 *Rozděleni respondentů výzkumu podle získaného počtu bodů v roce 2015*

120	0	100	0	80	1	60	16	40	14	20	3
119	0	99	0	79	2	59	11	39	21	19	5
118	0	98	0	78	3	58	9	38	18	18	5
117	0	97	0	77	3	57	15	37	13	17	3
116	0	96	0	76	7	56	13	36	11	16	5
115	0	95	0	75	4	55	12	35	9	15	2
114	1	94	0	74	2	54	12	34	15	14	2
113	0	93	1	73	4	53	18	33	12	13	0
112	0	92	1	72	8	52	17	32	16	12	0
111	0	91	1	71	7	51	18	31	17	11	1
110	0	90	1	70	6	50	18	30	11	10	0
109	0	89	1	69	5	49	19	29	13	9	0
108	0	88	0	68	5	48	12	28	11	8	0
107	0	87	1	67	5	47	15	27	9	7	0
106	0	86	3	66	11	46	12	26	9	6	0
105	0	85	1	65	7	45	11	25	7	5	1
104	0	84	0	64	9	44	9	24	14	4	0
103	1	83	1	63	9	43	15	23	11	3	0
102	1	82	4	62	9	42	10	22	4	2	0
101	0	81	3	61	7	41	15	21	4	1	0
										0	0

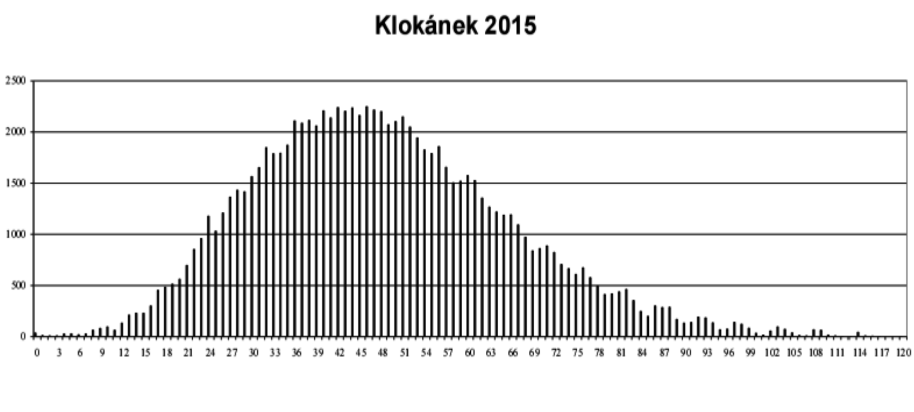


Obrázek 38 ***Rozdělení celkového počtu získaných bodů u respondentů výzkumu v roce*** 2015

Zjištěné výsledky potvrzují naše očekávání, že celkové výsledky dosažené jednotlivými řešiteli se významně liší.

Bodový zisk řešitelů v našem souboru se pohyboval v roce 2015 od minimální hodnoty 5 bodů po maximum 114 bodů. Pro srovnání uvádíme, že v roce 2004 od minimální hodnoty 4 bodů po maximum 114 bodů, jsou tedy v obou případech velmi blízké.

Pro porovnání uvádíme také graf s celkovými výsledky všech účastníků soutěže v kategorii Klokánek, jak je uvádí celostátní statistika v roce 2015.[56]



Obrázek 39 ***Bodový zisk všech účastníků v kategorii Klokánek v ČR v roce 2015***

— — —

56 *Sborníky soutěže Matematický klokan.* (2015). Dostupné z www.matematickyklokan.net

Bodový zisk všech řešitelů v České republice se v roce 2015 pohyboval od minimální hodnoty 0 bodů (35 účastníků) po maximum 120 bodů (dosáhli 2 účastníci).

– 3 – 3 – 1 – 2 Posouzení úspěšnosti řešení úloh podle zvolených kritérií

S přihlédnutím k zaměření výzkumných otázek a k nim příslušným hypotézám formulovaným v projektu výzkumu jsme sledovali úspěšnost řešení jednotlivých úloh vzhledem k následujícím znakům:

- „hodnotě" úlohy, stanovené autory testu, vyjadřující předpokládanou obtížnost úlohy (s rozlišením tříbodových, čtyřbodových a pětibodových úloh),
- matematickému obsahu úlohy a tématu učiva matematiky primární školy,
- jazykovému vyjádření zadání úlohy (rozlišení úloh čistě matematických a kontextových).

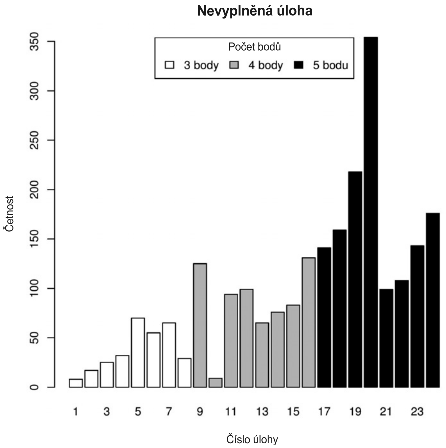
Ke zvýšení výpovědní hodnoty našich zjištění a přesnějšímu určení obtížnosti úloh jsme ze základní matice dat nejprve určili a graficky vyjádřili počty úloh nevyplněných, nedosažených a neřešených (uvedené pojmy jsme zavedli v kapitole 2.1.). Pokusili jsme se určit množinu nevyplněných, neřešených a nedosažených úloh, které odrážejí očekávání řešitelů o neúspěchu při jejich řešení. Skutečnost, že žák řešení do záznamového archu nezaznamená, považujeme za projev určité míry jeho predikce, s níž k řešení úloh přistupuje. Vycházeli jsme přitom ze zjištění jednoho z předchozích výzkumných šetření, které bylo popsáno v kapitole 2.1.5.

Připomeňme, že v našem výzkumu

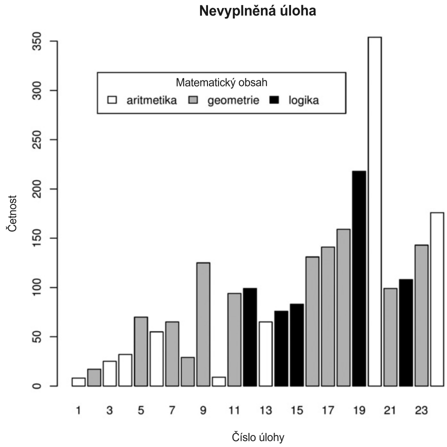
- nevyplněnou úlohou budeme rozumět úlohu, jejíž řešení nebylo vyznačeno v záznamovém archu (kartě odpovědí) jednotlivého řešitele,
- za nedosaženou budeme považovat první nevyplněnou úlohu, po které už žádné další řešení úlohy do záznamového archu řešitel nevyznačil,
- neřešenou úlohu definujeme jako úlohu nevyplněnou, vyskytující se před první nedosaženou úlohou.

Tabulka 12 *Rozdělení nevyplněných úloh podle bodové hodnoty*

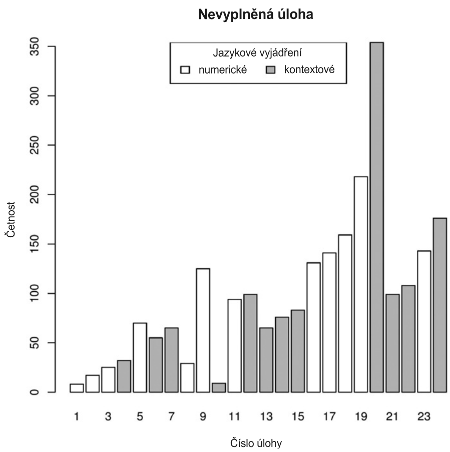
Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8
Počet úloh	8	17	25	55	65	29	32	70
Číslo úlohy	9	10	11	12	13	14	15	16
Počet úloh	125	9	94	83	76	65	99	131
Číslo úlohy	17	18	19	20	21	22	23	24
Počet úloh	141	159	218	354	99	108	143	176



Obrázek 40 *Nevyplněné úlohy v testu podle bodové hodnoty*



Obrázek 41 *Nevyplněné úlohy podle matematického obsahu*



Obrázek 42 *Nevyplněné úlohy v testu podle jazykového vyjádření*

V našem souboru jsme identifikovali celkem 6 úloh, které nevyplnilo více než 20 % žáků:

- všechny byly úlohy pětibodové (číslo 17, 18, 19, 20, 23, 24),
- 1 úloha „logická“ (číslo 19), 3 úlohy aritmetické (číslo 19, 20, 24) a 3 úlohy geometrické (číslo 17, 18, 23)[57],
- 2 úlohy kontextové (číslo 20, 24) a 4 úlohy zadané matematickým jazykem (číslo 17, 18, 19, 23).

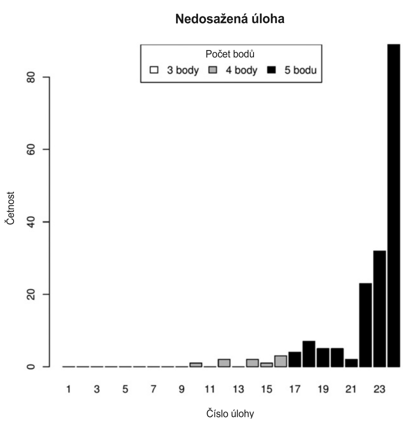
57 Úlohu číslo 19 jsme zařadili do skupiny jak aritmetických, tak logických úloh.

Porovnání uvedených údajů s následující tabulkou a grafy počtu nedosažených a neřešených úloh poskytuje možnost dalšího zpřesnění odhadu obtížnosti jednotlivých úloh a interpretace příčin nevyznačení odpovědi respondenty výzkumu. Důvodem „nevyplnění“ úlohy, tj. nezaznamenání výsledku do záznamového archu (karty odpovědí), se podle našeho mínění mohla stát jedna z následujících skutečností:

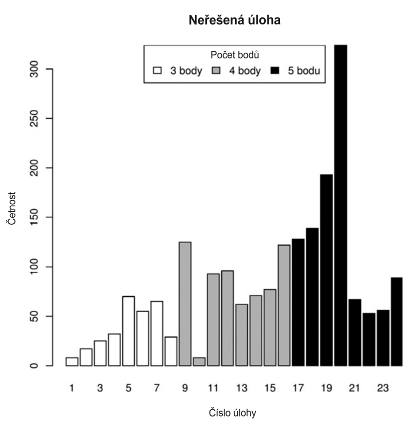
a) žákům byla nesrozumitelná nebo nejasná formulace nebo způsob prezentace úlohy. V tomto případě se do řešení úlohy vůbec nepustili, přešli k další úloze,
b) žáci zadání úlohy porozuměli, ale obtížnost úlohy považovali za příliš vysokou, takže k řešení nepřistoupili,
c) žáci se pokusili úlohu vyřešit, například na pomocné listy papíru, ale neúspěšně, přitom „neriskovali“ odhad, hádání odpovědi z nabídnutých alternativ a do záznamového archu svou odpověď nezaznamenali. Je zřejmé, že vysoká míra neřešenosti uvedeného typu naznačuje malou míru hádání, pouze tipování výsledku bez skutečného řešení. Případy (a), (b), (c) považujeme za úlohy neřešené,
d) žáci pro nedostatek času nebo pro ztrátu motivace rezignovali na další řešení, na zbývající úlohy v testu nedosáhli – úlohy nedosažené.

Tabulka 13 *Rozdělení nedosažených úloh podle bodové hodnoty*

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8
Počet úloh	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Číslo úlohy	9	10	11	12	13	14	15	16
Počet úloh	**0**	**1**	**0**	**2**	**0**	**2**	**1**	**3**
Číslo úlohy	17	18	19	20	21	22	23	24
Počet úloh	**4**	**7**	**5**	**5**	**2**	**23**	**32**	**89**



Obrázek 43 ***Nedosažené úlohy v soutěžním testu***



Obrázek 44 ***Neřešené úlohy v soutěžním testu***

Z tabulky i grafu je zřetelné, že nedosažené úlohy se v našem souboru vůbec nevyskytují mezi úlohami tříbodovými. Ve skupině všech čtyřbodových úloh je jejich četnost 1,3 %, zatímco mezi poslední skupinou úloh pětibodových je jejich počet nejvyšší, u poslední úlohy dosahuje téměř 15 %.

Následující tabulky vyjadřují počty neřešených úloh podle jejich bodové hodnoty, matematického obsahu a jazykového vyjádření zadání.

Tabulka 14 *Rozdělení neřešených úloh podle bodové hodnoty*

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8
Počet úloh	**8**	**17**	**25**	**32**	**70**	**29**	**65**	**29**
Číslo úlohy	9	10	11	12	13	14	15	16
Počet úloh	**125**	**8**	**93**	**96**	**62**	**71**	**77**	**122**
Číslo úlohy	17	18	19	20	21	22	23	24
Počet úloh	**128**	**139**	**193**	**324**	**67**	**53**	**56**	**89**

Kritérium „bodové hodnoty" úlohy

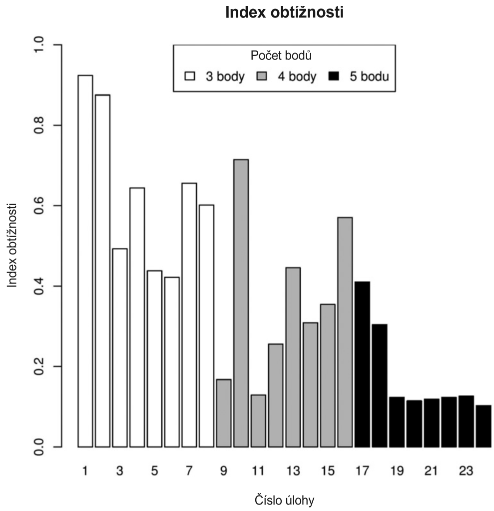
Základem pro stanovení obtížnosti úloh se stalo určení četnosti správných (v matici dat označených kódem 3, 4 nebo 5), nesprávných (v matici dat označených kódem −1) nebo nevyplněných (v matici dat označených kódem 0) odpovědí pro jednotlivé úlohy.

