Úvod do logiky:

klasická predikátová logika

Jiří Raclavský

Masarykova univerzita

Úvod do logiky: klasická predikátová logika

Jiří Raclavský

Masarykova univerzita

Brno 2015

Práce na publikaci a její tisk byly podpořeny v rámci projektu „Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce propedeutik pro mezioborová studia“, č. reg. CZ.1.07/2.2.00/28.0216 v rámci projektu Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost spolufinancovaného z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Knihu recenzovali:
PhDr. Petr Hromek
PhDr. Michal Peliš, Ph.D.

ISBN 978-80-210-7965-6 (online : pdf)
ISBN 978-80-210-7867-3 (vázaná vazba)

Předmluva

Tato kniha je druhým dílem úvodu do logiky, jenž je zaměřen především na humanitní a společenskovědné publikum. Kniha však obsahuje materiál užitečný i pro jiné zájemce o logiku. První díl, „Úvod do logiky: klasický výroková logika“ (MUNIPress, 2015), byl věnován, jak název napovídá, výrokové logice.

Nedokončený rukopis knihy, jenž se stal podkladem pro první a druhý díl, byl po mnoho let užíván jako studijní materiál na Katedře filozofie Filozofické fakulty Masarykovy univerzity, kde vyučuji dvousemestrální úvod do logiky. První verze rukopisu vznikla v roce 2000. V té době jsem zároveň pro potřeby výuky vyvíjel řadu cvičebních příkladů (tato kniha obsahuje přibližně osmdesát procent autorsky původních příkladů). V roce 2014 se mi podařilo k rukopisu vrátit a to díky popudu dr. L. Dostálové a rovněž podpoře jí řízeného projektu Operačního programu vzdělání pro konkurenceschopnost (OPVK) s názvem „Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia“ (č. reg. CZ.1.07/2.2.00/28.0216), spolufinancovaného ESF a MŠMT ČR. Někdejší rukopis byl celý důkladně přehlédnut a rozšířen, tedy v pravém smyslu inovován. Závěrečné práce a tisk byly hrazeny právě z OPVK Logika.

Chtěl bych zde poděkovat všem, kdo se podíleli na konečné podobě i této knihy. Předně jsou to oba recenzenti, dr. P. Hromek a dr. M. Peliš. Jmenovat je třeba i nynější magistry T. Ondráčka, I. Pezlara, J. Růžičku, J. Štěpánka, Z. Trávníčka, a další, kteří se ujali kontroly příkladů i dalšího textu. Žádný ze jmenovaných pochopitelně nezodpovídá za jakékoli nedostatky, které zůstaly v knize. Když jsme u toho, je velmi pravděpodobné, že kniha obsahuje překlepy a další chyby, mnohdy z typografických důvodů; tyto chyby čtenář buď sám odhalí anebo může konzultovat jejich on-line seznam na autorově webové stránce.

Obsah

0. Rekapitulace základních pojmů logiky a výrokové logiky

Smyslem této kapitoly je čtenářům připomenout nejdůležitější myšlenky z „Úvodu do logiky: klasická výroková logika“, neboť bez nich by pochopení této knihy nebylo dost dobře ani možné. Tato krátká kapitola ovšem nemůže předchozí knihu nahradit, čtenář je proto na ni odkazován jak pro vysvětlení rozmanitých termínů, tak zejména pro vysvětlení a procvičení praktických technik.

0.1 Logika jako věda o vyplývání

Logika se zabývá platností jazykově vyjádřených úsudků. Abstrahuje přitom jak od psychologických jevů spjatých s usuzováním, tak od specifičností jazykových formulací. Logiku můžeme definovat jako vědu o *logickém důsledku* nebo ekvivalentně takto:

Vymezení logiky

Logika je věda o vyplývání.

Vyplývání je určitý výlučný vztah mezi větami a množinami vět, jež jsou organizovány v podobě úsudků. Poslední větou úsudku je *závěr* (či konkluze); věty předcházející závěr jsou zvány *premisy* daného úsudku. V našem textu premisy a závěr oddělujeme čarou „——“ nebo při lineárním zápisu znakem „∴“; v běžné mluvě se někdy setkáváme s oddělujícím výrazem „tudíž“ nebo „tedy“.