Chráska (2007, s. 196) rozlišuje:

- index obtížnosti P jako procento žáků v testované skupině, kteří danou úlohu zodpověděli správně: $P = \frac{n_s}{n} \cdot 100$, kde n je počet všech žáků, n_s je počet žáků, kteří odpověděli správně,
- hodnotu obtížnosti Q jako procento žáků, kteří odpověděli na danou úlohu nesprávně nebo neodpověděli vůbec: $Q = \frac{n_n}{n} \cdot 100$, kde n je počet všech žáků, n_n je počet žáků, kteří odpověděli nesprávně nebo neodpověděli vůbec.

Mezi hodnotou obtížnosti a indexem obtížnosti je vztah Q = 100 − P.

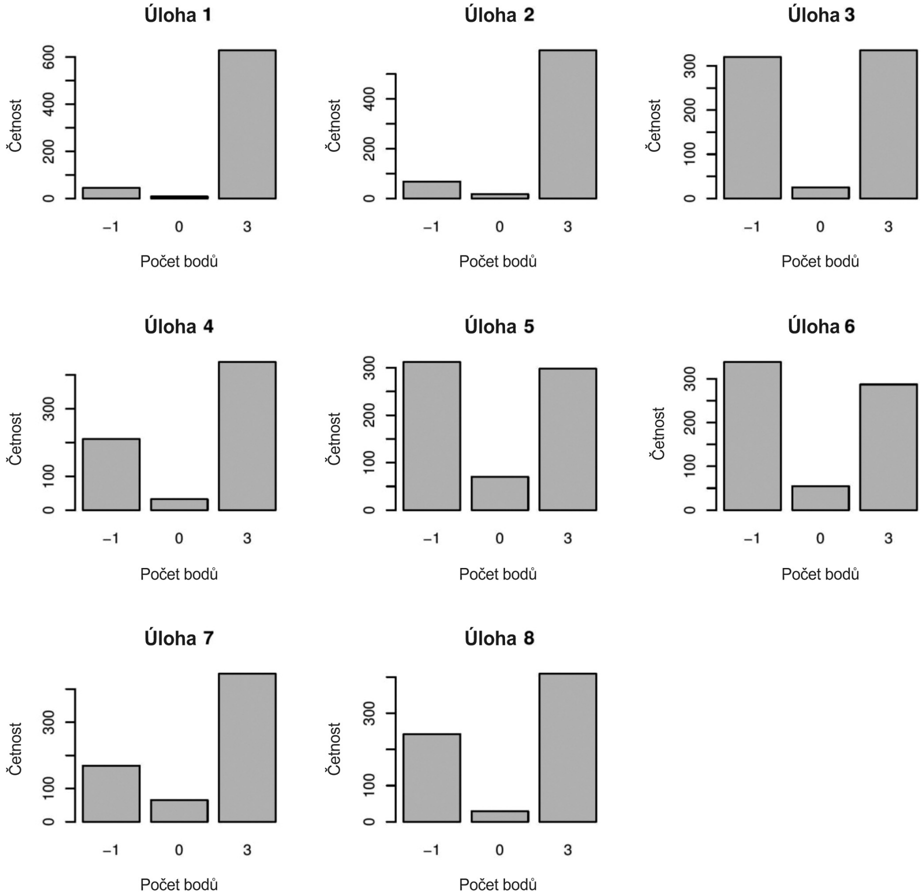
Úspěšnost řešení jednotlivých úloh jsme vyjádřili indexem obtížnosti P. Vysoká hodnota P tedy vyjadřuje malou obtížnost úlohy (úlohy byly pro respondenty snadnější), nízká hodnota P velkou obtížnost úlohy (úlohy byly pro respondenty náročnější). Údaje jsou zpřehledněny v tabulkách a graficky, a to v celém souboru testových úloh, ale také „uvnitř" jednotlivých skupin úloh lišících se bodovou hodnotou (úlohy 1–8, 9–16, 17–24).



Obrázek 45 ***Kritérium „bodové hodnoty" úlohy – index obtížnosti v celém souboru***

Tabulka 15 *Úspěšnost řešení tříbodových úloh a jejich pořadí podle úspěšnosti řešení v testu*

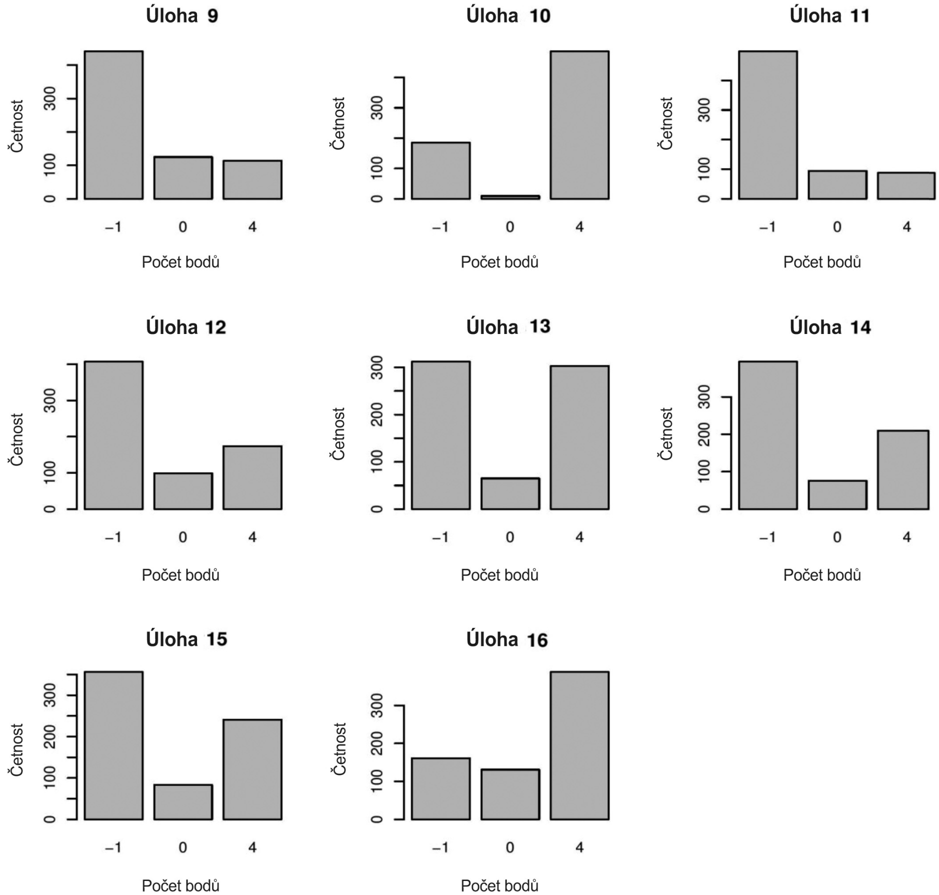
Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8
Index obtížnosti P	92,4	87,5	**49,3**	**64,4**	**43,8**	**42,2**	**65,8**	**60,1**
Pořadí podle úspěšnosti řešení	1.	2.	**8.**	**5.**	**10.**	**11.**	**4.**	**6.**



Obrázek 46 ***Úspěšnost řešení tříbodových úloh***

Tabulka 16 *Úspěšnost řešení čtyřbodových úloh a jejich pořadí podle úspěšnosti řešení v testu*

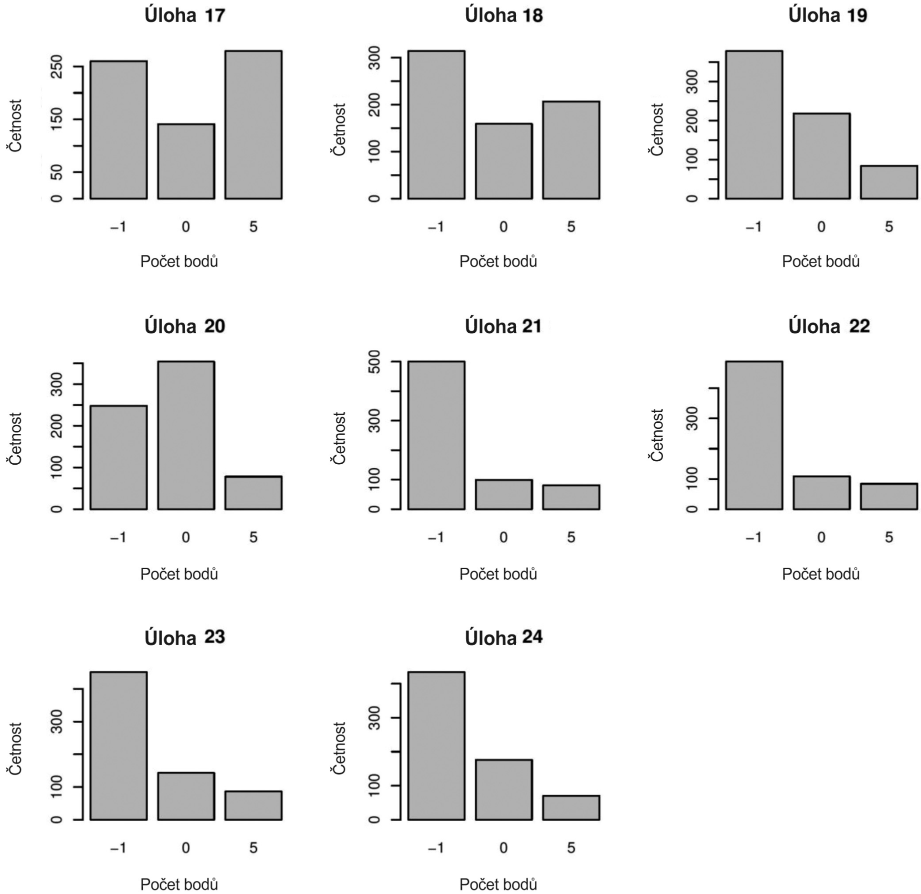
Číslo úlohy	9	10	11	12	13	14	15	16
Index obtížnosti P	16,8	71,5	12,9	25,6	**44,6**	**30,9**	**35,4**	**57,1**
Pořadí podle úspěšnosti řešení	17.	3.	18.	16.	**9.**	**14.**	**13.**	**7.**



Obrázek 47 *Úspěšnost řešení čtyřbodových úloh*

Tabulka 17 *Úspěšnost řešení pětibodových úloh a jejich pořadí podle úspěšnosti řešení v testu*

Číslo úlohy	17	18	19	20	21	22	23	24
Index obtížnosti P	**41,0**	**30,4**	12,4	11,5	11,9	12,4	12,6	10,3
Pořadí podle úspěšnosti řešení	**12.**	**15.**	20.–21.	22.	21.	20.–21.	19.	24.



Obrázek 48 ***Úspěšnost řešení pětibodových úloh***

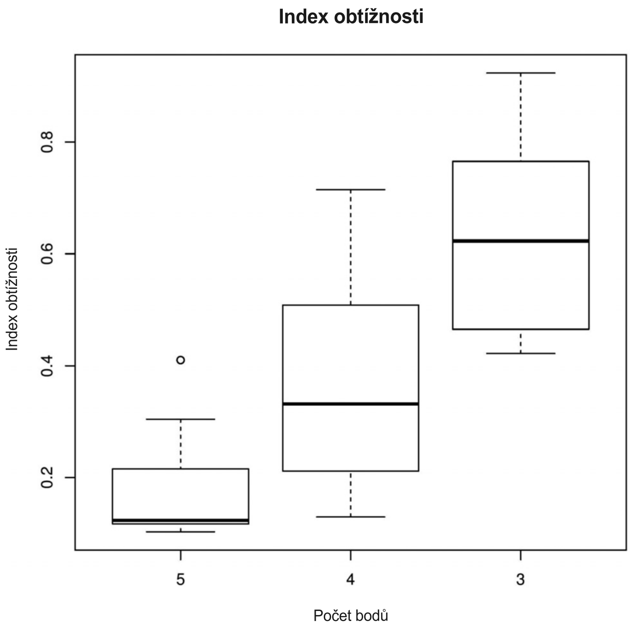
Úspěšnost řešení se pohybovala ve velmi širokém rozpětí 92,4–10,3 %. Pokud přijmeme obvyklé požadavky na obtížnost úloh v testu (Burjan, 2003), je zřejmé, že první a druhá úloha v testu velmi úspěšně plní roli „startovací“ úlohy, jejichž zařazení je motivováno psychologickými důvody. Další tři ze skupiny tříbodových úloh však nedosáhly ani 50% úspěšnosti.

Podle očekávání autorů testu jsou s nejnižší úspěšností řešeny úlohy ze skupiny pětibodových: č. 19–24, které dosáhly pouze málo přes 10 %, jako nejobtížnější se ukázala být poslední úloha – č. 24 (10,3 %).

Obvykle se dále požaduje, aby spektrum obtížnosti bylo široké, ale v mezích 30–70 %. Uvedený požadavek v hodnoceném testu splňuje pouze 12 úloh. Přitom 9 úloh má index obtížnosti nižší než 30 %, pouze 3 úlohy (z toho 2 startovací) vyšší než 70 %.

Testována byla nulová hypotéza:
Mezi úspěšností řešení tříbodových, čtyřbodových a pětibodových úloh není statisticky významný rozdíl.

Vzhledem k porušení předpokladu normality u pětibodových úloh jsme použili neparametrický Kruskal-Wallisův test, který zamítá hypotézu, že bodová hodnota úloh nemá na úspěšnost řešení vliv (p-val = 0,0006). Nulovou hypotézu nepřijímáme. Úlohy ohodnocené 3 body jsou řešeny nejúspěšněji, úlohy za 5 bodů nejméně úspěšně. Pomocí neparametrického porovnávání navíc zjistíme, že se výrazně liší úspěšnost při řešení tří- a pětibodových úloh.



Obrázek 49 ***Porovnání výsledků podle bodové hodnoty úlohy***

Zjištěné rozdíly jsou ovšem také „uvnitř“ jednotlivých skupin úloh. V souboru tříbodových úloh se pohybuje úspěšnost řešení v rozmezí 92,4 % až 42,2 %, u čtyřbodových 71,5 % až 12,9 %, pětibodových 41,0 % až 10,3 %.

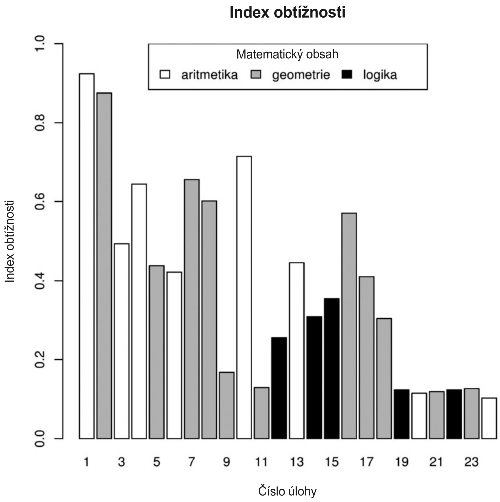
Kritérium matematického obsahu a tématu učiva

Posouzení úspěšnosti řešení jednotlivých soutěžních úloh vzhledem k jejich matematickému obsahu či tématu učiva lze vyčíst z následujícího grafu. Z 8 úloh s nejnižší úspěšností řešení jsou 2 úlohy aritmetické, 4 úlohy geometrické a 2 úlohy logické. Současně se ukázalo, že mezi 4 geometrickými úlohami s velmi nízkou úspěšností řešení se vyskytují úlohy vyžadující nikoliv prokázání znalosti konkrétního geometrického učiva, dovednost geometrických konstrukcí nebo výpočtů, ale schopnost „geometrické inteligence“, představivosti v rovině nebo prostoru (úlohy číslo 9, 11, 21, 23). Výsledek se zdá naznačovat, že v primárním matematickém vzdělávání stále přetrvává v rámci geometrické komponenty učiva malá pozornost právě rozvíjení obecnějších geometricky zaměřených schopností. Přestože je rozvoj prostorové představivosti obecně považován za jeden ze stěžejních cílů geometrického vzdělávání, není této významné schopnosti a jejímu rozvíjení stále ještě věnován dostatečný prostor. Uvedenou skutečnost potvrzují rovněž výstupy výzkumných šetření i teoretických studií (Molnár, 2004; Rendl et al., 2013).

Uvědomujeme si ovšem, že naše zjištění mají vzhledem k velikosti výzkumného vzorku a zaměření výzkumu pouze omezenou platnost a nelze z nich vyvozovat kategorické soudy. Přesnější analýza problematiky by si vyžádala nový, jinak koncipovaný výzkum.

Tabulka 18 *Úspěšnost řešení úloh podle matematického obsahu a jejich pořadí podle úspěšnosti řešení v testu*

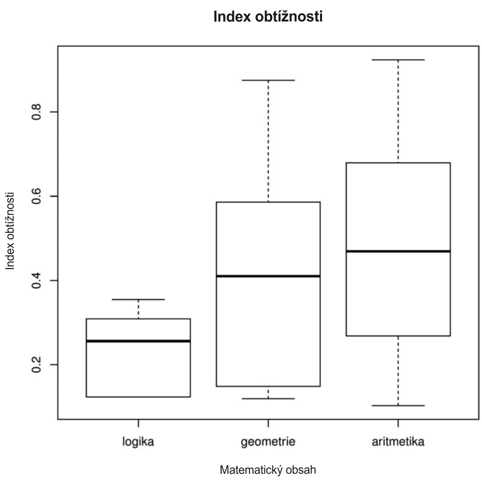
Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8
Index obtížnosti P	**92,4**	**87,5**	**49,3**	**64,4**	**43,8**	**42,2**	**65,8**	**60,1**
Matematický obsah úlohy	**A**	**G**	**A**	**A**	**G**	**A**	**G**	**G**
Číslo úlohy	9	10	11	12	13	14	15	16
Index obtížnosti P	**16,8**	**71,5**	**12,9**	**25,6**	**44,6**	**30,9**	**35,4**	**57,1**
Matematický obsah úlohy	**G**	**A**	**G**	**L**	**A**	**L**	**L**	**G**
Číslo úlohy	17	18	19	20	21	22	23	24
Index obtížnosti P	**41,0**	**30,4**	**12,4**	**11,5**	**11,9**	**12,4**	**12,6**	**10,3**
Matematický obsah úlohy	**G**	**G**	**L**	**A**	**G**	**L**	**G**	**A**



Obrázek 50 ***Kritérium matematického obsahu úlohy***

Testována byla nulová hypotéza:
Mezi úspěšností řešení aritmetických, geometrických a logických úloh není statisticky významný rozdíl.

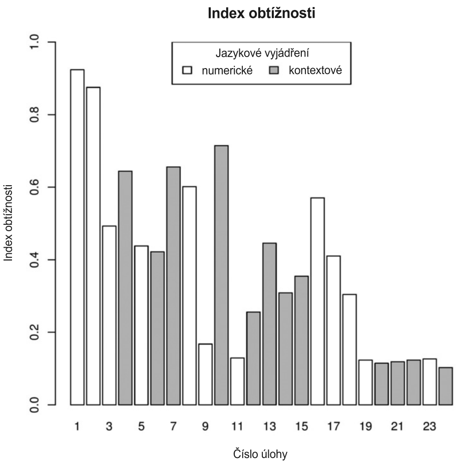
Pomocí Shapiro-Wilk testu byla ověřena normalita dat a Bartlettův test navíc nevyloučil shodu rozptylů. Vliv obsahu tedy můžeme ověřit pomocí ANOVY, která hypotézu o shodě středních hodnot v rámci jednotlivých skupin nezamítá (p–val = 0,89). Matematický obsah úlohy nemá vliv na úspěšnost jejího řešení. Nulovou hypotézu přijímáme.



Obrázek 51 ***Porovnání výsledků podle matematického obsahu úlohy***

Kritérium jazykového vyjádření úlohy

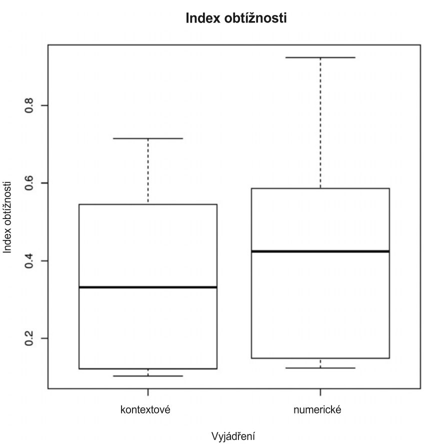
Dalším znakem, který je předmětem analýzy, je způsob jazykového vyjádření úlohy. Rozlišili jsme úlohy čistě matematické (numerické), tj. úlohy zadané v matematickém jazyce, matematickými termíny a symboly, a úlohy kontextové (slovní), zadané v přirozeném jazyce, vycházející z reálné situace. Rozdělení úloh podle uvedeného hlediska lze vyčíst z tabulky 8.



Obrázek 52 ***Kritérium jazykového vyjádření úlohy***

Testována byla nulová hypotéza:

Mezi úspěšností řešení numerických a kontextových úloh není statisticky významný rozdíl.



Obrázek 53 ***Porovnání výsledků podle jazykového vyjádření úlohy***

Protože nezamítáme normalitu dat, ověřili jsme hypotézu o shodě středních hodnot t-testem. Hypotéza nebyla zamítnuta (p-val = 0,63) a jazykové vyjádření úlohy tedy nemá vliv na její obtížnost. Nulovou hypotézu přijímáme, mezi úspěšností řešení slovních úloh a úloh vyjádřených v matematickém jazyce nebyl zjištěn statisticky významný rozdíl.

Zjištěné výsledky ovšem nedovolují zcela jednoznačné a kategorické soudy. Porozumění textu, ale také obtíže spojené s transformací textové podoby úlohy do vhodné reprezentace v matematickém jazyce nebo grafické se mohou promítnout do úspěšnosti řešení kontextových úloh. A to přesto, že úlohy v soutěžním testu mají charakter položek s výběrem odpovědi, nevyžadují tedy obvykle požadovaný postup řešení. Uvědomujeme si rovněž, že vyšší počet kontextových úloh byl zařazen do skupin úloh čtyřbodových a pětibodových, že v textové formě byly častěji zadávány úlohy ze skupiny logických. Obě uvedené skutečnosti vedou k určité opatrnosti v interpretaci našich statistických zjištění.

– 3 – 3 – 2 Vliv faktorů intervenujících do výsledku testu

Výsledky statistické analýzy zjištěných dat umožnily posoudit vliv předpokládaných faktorů intervenujících do celkového výsledku respondentů. Těmito faktory – v našem výzkumu nezávisle proměnné, které mají charakter osobnostních předpokladů žáků – byly v souladu s hypotézami definovány navštěvovaný ročník, pohlaví, místo navštěvované školy, známka z matematiky (přesnější charakteristika je uvedena v kapitole 3.3.1).

Metodika zvolená pro porovnávání úspěšnosti řešení úloh jednotlivými skupinami žáků byla popsána v kapitole 3.2.2, věnované metodám zpracování získaných výzkumných dat.

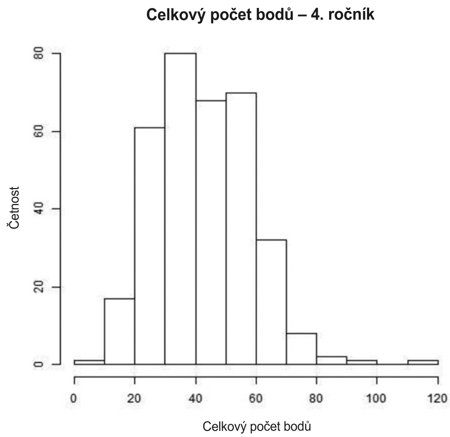
Navštěvovaný ročník k datu 20. 3. 2015 – žáci 4. a 5. ročníku (popisná statistika – vliv navštěvovaného ročníku na celkový bodový zisk):

Výsledky žáků 4. ročníku:

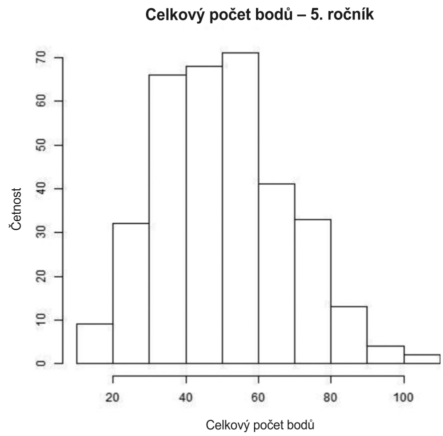
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max
5,00	31,00	42,00	43,23	54,00	114,00

Počet žáků 4. ročníku v souboru 341
Směrodatná odchylka 15,62

Počty získaných bodů žáky 4. ročníku se pohybují od 5 do 114. (Nejlepší i nejhorší výsledek byl dosažen ve 4. ročníku.) Jen 25 % žáků dosáhlo méně než 31 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 54 bodů. Mediánem je 42 bodů, průměrný zisk 43,23 se směrodatnou odchylkou 15,62. Většina žáků tedy měla bodový zisk mezi 12 a 74 body.



Obrázek 54 ***Celkový počet získaných bodů – žáci 4. ročníku***



Obrázek 55 ***Celkový počet získaných bodů – žáci 5. ročníku***

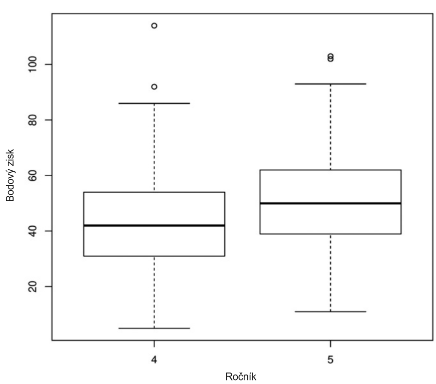
Výsledky žáků 5. ročníku:

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
11,00	39,00	50,00	50,71	62,00	103,00

Počet žáků 5. ročníku v souboru 339
Směrodatná odchylka 17,47

Počty získaných bodů žáky 5. ročníku se pohybují od 11 do 103. Jen 25 % studentů dosáhlo méně než 39 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 62 bodů. Mediánem je 50 bodů, průměrný zisk byl 50,71 se směrodatnou odchylkou 17,47. Většina žáků tedy měla bodový zisk mezi 15 a 85 body.

Testována byla nulová hypotéza:
Mezi výsledky žáků 4. a 5. ročníku ZŠ není statisticky významný rozdíl.