Úsudek

premisa P_1
premisa P_2
…
premisa P_n
——————
závěr Z

Logické odvozování je prostředkem přenosu pravdivosti: pokud jsou pravdivé premisy P_1, P_2, ..., P_n, je pravdivý i závěr Z. Platné odvození je tím, co odůvodňuje, podkládá či podmiňuje daný závěr. Logika je neempirická věda a tak ani pravdivost premis, ani pravdivost závěru obvykle garantovat nemůže – garantuje jen vyplývání závěru z premis.

Tím se dostáváme k definicím *platnosti* úsudku:

Platnost úsudku

Úsudek U je *platný* právě tehdy, když jeho závěr Z vyplývá z jeho premis P_1, P_2, …, P_n.

Tato definice závisí na pojmu vyplývání. Abychom vztah vyplývání odlišili od jiných vztahů mezi větami a množinami vět (například od vztahu nevyplývání), musíme jej nějak vymezit, tedy uvést jeho definici:

Vyplývání

Věta Z vyplývá z vět P_1, P_2, …, P_n právě tehdy, když platí, že za všech okolností, kdy jsou pravdivé věty P_1, P_2, …, P_n, je pravdivá rovněž věta Z.

Všimněme si, že v definici vyplývání se hovoří nikoli o aktuální pravdivosti, ale o podmíněné pravdivosti: pokud nějaké věty jsou pravdivé, tak je nějaká věta pravdivá. Takže úsudek může být platný (angl. „valid“), a přesto pouze někdy může mít aktuálně pravdivý závěr. (Existují i neplatné úsudky, jež mají pravdivý závěr.) Platný úsudek s aktuálně pravdivým závěrem bývá v češtině někdy nazýván dokonalý (někdy: korektní), angl. „sound“, což je tedy více než jen „valid“.

Důležitým prvkem této definice je modalita „za všech okolností“ (stylistické alternativy: „vždy“, „nutně“, dokonce může být takovéto vyjádření jen implicitní). Ve hře je totiž podmíněnost pravdivosti a tu způsobuje vlastně stav světa; například stav světa takový, že prší, ovlivňuje pravdivost věty „Prší“. Nepanuje ovšem obecná shoda o tom, co přesně tato modalita je, jak ji přesně vyložit. Výše uvedená definice tedy uvádí pojem vyplývání, který je jen intuitivní, netechnický. V zájmu exaktnosti je však žádoucí, aby v definici vyplývání byl tento ne zcela přesný pojem všech okolností nahrazen přesným, rigorózním pojmem.

Neexistuje jedna jediná, daná logika, existují různé logické systémy či logiky, jež aspirují na to být věcně správnou explikací pojmu vyplývání. Například v knize „Úvodu do logiky: klasická výroková logika“ jsme intuitivní pojem okolností nahradili technickým pojmem valuace. Formule výrokové logiky jsou totiž pravdivé v závislosti na valuaci. Dále nechť „VL“ zkracuje „výroková logika“.

Vlastně jsme přitom definovali vyplývání mezi formulemi VL, nikoli mezi (ne vždy jednoznačnými) větami přirozeného jazyka. Dané formule jsou nicméně chápány jako *formalizace* příslušných *vět*. Prostředky VL tedy umožnují následující *formalizaci* vlevo uvedeného *úsudku*:

Aristotelés je člověk.	p
Každý člověk je smrtelný.	q
Aristotelés je smrtelný.	r

Tento úsudek si ukazujeme rovněž proto, že jeho napravo uvedená úsudková forma, jež je formalizací daného úsudku, je neplatná. Její závěr výrokově-logicky nevyplývá z premis, srov. valuaci $v(p)=v(q)=1$ a $v(r)=0$. Intuitivně ale onen jazykově formulovaný úsudek platný je. Jak by se dalo ukázat i na mnoha jiných příkladech, prostředky VL jsou příliš slabé na *analýzu* toho všeho, co může být relevantní pro vyplývání. Formalizace prostředky VL je příliš hrubá.

Snahy o rozvoj neklasických výrokových logik (tedy logik, jež neuplatňují některé klasické logické zákony a principy) nemohou tento principiální nedostatek expresivnosti klasické VL nahradit. Diskutovaný příklad nám celkem jasně ukazuje, že pro platnost daného úsudku jsou relevantní jevy na úrovni částí jednoduchých vět. Tyto jevy dokáže detekovat právě v této knize uvedená *predikátová logika*, dále jen „PL“. Jiné logiky (modální logiky, epistemické logiky) bývají – pokud není uváděn a studován jen jejich výrokově-logický fragment – rozšířeními PL. Osvojit si klasickou PL je tedy nezbytným předpokladem přechodu k těmto zajímavým logickým systémům.