Obrázek 56 ***Porovnání výsledků žáků 4. a 5. ročníku – vliv ročníku na celkový počet bodů***

Hypotéza byla testována dvouvýběrovým Wilcoxonovým testem vzhledem ke skutečnosti, že data nevykazují normální rozdělení, jsou však symetrická. Hypotézu o shodě rozdělení jednoznačně zamítáme (p-val = 3,61 . 10^{-8}), zamítáme i nulovou hypotézu.

Navštěvovaný ročník má významný vliv na celkový počet dosažených bodů, žáci 5. ročníku jsou v soutěžním testu úspěšnější.

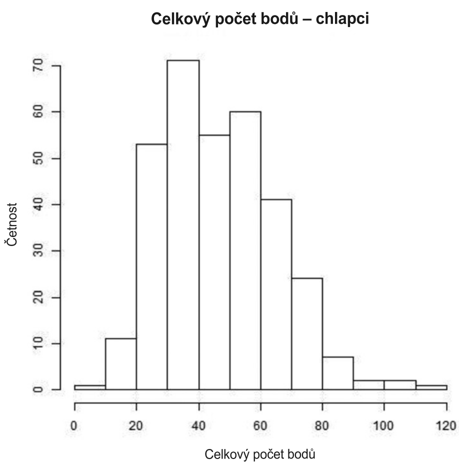
Porovnání výsledků chlapců a dívek (popisná statistika – vliv pohlaví respondentů na celkový bodový zisk):

Výsledky chlapců:

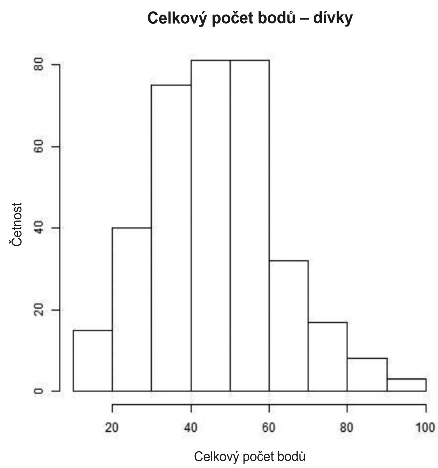
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
5,00	32,00	46,50	47,20	59,25	114,00

Počet chlapců v souboru 328
Směrodatná odchylka 18,03853

Počty získaných bodů se u chlapců pohybují od 5 do 114. Jen 25 % z nich dosáhlo méně než 32 bodů a jen 25 % překročilo hranici 59 bodů. Mediánem je 46,5 bodů, průměrný zisk byl 47,2 se směrodatnou odchylkou 18. Většina chlapců tedy měla bodový zisk mezi 11 a 83 body.



Obrázek 57 *Celkový počet získaných bodů – chlapci*



Obrázek 58 *Celkový počet získaných bodů – dívky*

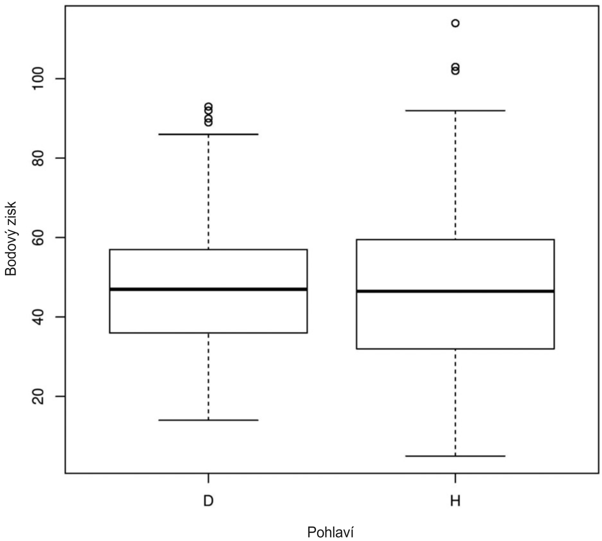
Výsledky dívek:

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
14,00	36,00	47,00	46,73	57,00	93,00

Počet dívek v souboru 352
Směrodatná odchylka 15,94

Počty získaných bodů se u dívek pohybují od 14 do 93. (Nejlepší ale i nejhorší bodový zisk v celém souboru respondentů tedy patřil chlapcům.) Jen 25 % z dívek dosáhlo méně než 36 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 57 bodů. Mediánem je 47 bodů, průměrný zisk byl 46,73 se směrodatnou odchylkou 15,94. Většina dívek tedy měla bodový zisk mezi 14 a 78 body.

Testována byla nulová hypotéza:
Mezi výsledky chlapců a dívek není statisticky významný rozdíl.



Obrázek 59 ***Porovnání výsledků chlapců a dívek – vliv pohlaví na výsledek v testu***

Statistická hypotéza byla opět testována neparametrickým dvouvýběrovým Wilcoxonovým testem (data jsou v rámci skupin symetricky, ale nikoliv normálně rozdělená), který nezamítá hypotézu o shodě rozdělení bodů děvčat a chlapců (p-val = 0,95). Na základě výsledků testu, jímž nebyl zjištěn statisticky významný rozdíl, nulovou hypotézu přijímáme.

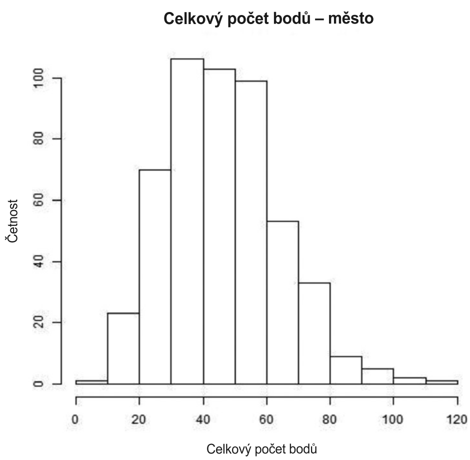
Místo navštěvované školy (město/vesnice) – popisná statistika – vliv místa navštěvované školy na celkový bodový zisk:

Výsledky žáků z městských škol:

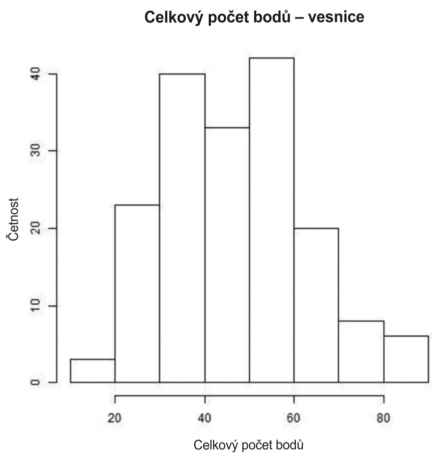
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
5,00	33,00	46,00	46,73	57,00	114,00

Počet žáků městských škol v souboru 505
Směrodatná odchylka 17,39

Počty získaných bodů žáků městských škol se pohybují od 5 do 114. (Nejlepšího i nejhoršího výsledku bylo dosaženo ve městě.) Jen 25 % žáků městských škol dosáhlo méně než 33 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 57 bodů. Mediánem je 46 bodů, průměrný zisk byl 46,73 se směrodatnou odchylkou 17,39. Většina žáků tedy měla bodový zisk mezi 12 a 82 body.



Obrázek 60 ***Celkový počet získaných bodů – žáci městských škol***



Obrázek 61 ***Celkový počet získaných bodů – žáci vesnických škol***

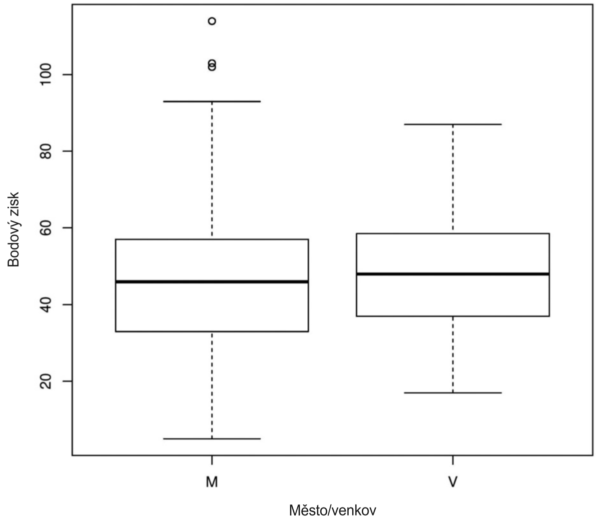
Výsledky žáků vesnických škol:

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
17,00	37,00	48,00	47,61	58,50	87,00

Počet žáků vesnických škol v souboru 175
Směrodatná odchylka 15,73

Počty získaných bodů žáků vesnických škol se pohybují od 17 do 87. Jen 25 % žáků vesnických škol dosáhlo méně než 37 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 58 bodů. Mediánem je 48 bodů, průměrný zisk byl 47,61 se směrodatnou odchylkou 15,73. Většina žáků tedy měla bodový zisk mezi 16 a 78 body.

Testována byla nulová hypotéza:
Mezi výsledky žáků městských a venkovských škol není statisticky významný rozdíl.



Obrázek 62 ***Porovnání výsledků žáků podle sídla školy – vliv místa navštěvované školy na výsledek v testu***

K testování hypotézy byl opět použit neparametrický dvouvýběrový Wilcoxonův test (data jsou v rámci skupin symetricky, ale nikoliv normálně rozdělená). Test nezamítá hypotézu, že data respondentů z města i vesnice pocházejí ze stejného rozdělení (p-val = 0,43). Sledovaný faktor nemá na výsledek v testu statisticky významný vliv. Přijímáme nulovou hypotézu.

Porovnávání výsledků, dosažených žáky na jednotlivých školách, a tedy i stanovení pořadí jednotlivých škol podle celkové úspěšnosti v soutěži je z několika důvodů problematické (viz kap. 2.2.2). Přesto jsme učinili pokus o zjištění, zda lze najít významné rozdíly mezi jednotlivými školami v našem výzkumném šetření. Vzhledem k nedostatečnému počtu pozorování bylo nutné několik škol z tohoto testování vyřadit. Testovali jsme hypotézu, že celkové počty dosažených bodů žáků z jednotlivých škol pocházejí z rozdělení se stejnou střední hodnotou (škola nemá na celkový bodový zisk studenta vliv). Pomocí Bartlettova testu jsme ověřili shodu rozptylů (p-val = 0,05846), normalita tedy nebyla porušena. Hypotéza se testovala pomocí analýzy rozptylu ANOVA. Výsledkem bylo zamítnutí nulové hypotézy (p-val = 0,00015): na celkový bodový zisk studenta má vliv konkrétní škola, z níž žák pochází. Abychom zjistili, mezi kterými školami je významný rozdíl, použili jsme Tukeyho HSD metodu mnohonásobného porovnávání. Metoda ukázala, že významný rozdíl je pouze mezi bodovými zisky žáků jedné městské školy v kraji Vysočina (14,53928) a městské školy s rozšířenou výukou matematiky v kraji Olomouckém (18,86447).

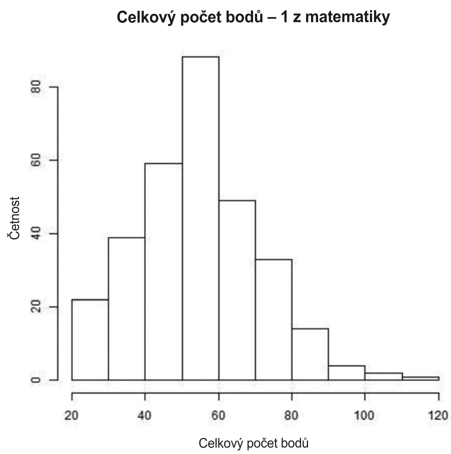
Klasifikace z matematiky na pololetním vysvědčení (popisná statistika – vliv klasifikace z matematiky na celkový bodový zisk):

Výsledky žáků se známkou výborně:

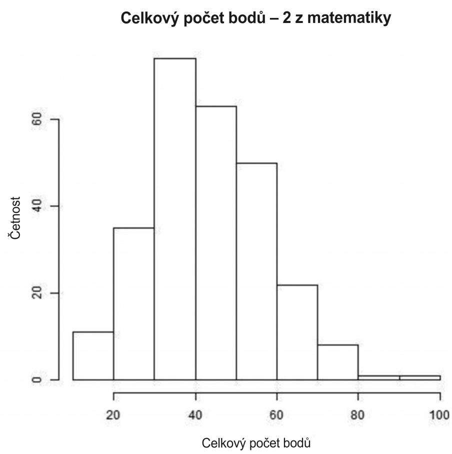
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
22,0	43,5	54,0	55,0	66,0	114,0

Počet studentů s 1 v souboru 311
Směrodatná odchylka 16,41

Počty získaných bodů se u žáků klasifikovaných výborně pohybují od 22 do 114 (nejvíce bodů získal jedničkář). Jen 25 % žáků dosáhlo méně než 43,5 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 66 bodů. Mediánem je 54 bodů, průměrný zisk byl 55 se směrodatnou odchylkou 16,41. Většina žáků tedy dosáhla bodového zisku mezi 22 a 87 body.



Obrázek 63 ***Celkový počet získaných bodů – žáci klasifikovaní známkou výborně***



Obrázek 64 ***Celkový počet získaných bodů – žáci klasifikovaní známkou chvalitebně***

Výsledky žáků se známkou chvalitebně:

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
11,00	33,00	43,00	43,48	53,00	92,00

Počet studentů s 2 v souboru 265
Směrodatná odchylka 14,02

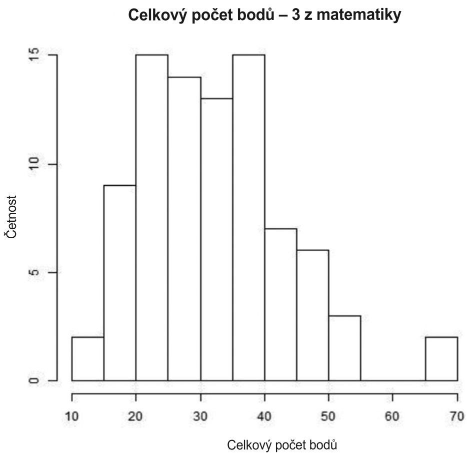
Počty získaných bodů se u žáků klasifikovaných chvalitebně pohybují od 11 do 92. Jen 25 % žáků dosáhlo méně než 33 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 53 bodů. Mediánem je 43 bodů, průměrný zisk byl 43,48 se směrodatnou odchylkou 14,02. Většina žáků tedy dosáhla bodového zisku mezi 15 a 71 body.

Výsledky žáků se známkou dobře:

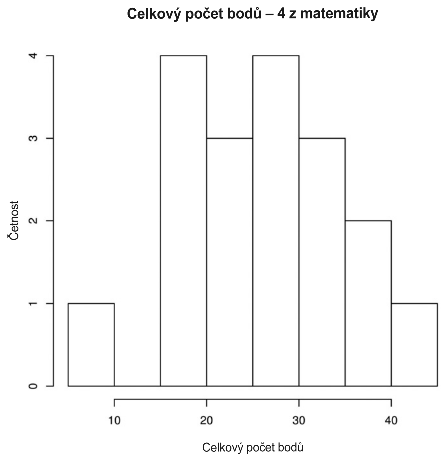
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
14,00	24,25	31,50	32,85	40,00	67,00

Počet studentů s 3 v souboru 86
Směrodatná odchylka 11,21

Počty získaných bodů se u žáků klasifikovaných dobře pohybují od 14 do 67. Jen 25 % žáků dosáhlo méně než 24 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 40 bodů. Mediánem je 31,5 bodů, průměrný zisk byl 32,85 se směrodatnou odchylkou 11,21. Většina žáků tedy dosáhla bodového zisku mezi 11 a 55 body.



Obrázek 65 ***Celkový počet získaných bodů – žáci klasifikovaní známkou dobře***



Obrázek 66 ***Celkový počet získaných bodů – žáci klasifikovaní známkou dostatečně***

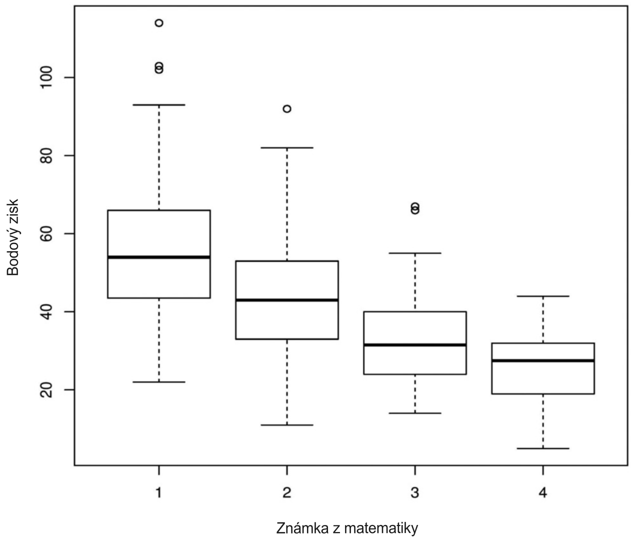
Výsledky žáků se známkou dostatečně:

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
5,00	19,75	27,50	26,50	31,75	44,00

Počet studentů se 4 v souboru 18
Směrodatná odchylka 9,57

Počty získaných bodů se u žáků klasifikovaných dostatečně pohybují od 5 do 44 (nejméně bodů získal čtyřkař). Jen 25 % žáků dosáhlo méně než 20 bodů a pouze 25 % překročilo hranici 32 bodů. Mediánem je 27,5 bodů, průměrný zisk byl 26,5 se směrodatnou odchylkou 9,57. Většina žáků tedy dosáhla bodového zisku mezi 8 a 44 body.

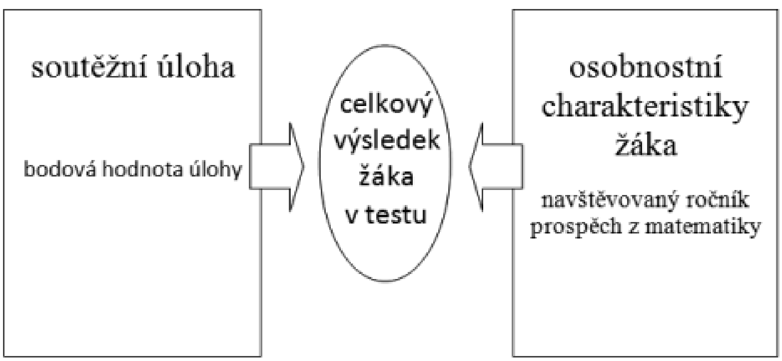
Testována byla nulová hypotéza:
Mezi výsledky žáků klasifikovaných z matematiky jednotlivými klasifikačními stupni není statisticky významný rozdíl.



Obrázek 67 ***Porovnání výsledků žáků podle klasifikace z matematiky***

K testování hypotézy byl použit neparametrický Kruskal-Wallisův test (pro více než 2 nezávislé výběry), který zamítá hypotézu, že známka nemá na výsledek v testu vliv (že rozdělení celkového počtu bodů v jednotlivých skupinách je stejné), p-value < 2.2e − 16. Neparametrickým mnohonásobným porovnáváním navíc zjistíme, že se liší dvojice:
1,2 1,3 1,4 2,3 2,4.

Statisticky významně lepších hodnot dosahují tedy žáci klasifikovaní výborně a chvalitebně oproti žákům klasifikovaným dobře a dostatečně. Mezi skupinami se známkou dobře a dostatečně významné rozdíly nejsou. Klasifikace z matematiky má vliv na celkový počet získaných bodů, nulovou hypotézu zamítáme.



Obrázek 68 ***Faktory, které reálně intervenovaly do výsledku žáka v testu***

– 3 – 3 – 3 Posouzení rozsahu platnosti hypotéz výzkumu

V projektu výzkumu byly v návaznosti na jeho cíle formulovány výzkumné otázky a soubor hypotéz. Na základě interpretace výsledků, které výzkumné šetření přineslo, můžeme posoudit rozsah platnosti stanovených hypotéz.

VO_1: Jakých výsledků vyjádřených absolutním bodovým ziskem dosáhli žáci v soutěžním testu?

- Analýzou výsledků bylo zjištěno, že celkové výsledky dosažené jednotlivými řešiteli se významně liší.
- V našem souboru respondentů se pohyboval dosažený výsledek v širokém rozmezí 5–114 bodů, konkrétní údaje o jednotlivých bodových ziscích v uvedeném rozmezí vyplývají z tabulky 11 a obrázků 38 a 39.

VO_2: Závisí výsledek žáků na typu a charakteru úloh v soutěžním testu?

Nejprve jsme se pokusili určit množinu nevyplněných, neřešených a nedosažených úloh, které reflektují očekávání řešitelů o neúspěchu při jejich řešení. Byly identifikovány nevyplněné, neřešené a nedosažené v souborech úloh:
- tříbodových, čtyřbodových a pětibodových,
- podle jejich matematického obsahu,
- podle jejich jazykového vyjádření,

jak vyplývá z charakteristiky výsledků vyjádřených v tabulkách 12–18 a obrázcích 40–53.

H_{21}: Jednotlivé soutěžní úlohy jsou řešeny s různou mírou úspěšnosti. Úlohy ohodnocené 3 body jsou řešeny nejúspěšněji, úlohy ohodnocené 5 body jsou řešeny nejméně úspěšně.

Statistická analýza, která se opírala o stanovení indexu obtížnosti úloh, umožnila vyčlenit tři kategorie úloh: úlohy s indexem obtížnosti vyšším než 70 %, úlohy s indexem obtížnosti 30–70 %, kterým jsme přisoudili diagnostickou a selektivní funkci, a úlohy s indexem obtížnosti nižším než 30 %.

Testováním nulové hypotézy: *Mezi úspěšností řešení tříbodových, čtyřbodových a pětibodových úloh není statisticky významný rozdíl* neparametrickým Kruskal-Wallisovým testem se platnost hypotézy H_{21} prokázala. Úlohy ohodnocené 3 body jsou řešeny nejúspěšněji, úlohy ohodnocené 5 body jsou řešeny nejméně úspěšně. Rozdíly mezi jednotlivými úlohami jsou z hlediska úspěšnosti řešení respondenty našeho výzkumu značné (viz kapitola 3.3.1.2), úlohy jsou řešeny s různou mírou úspěšnosti. Z analýzy nevyplněných, neřešených a nedosažených úloh však vyplývá, že pětibodové úlohy mají největší počet nevyplněných, neřešených a nedosažených, což je třeba do interpretace rovněž zahrnout. Usuzujeme, že pětibodové úlohy byly pro některé řešitele natolik obtížné, že je vůbec neřešili.

H_{22}: Úspěšnost řešení úloh je ovlivněna jejich matematickým obsahem a tématem učiva, ze kterého jsou zvoleny.

Statistická hypotéza: *Mezi úspěšností řešení aritmetických, geometrických a logických úloh není statisticky významný rozdíl* byla testována pomocí analýzy rozptylu ANOVA, nulová hypotéza byla přijata. Matematický obsah a téma učiva neovlivnily výsledek respondentů v testu.

H_{23}: Slovní (kontextové) úlohy mají nižší úspěšnost řešení než úlohy čistě matematické, zadané v matematickém jazyce.

K testování nulové hypotézy: *Mezi úspěšností řešení numerických a kontextových úloh není statisticky významný rozdíl* byl použit t-test, nulová hypotéza byla přijata. Hypotézu H_{23} proto nepřijímáme.

VO_3: Jsou výsledky žáků v testu ovlivněny jejich osobnostními charakteristikami?

$H_{31:}$ Žáci 5. ročníku dosahují při řešení stejných soutěžních úloh lepších výsledků než žáci 4. ročníku.

Nulová hypotéza: *Mezi výsledky žáků 4. a 5. ročníku ZŠ není statisticky významný rozdíl* byla testována dvouvýběrovým Wilcoxonovým testem a byla zamítnuta. Navštěvovaný ročník má významný vliv na celkový počet dosažených bodů, žáci 5. ročníku jsou v soutěžním testu úspěšnější. Výzkumná hypotéza byla prokázána.

Zjištěné výsledky ukazují, že zejména pro žáky 4. ročníku byly úlohy v soutěžním testu značně náročné. Rozdíly ve věku žáků jsou v tomto věkovém období významné a promítají se nejen do úrovně osvojených matematických vědomostí a dovedností žáků, ale i šířeji do kognitivní oblasti jejich osobnosti. Naše závěry zjištěné výzkumem se velmi přibližují zkušenostem učitelů primární školy, kteří považují žáky 4. ročníku pro soutěž v uvedeném pojetí za nedostatečně vyzrálé. Rovněž celostátní statistika výsledků uvádí, že z 22 nejúspěšnějších řešitelů v kategorii Klokánek s plným bodovým ziskem 120 bodů je 17 žáků 5. ročníku a pouze 5 žáků 4. ročníku. Přitom je ovšem třeba uvést, že nejlepší výsledek 114 bodů dosáhl v souboru respondentů našeho výzkumu žák 4. ročníku ZŠ!

H_{32}: Výsledky žáků stejného ročníku nezávisí na pohlaví.

Statistická hypotéza: *Mezi výsledky chlapců a dívek není statisticky významný rozdíl* byla opět testována neparametrickým dvouvýběrovým Wilcoxonovým testem, jímž nebyl zjištěn statisticky významný rozdíl, nulovou hypotézu přijímáme. Výzkumná hypotéza byla prokázána.

Mezi chlapci a dívkami jsme v míře úspěšnosti řešení soutěžních úloh nenašli významné rozdíly. Domníváme se, že v celkovém výsledku může hrát významnou roli spíše zkušenost žáků s řešením podobných úloh ve škole nebo jiné faktory než genderové rozdíly mezi žáky.

$H_{33:}$ Žáci z městských škol dosahují v soutěži stejných výsledků jako žáci z venkovských škol.

K testování nulové hypotézy: *Mezi výsledky žáků městských a venkovských škol není statisticky významný rozdíl* byl opět použit neparametrický dvouvýběrový

Wilcoxonův test, kterým byla prokázána platnost nulové hypotézy. Výzkumnou hypotézu tedy přijímáme. Rozptyl hodnot však naznačoval, že jak ve městě, tak na vesnici můžeme nalézt úspěšné i neúspěšné řešitelé.

H_{34}: Výsledky žáků v soutěži odpovídají jejich školnímu prospěchu z matematiky. Nejlepších výsledků dosahují žáci klasifikovaní výborně, nejslabších výsledků žáci klasifikovaní dobře a dostatečně.

Platnost hypotézy byla potvrzena. Nulová hypotéza: *Mezi výsledky žáků klasifikovaných z matematiky jednotlivými klasifikačními stupni není statisticky významný rozdíl* byla testována Kruskal-Wallisovým testem, nebyla přijata. Klasifikace respondentů z matematiky má vliv na celkový počet získaných bodů. Žáci klasifikovaní výborně a chvalitebně dosáhli statisticky významně lepších výsledků. Lepší známka z matematiky indikovala vyšší míru úspěšnosti řešení. Mezi žáky s trojkou a čtyřkou na vysvědčení však tyto rozdíly nebyly významné. Domníváme se, že známka z matematiky ukazuje na rozdíly v úspěšnosti řešení úloh (jedničkáři jsou v řešení úspěšnější).