PL má mnohostranné využití. Například v matematice patří ke zdaleka nejdiskutovanějším a nejužívanějším logikám. Ve filosofii je situace o něco odlišnější, cílem filosofů je totiž studovat právě pojmy modality, vědění apod.; studium základních partií PL ovšem prodělává každý školený filosof. V prostředí informatiky se situace jeví být někde na pomezí situace v matematice a filosofii. Nelze zde přitom nevzpomenout starý jednoduchý programovací jazyk Prolog („programming in logic“, kde onou logic byla PL); technické prostředky PL jsou však obsaženy ve všech programovacích jazycích.

Většina z toho, co jsme formulovali v rámci VL, zůstává v platnosti i v rámci PL. Jsou však nezbytné některé modifikace (například proto, že PL na rozdíl od VL nedisponuje výrokovými proměnnými).

V kapitolách, v nichž se tomu nelze vyhnout, jsou rekapitulovány nezbytné výrokově-logické elementy tam probírané látky. Ve zbytku této kapitoly si připomeneme jen výrokově-logické elementy, jež jsou používány v celé této knize. Jedná se o definice základních *výrokových spojek* a nejdůležitější tautologie VL. Nechť *A* a *B*, popř. *C*, jsou metaznaky zastupující libovolné formule (zejm. VL, potažmo pak PL).

Nejznámějších výrokové spojky

negace („ne“)	*konjunkce* („a“)	*disjunkce* („nebo“)	*implikace* („jestliže, pak“)	*ekvivalence* („právě tehdy, když“)
$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0 1	1 *1* 1	1 *1* 1	1 *1* 1	1 *1* 1
1 0	1 *0* 0	1 *1* 0	1 *0* 0	1 *0* 0
	0 *0* 1	0 *1* 1	0 *1* 1	0 *0* 1
	0 *0* 0	0 *0* 0	0 *1* 0	0 *1* 0

Příležitostně zmíníme i třeba Schefferovu funkci $\uparrow$, jež je definována takto: $(A \uparrow B) =_{df} \neg(A \wedge B)$, zpětná implikace je zase definována takto: $(A \leftarrow B) =_{df} (B \rightarrow A)$.

Pokud bude některá z níže uváděných *tautologií VL* – resp. pravidel odpovídajících těmto tautologiím – uplatněna v nějakém důkazu, odvoláváme se na ni pouze pomocí výrazu „tautologie VL“ (v literatuře se nezřídka používá jen „VL“).

Nejznámější tautologie VL

$A \leftrightarrow \neg\neg A$	*zákon dvojité negace*
$\neg(A \wedge \neg A)$	*zákon sporu*
$A \vee \neg A$	*zákon vyloučeného třetího*
$A \rightarrow A$	*zákon totožnosti*
$A \leftrightarrow (A \wedge A)$	*zákon idempotence konjunkce*
$A \leftrightarrow (A \vee A)$	*zákon idempotence disjunkce*

$\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$	*De Morganovy zákony*
$(A\wedge B)\leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$	
$(A\wedge B)\leftrightarrow\neg(A\rightarrow\neg B)$	*převod konjunkce na implikaci*
$\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)$	*De Morganovy zákony*
$(A\vee B)\leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$	
$(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\rightarrow B)$	*převod disjunkce na implikaci*
$(A\rightarrow B)\leftrightarrow\neg(A\wedge\neg B)$	*převod implikace na konjunkci*
$(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$	*převod implikace na disjunkci*
$(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$	*transpozice implikace*
$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$	*rozklad ekvivalence na implikace*
$(A\wedge B)\leftrightarrow(B\wedge A)$	*zákony komutativity*
$(A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)$	
$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(B\leftrightarrow A)$	
$(A\wedge(B\wedge C))\leftrightarrow((A\wedge B)\wedge C)$	*zákony asociativity*
$(A\vee(B\vee C))\leftrightarrow((A\vee B)\vee C)$	
$(A\leftrightarrow(B\leftrightarrow C))\leftrightarrow((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow C)$	
$(A\wedge(B\vee C))\leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$	*zákony distributivity*
$(A\vee(B\rightarrow C))\rightarrow((A\vee B)\rightarrow(A\vee C))$	
$(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$	*zákon tranzitivity*
$A\rightarrow(B\rightarrow A)$	*zákon simplifikace*
$(A\wedge\neg A)\rightarrow B$	*zákon Dunse Scota*
$((A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B))\rightarrow\neg A$	*zákon redukce ad absurdum*
$(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$	*hypotetický sylogismus*
$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\leftrightarrow((A\wedge B)\rightarrow C)$	*zákon slučování premis*
$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$	*zákon záměny premis*

Níže budeme příležitostně využívat zákon asociativity a komutativity k tomu, abychom vypouštěli závorky ve skupinách konjunkcí nebo disjunkcí (tj. formulí tvaru konjunkce nebo tvaru disjunkce), anebo abychom měnili pořadí členů těchto konjunkcí či disjunkcí.

1. Uvedení do predikátové logiky

Jak už jsme naznačili, na rozdíl od VL si PL všímá nejen struktury vět složených, ale i struktury vět jednoduchých. Díky tomu PL podstatně rozšiřuje možnosti vymezení platných úsudků.

V jednoduchých větách PL rozeznává (logický) *subjekt*, tj. zpravidla individuum, o němž se něco predikuje, něco se o něm vypovídá, něco se mu přisuzuje prostřednictvím *predikátu*. Predikát intuitivně chápeme jako výraz, který označuje vlastnost nebo vztah.

Bližší představu o možnostech PL si učiníme z následující sekce; k mnoha diskutovaným pojmům se ovšem vrátíme až v dalších sekcích.

Pro celou knihu platí, že k vyznačení konkrétních vlastností či vztahů užíváme zásadně jednoduché uvozovky (např. vlastnost ‚být pes'); dvojité citační uvozovky užíváme ke zmiňování výrazů (např. výraz „(být) pes"). Citační uvozovky se v zájmu zjednodušení snažíme vypouštět tam, kde je zřejmé, že je diskutován sám výraz, nikoli věc tím výrazem označovaná.

1.1 Základní terminologie

PL lze vhodně využít k popisu prvků, jež mají určité vlastnosti a jsou v určitých vztazích. V následujícím příkladu si uvedeme rovněž základní terminologii PL (jazyk PL bude představen až níže v kapitole 2).

Pro ilustraci uvažme tři dívky: Annu, Báru a Gabrielu. Tyto tři dívky tvoří náš *obor úvahy* (*univerzum diskurzu*), stručně *univerzum*, značeno U. Dívky si označme po řadě metajazykovými výrazy „α", „β", „γ", načež U={α,β,γ} (v této knize mezeru za čárkou v takovýchto zápisech důsledně vynecháváme). Univerzum je tedy množina (všech) individuí.

Jména zastupující dívky („Anna",...) nahradíme po řadě *individuovými konstantami* „a", „b", „c"; individuové konstanty jsou tedy výrazy, které fungují obdobně jako vlastní jména. (Někdy se v česky psaných textech můžeme setkat s výrazy „individuální proměnné/konstanty", což je chybné; „individuový" znamená, že se to týká individuí, „individuální" znamená něco jako „jedinečný", „jednotlivý".) Podobně jako tato jména budou mít tyto konstanty vždy stejnou, konstantní interpretaci, takže „a" bude znamenat individuum α, „b" bude znamenat individuum β, atd.

Predikát je jazykový výraz, který označuje vlastnost nebo vztah, kterou nebo který lze *predikovat* o individuu nebo individuích. Predikátem je například „(být) dívka" nebo „(být) vyšší než (někdo)". Vlastnost ‚být dívka' je přisuzovatelná Anně, nebo také Báře či Gabriele, každé z nich ale jednotlivě. Vztah ‚být vyšší než' je přisuzovatelná např. dvojici Anna a Bára nebo třeba dvojici Bára a Gabriela. Predikáty označující vlastnosti nazýváme podle jejich četnosti (tj. *arity*) *monadické predikáty*, predikáty označující dvoučetné, tříčetné až *n*-četné vztahy nazýváme *binární*, *ternární* až *n-ární* predikáty.

Součástí formálního jazyka PL nejsou samy predikáty, ale *predikátové symboly* zastupující predikáty (někdy budeme v této knize pro jednoduchost mluvit o predikátu, ač půjde o predikátový symbol). Jako predikátové symboly obvykle volíme velká písmena odpovídající prvním písmenům daného predikátu, např. „D" zastupuje „(být) dívka", „V" zastupuje „(být) vyšší než (někdo)". Předjímejme, že věty jako „Anna je dívka" či „Anna je vyšší než Bára" formalizujme prostředky PL jako „D(a)" a „V(a,b)"; PL má tedy nástroje pro logickou analýzu *singulárních výroků* jako například „Anna je dívka".