Při bližším zkoumání jsme zjistili, že i mezi žáky, kteří měli na vysvědčení z matematiky trojku nebo čtyřku (104 žáci) byli zjištěni úspěšní řešitelé. Lze usuzovat, že mezi žáky, které učitelé označují jako neúspěšné a klasifikují je nižším stupněm z matematiky, existují žáci, kteří mají pravděpodobně podstatně vyšší potenciál, jejž ve školní výuce matematiky neprojevili nebo neměli příležitost projevit (například proto, že škola hodnotí jiné ukazatele úspěšnosti).

Zjištěný výsledek není ani v rozporu se zkušeností některých učitelů, upozorňujících na skutečnost, že v soutěži Matematický klokan mohou překvapivě dosáhnout velmi dobrých výsledků i žáci prospěchově průměrní nebo slabší. Musíme však vzít v úvahu skutečnost, že v našem vzorku – stejně jako mezi soutěžícími v celé republice – významně převažují žáci, kteří dosahují v matematice „lepších“ výsledků. V našem souboru byla téměř polovina respondentů (45,6 %) klasifikována prospěchem výborným, zatímco s prospěchem dostatečným pouhých 2,6 % žáků.

Z celkového počtu 7 výzkumných hypotéz bylo přijato 5, zatímco 2 hypotézy nebyly výzkumem potvrzeny.

– 4 – Závěr

V roce 2004 uskutečnila autorka předkládané monografie výzkumné šetření v rámci své disertační práce, zaměřené na kvantitativní i kvalitativní analýzu řešení nestandardních matematických učebních úloh z kategorie Klokánek, zadaných v soutěži Matematický klokan. Respondenty výzkumu byli žáci 4. a 5. ročníku vybraných škol v olomouckém regionu. Dílčí výstupy byly prezentovány na setkáních didaktiků matematiky a učitelů základních škol v rámci vědeckých a odborných konferencí, publikovány ve sbornících z těchto konferencí a didaktických časopisech autorkou samostatně nebo ve spoluautorství se svým školitelem.

Ve stejném formátu byl připraven a v roce 2015 realizován výzkum, jehož výstupy přinesly poznatky, které uvádíme v závěrečném přehledu. Východiskem výzkumu se staly dosavadní zkušenosti, jež byly získány v rovině teoretického zkoumání problematiky soutěžních úloh, jejich řešení žáky primární školy a dosavadních ročníků soutěže.

Obecným cílem bylo shromáždit dosavadní zkušenosti získané organizátory, učiteli i žáky v uplynulých ročnících soutěže Matematický klokan v České republice, analyzovat soutěžní test a jednotlivé úlohy zadané v kategorii Klokánek v roce 2015 a jejich řešení žákem základní školy. Uvedené problematice nebyla dosud v podmínkách České republiky věnována systematická pozornost.

Pro přípravu a realizaci výzkumu bylo nezbytné využít teoretického zpracování problematiky matematických učebních úloh a jejich řešení na pozadí aktuálních změn ve vzdělávacím obsahu matematiky v primární škole a také v souvislosti s inovovaným kurikulem.

S využitím mnoha podkladů získaných při přípravě české verze soutěžních úloh i při každoroční analýze výsledků v kategoriích určených žákům 1. stupně ZŠ bylo možno provést deskripci historie i současného stavu soutěže – uvádíme ji v kapitole 2.2. Tato část publikace poskytuje rovněž příležitost k posouzení smyslu soutěže a k zamyšlení nad její další realizací.

Další „vedlejší efekt“ aktivit, souvisejících se systematickou prací spojenou se soutěží, přineslo v roce 2005 vyhlášení nové soutěžní kategorie pro žáky 2. a 3. ročníku ZŠ, která v této době ještě neměla mezinárodní ekvivalent. V českém prostředí zvolila autorka také název kategorie – Cvrček – a stala se garantem české verze úloh pro tuto kategorii. Roku 2011 se soutěžní kategorie pro žáky ve věku 7–9 let dostala do mezinárodního povědomí, získala název Pre-ècolier a setkala se s velmi příznivým ohlasem.

Zřetelně se ukázalo, že Matematický klokan je soutěží, která dosáhla nejen v České republice mimořádné popularity. Nejde pouze o její podíl na zvýšení obliby matematiky jako školního předmětu, ale matematiky jako vědy, mající svůj hluboký základ a dopad na každodenní život. Současně se jedná o soutěž, která počtem účastníků i svým záběrem, zasahujícím žáky a studenty ve věku 7 až 18 let, získala významné postavení ve školské praxi. Přitom právě námi analyzovaná kategorie Klokánek (žáci 4. a 5. ročníku) byla prakticky po celou dobu zastoupená největším počtem účastníků[58]. Některá data o soutěži v prvních deseti letech jejího uskutečňování v podmínkách české školy jsou uvedena v publikaci Deset let s Matematickým klokanem (Novák et al., 2005).

Za zvláště významný závěr považujeme potvrzení dosud jen intuitivně vnímaných zjištění, že soutěž se na školách setkává s výrazným pozitivním ohlasem mezi žáky i učiteli. Přesvědčivě to dokazují nejen data z dotazníkového šetření uskutečněného mezi učiteli primární školy shrnutá v kapitole 2.2.3, která korespondují s četnými příznivými ohlasy mezi učiteli i rodičovskou veřejností, ale také vysoké počty každoročních účastníků soutěže.

Soutěžní úlohy z kategorie Klokánek zadané v roce 2015, jejich řešení a didaktická analýza jsou obsahem jedné z kapitol. Chtěli jsme ukázat, že řešení úloh přesahuje horizont jednorázové individuální soutěže. Přestože testové úlohy jsou uzavřené, řešitel se obvykle neobejde bez pomocných výpočtů, poznámek, nákresů. V kapitole jsme se pokusili na několika autentických ukázkách doložit, jak se žáci prostřednictvím zápisů či nákresů pokoušejí získat vhled do úlohy a jejího řešení. K zápisům, náčrtkům nebyli při zadání soutěžního testu přímo vyzváni, ale k dispozici měli papíry na „pomocné výpočty“. Naše zkušenost potvrzuje zjištění Vondrové a Rendla (2015, s. 407), že „žáci si dělají poznámky, nikoli zápisy zadání nebo postupu řešení“. Poznámky, ať už dílčích výpočtů nebo grafických znázornění některých kroků řešení, chybných variant apod., jsme se pokusili využít k rekonstrukci žákovských postupů a k přesnějšímu pochopení toho, co bylo v záznamech patrné třeba jen v náznaku.

Pravidelné zařazování řešení nestandardních a divergentních učebních úloh do výuky matematiky na primárním stupni vzdělávání považujeme za vhodný instrument k rozvíjení osobnosti žáků. Matematický klokan oproti jiným „výkonovým“ soutěžím, určeným pouze matematickým talentům, má ambici oslovit i jinou cílovou skupinu: žáky „méně nadané“, pro něž jsou účast a úspěch v soutěži spojeny také s kladným emocionálním prožitkem. Soutěž se tak podle našeho názoru stává jedním z vhodných nástrojů popularizace matematiky, formování pozitivního vztahu žáků k matematice a umožňuje využít obliby soutěže k rozvoji dalších aktivit příznivě ovlivňujících atmosféru školní výuky a jejího celkového klimatu. Pokus o odhalení

58 Od roku 2014 dosahuje nejvyššího počtu účastníků kategorie Cvrček. Viz tabulka počtu účastníků v kap. 2.2.2.

některých postupů řešení úloh, které žáci použili, a chyb, jichž se dopustili, může inspirovat učitele k další práci s učebními úlohami v jejich edukačním působení. Současně je příležitostí ke konfrontaci řešitelských postupů účastníka soutěže s očekáváním učitelů, která může korigovat někdy zjednodušené soudy učitele o schopnostech a znalostech žáků. Předpokladem využití uvedených stránek řešení učebních úloh jsou ovšem osvojené profesní kompetence učitele, pro kterého není smyslem soutěže pouhé povinné, formální zapojení žáků jeho třídy. Uvědomujeme si však, že detailnější analýza subtilních mechanismů řešení učebních úloh, o kterou jsme se pokusili v kapitole 3.1.3.1 na malém vzorku žákovských řešení, je časově značně náročná, vyžaduje zájem a diagnostické i reflexivní kompetence učitele.

Empirický výzkum, zaměřený na ověření souboru hypotéz, jsme realizovali metodami kvantitativní analýzy s využitím statistických procedur. Nepřinesl žádné zásadně neočekávané závěry. Přesto jeho uskutečnění považujeme za užitečné, protože exaktními výzkumnými procedurami nebylo v našich podmínkách řešení úloh ze soutěže dosud zjišťováno a posuzováno. Statistickými daty se potvrdilo naše, z dosavadních zkušeností vyplývající intuitivní očekávání, že úspěšnost řešení soutěžních úloh žáky je rozdílná, pohybuje se ve velmi širokém spektru. Konfrontací výsledků výzkumu s celostátní statistikou řešitelské úspěšnosti vyvozujeme, že i další zjištění na našem vzorku řešitelů se do značné míry mohou vztahovat k výsledkům všech účastníků. Jde o vliv faktorů intervenujících do celkového výsledku účastníka soutěže. Svědčí o tom potvrzení hypotéz vztahujících se k vlivu objektivně měřitelných osobnostních charakteristik žáků, za něž považujeme navštěvovaný ročník, pohlaví, školní klasifikaci z matematiky a sídlo školy, na celkový dosažený výsledek.

Bohatý faktografický materiál, který poskytují výsledky soutěže v jednotlivých kategoriích, nabízí příležitost k pravidelnému posuzování a porovnávání kvality matematických znalostí účastníků.

Za podnětnou považujeme rovněž kvantitativní analýzu úloh, jež respondenti výzkumu v odpovědní kartě nevyplnili – neřešili je nebo k nim nedospěli, nedosáhli na ně. Způsob hodnocení, jak je nastaven organizací Kangourou sans frontières pro všechny účastnické země ve všech kategoriích, vytváří prostor pro uplatnění míry predikce, ale i pro sebehodnocení účastníků. Pro řešitele, který si není jist, že úlohu správně vyřeší, je „výhodnější“ nevyplnit ji v záznamovém archu – s hodnocením 0 bodů – než označit nesprávné řešení, za něž by 1 bod ztratil. Subjektivní posouzení úlohy jako příliš obtížné nebo uvážení nedostatku času k řešení patří k významné kompetenci žáka, směřující k dosažení co možná nejlepšího výsledku v testu.

Mimo oblast našeho zájmu zůstalo posouzení vlivu učitele v roli zadavatele úloh a komentátora průběhu řešení na výsledky žáků, jsou-li (a do jaké míry či v jakých konkrétních projevech) výsledky žáků v soutěži a žákovská řešení vůbec ovlivněny výukovým stylem učitele. Lze předpokládat, že nejen situační působení v průběhu soutěže, ale především dlouhodobější systematická práce s žáky do výsledků účastníků podstatněji intervenují. Náš předpoklad by však bylo nutno ověřit novým výzkumem.

Obsah publikace považujeme za využitelný také v matematicky a didakticky orientované komponentě vysokoškolské přípravy budoucích učitelů (nejen) primárních škol a nejen v pregraduálním studiu. Analýza jednotlivých stránek soutěžních úloh v didaktických seminářích a autentický prožitek studentů učitelství spojený s řešením soutěžních úloh „vracejí" studenty do role řešitele – žáka. Soutěže je tak podle našeho názoru možné využít k rozvoji poznatkové báze učitelství (Shulman, 1986), a to nejen didaktické znalosti obsahu vzdělávání a znalosti kurikula, ale také obecnějších kategorií – znalosti o žákovi a jeho charakteristikách. Vlastní aktivní účast studentů učitelství při samotné realizaci soutěže na školách například v rámci pedagogických praxí a její kritická reflexe spojená s evidencí, posuzováním a hodnocením řešení úloh žáky se stávají jedním z konkrétních příkladů žádoucího propojení teoretické komponenty profesní přípravy s edukační realitou. Následná diskuse nad jednotlivými přístupy žáků k řešení úloh, nad použitými strategiemi, společné posouzení logičnosti a efektivnosti vlastních úvah budoucího učitele v konfrontaci s reálným řešením žáků, ocenění řešení některých spolužáků a věcná argumentace patří do poznatkové výbavy učitelů.

– 5 – Summary

The monograph *Analysis of Mathematical Kangaroo competition problems and of their solutions by primary school pupils* focuses on the competition known as *Mathematical Kangaroo* in the Czech Republic. Its potential readers include primary school teachers, prospective teachers, students of pedagogy in all forms and degrees of study as well as parents of children attending their first grades of school. The author, guarantor of the *Pre-ècolier* category for grades 2 and 3 of elementary school and of the *Ècolier* category for grades 4 and 5 of elementary school, has summed up the outcomes of her research based on her more than ten-year long experience with preparing the Czech version of Kangaroo problems and annual analysis of results. Over the last ten years the Kangaroo team has obtained relevant pieces of information, experience and feedback from both teachers and parents. Although some of these had already been presented at meetings of teachers of mathematics, at scientific conferences or published in conference proceedings or didactic journals, this monograph gives a complex view of the issue.