Vlastnosti a *n*-ární vztahy jsou v klasické PL reprezentovány extenzionalisticky, totiž pomocí množin prvků, resp. množin *n*-tic prvků. Například vlastnost ‚být dívka' je modelována pomocí množiny $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, což je (nevlastní) podmnožina U. Binární vztah ‚být vyšší než (někdo)' je modelován jako jistá množina uspořádaných dvojic, například jako množina $\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\gamma\rangle,\langle\alpha,\gamma\rangle\}$, což je podmnožina kartézského součinu univerza U×U, tj. U^2. Už tady vidíme velmi důležitou souvislost PL s teorií množin. Predikátové symboly jsou navíc v sémantice PL interpretovány právě množinami. (Další souvislost: predikátově-logické formuli „D(a)" odpovídá v jazyce teorie množin „a∈D".) Proto bude nezbytné si připomenout některé pojmy teorie množin, viz k tomu následující sekci.

Kromě individuových konstant disponuje jazyk PL také *individuovými proměnnými* x, y, z, x_1, y_1, z_1, ... Tyto proměnné zastupují individua neurčitě, v závislosti na ohodnocení (valuaci). Filosoficky vzato představuje proměnná libovolné, ale nespecifikované individuum. Využití proměnných je obdobné roli (jazykových) zájmen, ovšem jejich značný potenciál tkví v tom, že umožňují technicky vystihnout kvantifikaci.

Nahradíme-li totiž ve větě „Gabriela je dívka" jméno „Gabriela" proměnnou *x*, můžeme získat ‚otevřenou' větu, větnou *matrici* (resp. *výrokovou funkci*) „*x* je dívka", kde *x* může nabývat (v závislosti od ohodnocení) hodnotu individuum α, nebo β, či γ. Tuto matrici můžeme ovšem uzavřít kvantifikujícím výrazem jako např. „každé" (ekvivalentně třeba: „pro všechna *x* platí, že") a získat tak *kvantifikovaný výrok* „Každé *x* je dívka".

Kvantifikujících výrazů, tedy *kvantifikátorů* či zcela obecně tzv. determinátorů, je v jazyce přítomna celá řada: „některý", „nanejvýše jedno", „právě dva", atd. Mnohé tyto kvantifikátory jsou vyjádřitelné prostředky PL, a to dokonce jen s pomocí dvou nejzákladnějších (klasických) kvantifikátorů $\forall$ a $\exists$.

$\forall$ je *obecný kvantifikátor*; odpovídá jazykovým kvantifikátorům jako například „všichni" a „každý" (PL mezi těmito dvěma jazykovými kvantifikátory tedy neodlišuje). $\exists$ je *existenční kvantifikátor*; odpovídá jazykovým kvantifikátorům jako např. „někteří" a „někdo" či „existuje alespoň jeden". Formule jako „$\forall x$ D(x)" a „$\exists x$ D(x)" chápeme jako formalizace výroků „Vše je dívka" a „Existují dívky".

Jazyk PL dále obsahuje také *výrokové spojky* jako např. $\neg$, $\rightarrow$ či $\wedge$, díky čemuž je PL poměrně značně expresivním logickým aparátem.

Rekapitulujme nyní stručně nejdůležitější termíny a myšlenky z této sekce:

- univerzum je obor úvahy, tedy množina všech uvažovaných individuí; např. U=$\{\alpha,\beta,\gamma\}$
- individuové konstanty jako například a, b, c fungují jako vlastní jména konkrétních individuí
- individuové proměnné jako například x, y, z zastupují individua v závislosti na ohodnocení
- predikátové symboly jako například P, Q, R zastupují predikáty
- predikáty jsou výrazy umožňující predikovat individuím vlastnosti či vztahy
- vlastnosti modelujeme jako množiny individuí; monadické predikáty chápeme jako prostředky označení vlastností
- vztahy modelujeme jako množiny n-tic individuí, tj. n-ární relace; n-ární predikáty chápeme jako prostředky označení vztahů

1.2 Základní pojmy teorie množin

Už výše bylo naznačeno, že formalismus PL a jeho sémantiku lze vhodně charakterizovat pomocí teorie množin. Z tohoto důvodu je nezbytné ovládnout aspoň základní pojmy teorie množin. K následujícímu přehledu se čtenář může vrátit až později.

Množina je soubor libovolných předmětů. Anticipátor teorie množin, Bernard Bolzano, zavedl pojem množiny jakožto souhrnu věcí, ve kterém je způsob spojení nebo uspořádání jeho prvků lhostejný. Zakladatel teorie množin, Georg Cantor, vymezil pojem množiny takto: „Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů *m* našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku „*M*“.“ Množiny jsou tedy definičně dány svými prvky.

Pro zápis množiny užíváme zejména složené závorky „{“ a „}“ a čárku „ ,“. Množiny vymezujme buď a) výčtem prvků – například {α,β,γ} (prvky této množiny jsou právě α, β a γ), nebo b) taxativně, tedy podmínkou – například {*x* | všechna celá čísla *x*, která jsou vyšší než 0} (tj. množina všech *x*, která splňují podmínku za „|“; namísto „|“ se někdy píše „:“; v matematice se podmínka často vyjadřuje formalismem PL). Po zbytek této sekce budeme pro označení libovolných prvků obvykle používat znaky „*x*“, „*y*“, „*z*“, nikoli znaky alfabety, jak je tomu ve zbytku knihy.

Jestliže *x* je prvkem množiny *M*, pak píšeme $x \in M$, kde $\in$ je *relace náležení* prvku do množiny; pokud *x* prvkem *M* není, píšeme $x \notin M$. Pochopitelně můžeme konstituovat i množiny množin, tedy množiny, jejímiž prvky jsou množiny.

Protože množiny jsou definičně dány právě a pouze tím, které prvky obsahují, od toho, zda tyto prvky mají nějaké vlastnosti a jaké mají mezi sebou vztahy, je odhlíženo. Množiny jako takové nezachycují ani strukturu, uspořádání, či pořadí. Proto například „$\{x,y\}$“ a „$\{y,x\}$“ jsou dva zápisy jedné a téže množiny $\{x,y\}$. Množiny nemohou obsahovat opakované prvky (ani jeden opakovaný prvek). Například „$\{x,y\}$“ a „$\{x,x,y\}$“ jsou zápisy jedné a téže množiny $\{x,y\}$. Opakované prvky mohou mít uspořádané *n*-tice (srov. níže), ale ne množiny.

Zvláštním případem množin je *prázdná množina* ∅ (někdy značena též „0“, ba i „∅“), jež tedy neobsahuje žádný prvek. Dalším zvláštním případem jsou *jednoprvkové množiny*, nazývané *singletony*, příkladem je třeba $\{x\}$ či $\{y\}$.

O počtu prvků množiny hovoříme jako o *kardinalitě* (či *mohutnosti*) množiny. Značena je více způsoby, nejčastěji „|M|“.

Množina *M* je *podmnožinou* množiny *N* právě tehdy, když pro všechny objekty *x* platí, že pokud $x \in M$, pak $x \in N$, tedy že každý prvek *M* je rovněž prvkem *N* (ale ne nutně naopak). Ekvivalentně říkáme, že množina *M* je k množině *N* ve vztahu obsažení, *inkluze*, značeno $M \subseteq N$ (podtržení „⊂“ znamená, že může být $M=N$). *M* je nazývána *vlastní podmnožinou N*, značeno $M \subset N$ (kde „⊂“ je znak *ostré inkluze*), právě tehdy, když platí, že $M \subseteq N$ a přitom $M \neq N$. (Vztahy $\in$ a $\subseteq$ se závažným způsobem liší: například podmnožina množiny lžic není prvkem množiny lžic, není to lžíce; abstraktněji řečeno, platí, že $\{x\} \in \{\{x\}\}$, ale neplatí, že $\{x\} \subseteq \{\{x\}\}$; platí, že $\{\{x\}\} \subseteq \{\{x\}\}$, ale neplatí, že $\{\{x\}\} \in \{\{x\}\}$.)

Mnohdy se předpokládá, že všechny uvažované množiny jsou podmnožinami určité množiny, kterou nazýváme *obor úvahy* či *univerzum* (nazýváno též *univerzum diskurzu*, *univerzální množina*, *základní prostor*), tedy U.