The first part of the monograph discusses the theoretical background of the research in the context of mathematical problems and their solutions with the focus on *Mathematical Kangaroo* (assessment, evaluation, use of the answer sheet, etc.) with respect to current trends in pedagogy and didactics of mathematics. Changes in the primary school mathematics curriculum, which influence topics of the tasks as related to updated *Framework Educational Programme for Basic Education*, are reflected.

The research itself and discussion of its outcomes are included in the second part of the monograph. There readers can find the quantitative analysis of solutions of problems included in the 2015 version of *Ècolier*.

The problems are specific in two respects:

- They are non-standard, i.e. elementary school pupils must apply higher cognitive functions to solve them successfully as simple application of knowledge obtained in mathematics classes is not sufficient.
- They have the form of multiple choice (out of 5 options), which is not a common practice in most primary school whose pupils take part in the competition.

Moreover, the tasks are unique because almost identical tasks (tailored to the context of the respective country) are solved at the same time by several millions of participants of the competition in tens of countries worldwide.

Research data were obtained from 680 respondents (pupils of grades 4 and 5 of elementary school) after 20th March 2015, the date of the competition. Using means of statistics, pupils' performance as reflected in the success rate in both the test and individual problems is set into the context of personal characteristics of the pupils (age, grade of school, performance in mathematics).

The monograph aims to communicate the overall experience from the *Ècolier* category of *Mathematical Kangaroo* which could be used not only for the coming years of the competition, but also in enhancing mathematics teaching at primary schools.

– 6 – Literatura

Blažková, R., et al. (2002). *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty)*. Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R., & Vaňurová, M. (2010). Charakteristika nadaného žáka s poruchou učení z hlediska matematických úloh. In M. Uhlířová (Ed.), *Acta Univ. Palacki. Olom.: Matematika 4* (s. 57–61). Olomouc: Univerzita Palackého.

Blažková, R., & Vaňurová, M. (2013). Intuice a vhled při řešení úloh matematicky nadanými žáky. In J. Šťáva, *Učitel a nadaný žák* (s. 17–22). Brno: Masarykova univerzita.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37–68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Boero, P. (2006). Students´everyday experience and teaching and learning of mathematics. In M. Uhlířová (Ed.), *Acta Univ. Palacki. Olom.: Matematika 2* (s. 10–12). Olomouc: Univerzita Palackého.

Budínová, I. (2015). Možnosti rozvoje geometrických pojmů u matematicky nadaných žáků na 1. stupni ZŠ. *Svět nadání, 4*(2), 11–37.

Bureš, J., & Novotná, J. (2008). Žákovská tvorba úloh. In M. Lávička & B. Bastl (Eds.), *11. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* (s. 71–75). Plzeň: JČMF.

Burjan, V. (2003). Školské testy ako zdroj zaujímavých dát pre žiakov aj učiteľov. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let.* Litomyšl: JČMF.

Byčkovský, P. (1980). *Didaktické testy a měření výsledků výuky: Základní pojmy.* Praha: VÚIS.

Calábek, P., et al. (2010). *Péče o matematické talenty v České republice.* Olomouc: Univerzita Palackého.

Divíšek, J., et al. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

Dofková, R. (2008). Heuristické principy při řešení problémových úloh na 1. stupni ZŠ. In M. Uhlířová (Ed.), *Acta Univ. Palacki. Olom., Mathematica 6* (s. 81–84). Olomouc: Univerzita Palackého.

Dvořák, D. (2010). Zlomky v matematice, matematika v kurikulu: k příčinám neúspěchu českých žáků ve výzkumu TIMSS 2007. In N. Stehlíková & L. Tejkalová (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky* (s. 7–11). Praha: Univerzita Karlova.

Dvořáková, H. (2010). Propedeutika kombinatoriky na 1. stupni ZŠ. In N. Stehlíková & L. Tejkalová (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky* (s. 25–28). Praha: Univerzita Karlova.

Engel, T., Varga, T., & Walser, W. (1974). *Zufall oder Strategie?* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Fisher, R. (1997). *Učíme děti myslet a učit se.* Praha: Portál.

Fridman, L. M. (1977). Logiko-psichologičeskij analiz škoľnych učebnych zadač. Moskva: Pedagogika.

Fridman, L. M., & Tureckij, E. N. (1984). *Kak naučiťsja rešiť zadači.* Moskva: Prosveščenije.

Fuchs, E., & Zelendová, E. (2015). *Matematika v médiích. Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách*. Praha: JČMF.

Gavora, P. (2000). *Úvod do pedagogického výzkumu.* Brno: Paido.

Hartl, P., & Hartlová, H. (2000). *Psychologický slovník.* Praha: Portál.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.

Hejný, M., & Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova.

Hejný, M., & Michalcová, A. (2001). *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava: Metodické centrum.

Hejný, M., et al. (2013). *Čtenářské, matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění šetření TIMSS a PIRLS 2011*. Praha: ČŠI.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova.

Helus, Z., et al. (1979). *Psychologie školní úspěšnosti žáků*. Praha: SPN.

Hošpesová, A., Stehlíková, N., & Tichá, M. (2007). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: JČU.

Hošpesová, A. (2014). Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni ZŠ a příprava učitelů. In M. Uhlířová (Ed.), *Acta Univ. Palacki. Olom.: Matematika 6* (s. 8–14). Olomouc: Univerzita Palackého.

Chráska, M. (1999). *Didaktické testy*. Brno: Paido.

Chráska, M. (2005). *Úvod do výzkumu v pedagogice*. Olomouc: Univerzita Palackého.

Chráska, M. (2007). *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada Publishing.

Janík, T., et al. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky.* Brno: Masarykova univerzita.

Janoušková, S., & Tomášek, V. (2013). *TIMSS 2011: Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 4. ročník.* Praha: ČŠI.

Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: Univerzita Karlova.

Kalhous, Z., & Obst, O., et al. (2002). *Školní didaktika*. Praha: Portál.

Keogh, B., & Naylor, s. (1999). Concept cartoons, teaching and learning in science and evaluation. *International Journal of Science Education, 21*(4), 431–446. https://doi.org/10.1080/095006999290642

Kopka, J. (1999). *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

Kopka, J. (2004). *Výzkumný přístup při vyučování matematice.* Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

Knecht, P., & Lokajíčková, V. (2013). Učební úlohy jako příležitosti k rozvíjení a dosahování očekávaných výstupů: analýza koherence učebnic a RVP ZV. *Pedagogika, 63*(2), 169–183.

Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa: WSiP.

Kubátová, E. (2001). Tvořivost v úlohách a analýza řešení jedné z nich. In *Sborník příspěvků z XIX. vědeckého kolokvia o řízení vyučovacího procesu* (s. 203–206). Vyškov: VVŠ PV.

Kubátová, E. (2005). *Učební úlohy ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy* (Disertační práce). Olomouc: Univerzita Palackého.

Kubátová, E., & Novák, B. (2006). Matematika a její aplikace. In *Průvodce výukou dle RVP na 1. stupni ZŠ: 1. díl* (s. 104–137). Olomouc: Prodos.

Kubínová, M. (2002). *Projekty ve vyučování matematice*. Praha: Karolinum.

Kuřina, F., et al. (2009). *Matematika a porozumění světu: Setkání s matematikou po základní škole.* Praha: Academia.

Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita.

Lišková, H., & Rezek, P. (2015). Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy. In *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání Matematika a její aplikace* (s. 101–128). Praha: NÚV.

Makrides, G., et al. (2006). *Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách.* Praha: Projekt MATHEU.

Malinová, D. (2014). *Mimořádně nadaný žák v primárním matematickém vzdělávání* (Disertační práce). Olomouc: Univerzita Palackého.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236–260.

Matematický klokan. (2008). Olomouc: Univerzita Palackého. Dostupné z http://www.matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2008.pdf

Molnár, J., & Voglová, P. (2001). Z historie a současnosti soutěže Matematický klokan v ČR. In *Sborník ze semináře „MAKOS 2001"* (s. 31–32). Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

Molnár, J. (2004). *Prostorová představivost (nejen) ve stereometrii*. Olomouc: Univerzita Palackého.

Nocar, D., & Novák, B. (2015). Objevujeme s Cabri. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok, 14*(2), 150–154.

Novák, B. (2000). Řešení úloh jako příspěvek k tvořivosti vyučování matematice. In J. Beránek (Ed.), *Sborník prací Pedagogické fakulty MU v Brně* (s. 61–66). Brno: Masarykova univerzita.

Novák, B. (2002). Matematická soutěž – nová příležitost pro žáka i pro učitele. In M. Uhlířová (Ed.), *Sborník z mezinárodní vědecké konference „Podíl matematiky na přípravě učitele primární školy"* (s. 118–123). Olomouc: Univerzita Palackého.

Novák, B., et al. (2005). *Deset let s Matematickým klokanem*. Olomouc: Univerzita Palackého.

Novák, B. (2010). Reflexe netradičních úloh a matematických aktivit v prostředí základní školy. *Acta Mathematica: Sborník příspěvků z VIII. nitranských matematických dnů, 13*(1), 3–11.

Novák, B. (2012). K tvorbě slovních úloh žáky primární školy. In M. Uhlířová (Ed.) *Acta Univ. Palacki. Olom.: Mathematica 8* (s. 175–181). Olomouc: Univerzita Palackého.

Novák, B. (2013). *Řešení matematických úloh.* Olomouc: Univerzita Palackého. Dostupné z http://unifor.upol.cz/pedagogicka/

Novák, B., & Nováková, E. (2008). Matematika a její aplikace. In *Průvodce výukou dle RVP na 1. stupni ZŠ: 2. díl.* Olomouc: Prodos.

Nováková, E. (2015a, v tisku). Prediction and self-evaluation as a part of the process of solving non-standard mathematical tasks. In *II. Interdisciplinary scientific conference "Mathematical Transgressions"*. Krakow, Pedagogical University.

Nováková, E. (2015b). K dovednosti žáků primární školy predikovat svou úspěšnost při řešení nestandardních úloh. *Magister: Reflexe primárního a preprimárního vzdělávání ve výzkumu, 3*(2), 33–51.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova.

Novotná, J. (2004). Matematické objevování založené na řešení úloh. In M. Hejný, J. Novotná, & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 357–366. Praha: Univerzita Karlova.

Palková, V., & Prídavková, A., et al. (2011). *Matematika pre život: Zbierka úloh na rozvoj matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy.* Prešov: Prešovská univerzita.

Pavlovičová, G., et al. (2012). *Experimentujeme v elementárnej matematike.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa.

Petráčková, V., & Kraus J., et al. (2000). *Akademický slovník cizích slov A–Ž.* Praha: Academia.

Petty, G. (2002). *Moderní vyučování.* Praha: Portál.

Polya, G. (1957). *How to Solve It.* Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (2009). *How to solve it*: *a new aspect of mathematical method*. Bronx: Ishi Press International.

Psotová, E. (2001). *Analýza žákovských řešení úloh ze soutěže Matematický klokan* (Diplomová práce). Olomouc: Univerzita Palackého.

Prídavková, A. (2003). Analógia, tvorivosť a fantázia v žiackych riešeniach. In J. Coufalová (Ed.), *Sborník z konference s mezinárodní účastí „Od činnosti k poznatku“* (s. 115–119). Plzeň: Západočeská univerzita.

Průcha, J. (2002). *Moderní pedagogika*. Praha: Portál.

Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2003). *Malý pedagogický slovník*. Praha: Portál.

Příhonská, J. (2014). *Kombinatorické problémy: Aplikace a metody řešení.* Liberec: Technická univerzita.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. (2007). Praha: VÚP. Dostupné z http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/ RVPZV_2007-07.pdf

Rendl, M., & Vondrová, N., et al. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova.

Samková, L. (2014). Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování I. In *Sborník příspěvků ze setkání učitelů matematiky*. Plzeň: Vydavatelský servis.

Samková, L. (2016). Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In M. Uhlířová (Ed.), *EME 2016 Proceedings: Primární matematické vzdělávání v souvislostech.* Olomouc: Profi-tisk Group.

Samková, L., & Hošpesová, A., et al. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Sciencia in educatione, 6*(1), 91–122. Dostupné z http://www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/154/145

Sarrazy, B. (2011). Tvorba v matematice: nezbytná iluze? In Š. Pěchoučková (Ed.), *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky* (s. 24–37). Plzeň: ZČU.

Sborníky soutěže Matematický klokan. (2015). Dostupné z www.matematickyklokan.net

Semadeni, Z. (1995). Developing children´s understanding of verbal arithmetical problems. In *Proceedings International Symp. Elem. Math Teaching,* (s. 27–32). Praha: Univerzita Karlova.

Shulman, L. s. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational reasercher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Scholtzová, I. (2004). *Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole.* Prešov: Metodicko-pedagogické centrum. Dostupné z http://www.mcpo.sk/downloads/Publikacie/PrirodPred/PPMAT200502.pdf

Scholtzová, I. (2006). *Integrácia poznatkou z kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole – pohľad druhý*. Dostupné z http://pdf.truni.sk/download?actafp/2006/c/4ScholtzovaTrnava2006.pdf.

Scholtzová, I. (2007). *Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ.* Prešov: Metodicko-pedagogické centrum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. 1992. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, (s. 334–370). New York: MacMillan. Dostupné z http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_MathThinking.pdf

Siwek, H. (2005). *Dydaktyka matematyki: Teoria i zastosowania v matematyce szkolnej*. Warszawa: WSiP.

Slavík, J. (1999). *Hodnocení v současné škole.* Praha: Portál.

Slavík, J., Dytrtová, K., & Fulková, M. (2010). Konceptová analýza tvořivých úloh jako nástroj učitelské reflexe. *Pedagogika, 60*(3/4), 223–241.

Standardy – základní vzdělávání. Matematika. (2013). Dostupné z http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/standardy-pro-zakladni-vzdelavani-1

Stehlíková, N. (1995). *Analýza žákovských písemných řešení*. Praha: Univerzita Karlova.

Straková, J. (2002). *Vědomosti a dovednosti.* Praha: ÚIV.

Swoboda, E. (2014). Ability of building an individual strategy by 8–9 year old students while solving non-typical mathematical tasks. In M. Uhlířová (Ed.), *Acta Univ. Palacki. Olom.: Matematika 6* (s. 15–25). Olomouc: Univerzita Palackého.

Šedivý, O., & Fulier, J. (2004). *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra: Univerzita Konstantina Filozofa.

Škrabánková, J. (2009). Model logické struktury edukačního procesu pro nadaného žáka. In *Výchova a nadání* (s. 11–18). Brno: Masarykova univerzita.

Škrabánková, J. (2012). *Žijeme s nadáním*. Ostrava: Ostravská univerzita.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2011). Gramotnost učitele matematiky a tvoření úloh. In A. Hošpesová, et al., *Matematická gramotnost a vyučování matematice.* České Budějovice: Jihočeská univerzita.

Tichá, M. (2014). Objevování struktury slovních úloh ve vzdělávání učitelů. In M. Uhlířová (Ed.), *Acta Univ. Palacki. Olom.: Matematika 6* (s. 260–264). Olomouc: Univerzita Palackého.

Tollingerová, D. (1971). Úvod do teorie a praxe programované výuky a výcviku. *Odborná výchova, 21*(5).

Tollingerová, D. (1986). K teorii učebních činností a jejich projektování. In *Acta Univ. Palacki. Olom. 23* (s. 207–216). Olomouc: Univerzita Palackého.

Toom, A. (1999). Word Problems: Applications or Mental Manipulatives. *For Learning of Mathematics, 19*(1), 36–38.

Trávníček, s. (2002). K úlohám na matematické soutěže. In *Sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty "MAKOS 2002"* (s. 76–80). Olomouc: Univerzita Palackého.

Uhlířová, M. (2004). Logické úlohy známé – neznámé. *Matematika, fyzika, informatika*, *14*(2), 78–82.

Vondrová, N., & Rendl, M., et al. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Karolinum.

Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: SPN.

Zelina, M. (1990). *Tvořivost v matematice.* Olomouc: KPÚ.

Zelina, M., & Zelinová, M. (1990). *Rozvoj tvorivosti detí a mládeže.* Bratislava: SlPN.

Zemanová, R. (2015). Žákovská řešení geometrických úloh na 1. st. ZŠ – diagnostika a hodnocení. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2015: sborník příspěvků*. Praha: Univerzita Karlova.

Zvára, K. (2002). Měření reliability aneb bacha na Cronbacha. *Informační bulletin České statistické společnosti, 13*(2), 13–20.

Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní*. Praha: Powerprint.

– 7 – Seznam obrázků a tabulek

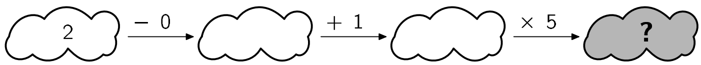
– 8 – Jmenný rejstřík

Matematický KLOKAN 2015

www.matematickyklokan.net

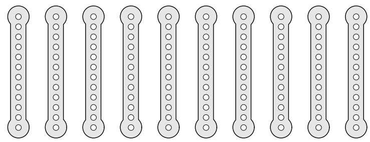
kategorie **Klokánek**

Úlohy za 3 body

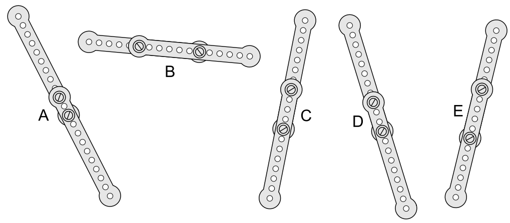
1. 

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

2. Eda měl 10 stejných kovových dílků stavebnice.

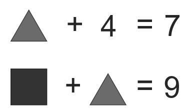


Spojil vždy dva dílky a vytvořil pět nových. Který z nich je nejdelší?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

3. Které číslo je zakryto čtvercem?

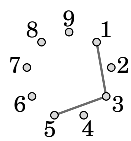


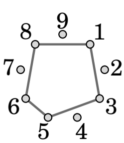
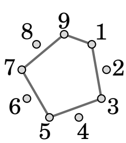
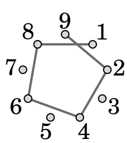
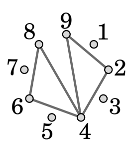
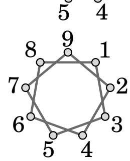
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

4. Pan Zahradník má 10 slepic. 5 slepic snáší vejce každý den a dalších 5 slepic snáší vejce každý druhý den. Kolik vajec snesou všechny slepice za 10 dní?

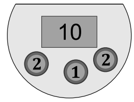
(A) 75 (B) 60 (C) 50 (D) 25 (E) 10

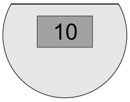
5. Martina začala u čísla 1 a spojovala každou druhou tečku (podívej se na obrázek), dokud znovu neskončila u čísla 1. Který obrázek vytvořila?

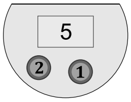


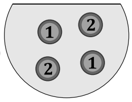
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

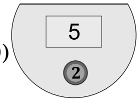
6. Lucka jela do Rakouska, kde šla nakupovat. V peněžence měla tyto peníze (podívej se vpravo). V obchodě zaplatila 7 euro za míč. Kolik peněz jí zbylo?

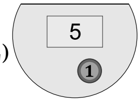


(A) 

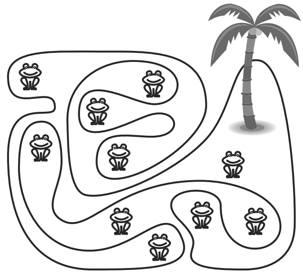
(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

7. Na obrázku je ostrov s podivně členitým pobřežím. Roste na něm palma a sedí na něm několik žabek. Kolik žabek sedí na ostrově?



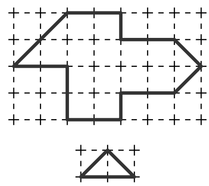
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

8. Na deštníku mám napsáno slovo KANGAROO (podívej se vpravo). Na kterém z následujících obrázků je můj deštník?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

Úlohy za 4 body

9. Zuzka vystřihla útvar z obrázku nahoře a rozstříhala jej na trojúhelníky, které vidíš dole. Kolik jich dostala?

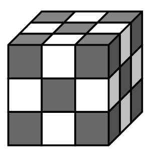


(A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16

10. Leoš měl 7 jablek a 2 banány. Dal 2 jablka Janě. Ta mu na oplátku dala několik banánů. Leoš měl potom stejně jablek jako banánů. Kolik banánů dala Jana Leošovi?

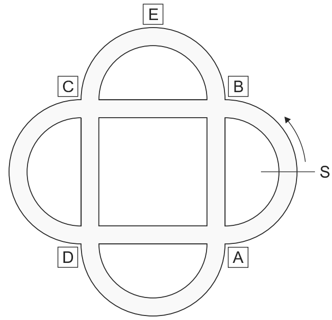
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

11. Jarda slepil z bílých a černých krychliček krychli (podívej se na obrázek). Nikdy k sobě nepřilepil dvě krychličky stejné barvy. Kolik je v krychli bílých krychliček?



(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

12. Petr jezdí na kole po cyklostezce v parku (podívej se na obrázek). Vyjel z místa S směrem, který ukazuje šipka. Na první křižovatce zabočil doprava, na druhé doleva, na další doprava, pak doleva. Kterým místem neprojel?

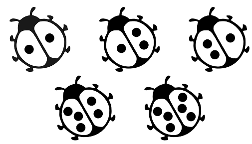


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

13. U lyžařského vleku čekalo v řadě 10 lyžařů. Před Tomášem jich stálo o 3 méně než za ním. Kolikátý v řadě byl Tomáš?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 7

14. Na obrázku vidíš 5 berušek. Kamarádí spolu každé dvě berušky, jejichž počet teček se liší právě o jednu. Každá beruška poslala SMS zprávu své kamarádce. Kolik SMS zpráv berušky odeslaly?

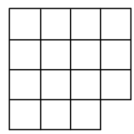


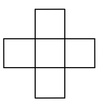
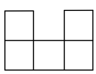
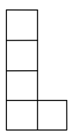
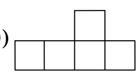
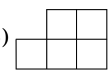
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

15. Pepa řadí do jedné poličky 4 hračky – auto, míč, vrtulník a loď. Vždy dodržuje tato pravidla: loď stojí vedle auta, vrtulník stojí vedle auta. Kolika způsoby může Pepa hračky umístit?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

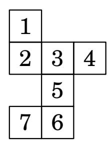
16. Rozděl útvar vpravo na tři stejné dílky. Jak vypadá každý dílek?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

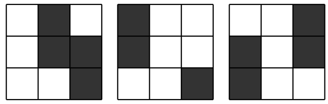
Úlohy za 5 bodů

17. Který čtvereček musí Lucka z obrázku odstřihnout, aby jí zůstala síť, ze které může složit krychli?



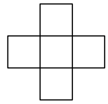
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 7

18. Na průsvitný papír nakreslil Zbyněk 3 čtverce s těmito vzory (podívej na obrázek). Položil je na sebe, střed propíchl špendlíkem a otáčel s nimi, až získal co největší černou plochu (čtverce přitom měly zarovnané strany). Kolik čtverečků bylo černých?



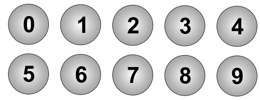
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

19. Čísla 2, 3, 5, 6 a 7 napiš do polí sestavených do tvaru kříže (podívej se vpravo). Součty čísel v řádku a sloupci jsou stejné. Které z čísel můžeš napsat do středu kříže?



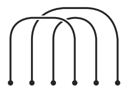
(A) jen 3 (B) jen 5 (C) jen 7 (D) 5 nebo 7 (E) 3, 5 nebo 7

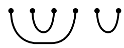
20. Kája má 10 míčů očíslovaných 0 až 9. Rozdělil tyto míče mezi své 3 kamarády. Jirka dostal 3 míče, Janek 4 a Anička 3. Kamarádi vynásobili čísla na svých míčích a dostali tato čísla: Jirka 0, Janek 72 a Anička 90. Jaký je součet čísel na Jirkových míčích?



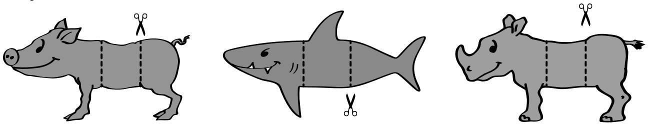
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

21. Na zemi leží tři hasičské hadice (podívej se na obrázek). Spoj je s dalšími třemi tak, aby tvořily jeden uzavřený okruh. Které rozložení vybereš?



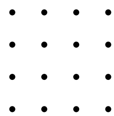
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

22. Tomáš nakreslil obrázky vepříka, žraloka a nosorožce a rozstříhal je na 3 části (podívej se na obrázek). Potom vytvářel nové obrázky tím, že zaměňoval části těl. Každé zvíře ale mělo přední část, tělo a zadní část. Najdi největší počet zvířat, které mohl takto vytvořit.



(A) 3 (B) 9 (C) 15 (D) 27 (E) 30

23. Na obrázku je vyznačeno 16 bodů. V řádcích a sloupcích jsou od sebe stejně vzdáleny. Maruška kreslí čtverce tak, že všechny vrcholy jsou vyznačené body. Kolik *různě velkých* čtverců může vytvořit?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

24. Kamarádi Alenka, Bohunka, Šárka, David a Eliška o víkendu pekli sušenky. Během celého víkendu upekla Alenka 24 sušenek, Bohunka 25, Šárka 26, David 27 a Eliška 28. Na konci víkendu měl jeden z kamarádů dvakrát více sušenek než po sobotě, jiný měl třikrát více, další čtyřikrát více, další pětkrát více a poslední šestkrát více. Kdo upekl v sobotu nejvíc sušenek?

(A) Alenka (B) Bohunka (C) Šárka (D) David (E) Eliška

Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy

Shrnutí výsledků výzkumného šetření

Eva Nováková

Ediční řada: Matematika a didaktika matematiky
Svazek 1

Vydala Masarykova univerzita roku 2016
Jazykové korektury Bc. Pavla Gerlingerová
Grafický návrh Mgr. Jana Nedomová
1., elektronické vydání, 2016

ISBN 978-80-210-8483-4

Kniha zpracovává aktuální problematiku spojenou se soutěží Matematický klokan v České republice. Obsahuje informace o soutěži, o její historii v českém prostředí i v mezinárodním kontextu. Shrnuje výsledky výzkumu připraveného na základě více než desetileté zkušenosti, získané při přípravě české verze soutěžních úloh i při každoroční analýze výsledků. Výzkum byl připraven a realizován s oporou o teoretické ukotvení problematiky matematických učebních úloh. Byl zaměřen na kvantitativní analýzu žákovských řešení úloh z kategorie Klokánek a doplněn prvky kvalitativního výzkumu. Publikaci mohou využít nejen učitelé a studenti učitelství, ale i rodiče, kteří se o populární soutěž a výsledky svých dětí zajímají.

Matematika
a didaktika matematiky

muni
PRESS