Je-li dán obor úvahy U, pak můžeme definovat, a tak konstituovat *doplněk* množiny M do U, tedy *komplementární množinu* k M. Jde o množinu všech těch prvků U, které nepatří do M. Tuto množinu budeme značit M^{C}, značena bývá také $-M$, U$-M$, U$\backslash M$, či M' nebo vodorovnou čarou nad písmenem M.

Potenční množinou dané množiny M, značeno P_M či Power(M), apod., je množina všech podmnožin množiny M. Mezi podmnožiny patří i prázdná množina. Příkladem je $P_{\{x,y\}}=\{\emptyset,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$. Počet prvků potenční množiny M, tedy $|P_M|$, je dán vzorcem $|P_M|=2^{|M|}$ (Cantorova věta).

Nyní si uvedeme tři další důležité principy stavby množin. Pokud jsou M a N množiny, pak existuje množina taková, že pro každý její prvek platí, že je prvkem M nebo N. Tuto množinu značíme $M \cup N$ a nazýváme *sjednocení množin M* a N. Množinu, která obsahuje pouze a právě prvky nacházející se v obou množinách M a N, nazýváme *průnik* množin a značíme $M \cap N$. Množinu všech prvků M, které nejsou v průniku N, nazýváme *rozdíl množin* a značíme ho $M-N$.

Uspořádaná dvojice prvků (ev. množin) x a y je množinový útvar $\langle x,y\rangle$ (někdy značeno $[x,y]$), který bývá definován vztahem $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$ (existují však i jiné definice). Tedy jako množina, jejíž prvek $\{x,y\}$ určuje, o které dva prvky (ev. dvě množiny) jde, a prvek $\{x\}$ vyznačuje, který prvek (ev. množina) je první. Uspořádanou n-tici $\langle x_1,\dots,x_k\rangle$ (pro $k<n$) získáme z dvojice $\langle\langle x_1,\dots,x_{k-1}\rangle,x_k\rangle$; tedy $\langle x,y,z\rangle=\langle\langle x,y\rangle,z\rangle$, $\langle w,x,y,z\rangle=\langle\langle w,x,y\rangle,z\rangle$, atd. Někdy se prvek x_i nazývá i-tá složka nebo i-tý člen dané uspořádané n-tice.

Uspořádaná n-tice je tedy množina, u níž je určeno pořadí prvků na základě konvence, že x je první a y je druhý prvek, atd. Uspořádané n-tice mohou mít n prvků, z nichž každý může být mnohokrát opakován. Tento fakt je umožněn fixováním pořadí. Jestliže pro běžné množiny platilo, že $\{x,y\}=\{y,x\}$, pro uspořádané n-tice to obecně neplatí: $\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$ (existuje výjimka: když $x=y$, pak se rovnají). Tedy dvě uspořádané dvojice $\langle x,y\rangle$, $\langle w,z\rangle$ jsou totožné jedině tehdy, je-li $x=w$ a $y=z$.

Kartézským součinem množin M a N, značeno $M\times N$, je množina uspořádaných dvojic $\langle x,y\rangle$ takových, že $x\in M$ a současně $y\in N$. Je-li tedy např. $M=\{1,2\}$ a $N=\{a,b\}$, tak $M\times N$ je $\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$. Množiny vcházející v kartézský součin nemusí být vzájemně *disjunktní* (tj. nepřekrývající se), například to mohou být množiny $M=\{a,b\}$ a $N=\{b,c\}$. Pro nás budou důležité kartézské součiny totožných množin, tj. $M\times M$, což je obvykle psáno M^2. Možný je i kartézský součin více množin než dvou, a to na principu $M_1\times M_2\times\dots\times M_n = M^{n-1}\times M_n = M^n$. Počet prvků kartézského součinu $M\times N$, tj. $|M\times N|$, je $m\times n$, kde $|M|=m$ a $|N|=n$.

Relace jsou podmnožiny kartézského součinu $M \times N \times O \times \ldots$ (přičemž M může být rovno N, atd.), tj. $R \subseteq M \times N \times O \times \ldots$. Relace jsou tedy opět množiny, a to množiny uspořádaných n-tic. Kromě *binárních relací* $R \subseteq M \times N$, či v jiném zápisu $R \subseteq M_1 \times M_2$, rozeznáváme *n-ární* (*n-místné*) *relace*, jež jsou podmnožinami kartézského součinu $M_1 \times \ldots \times M_n$, tj. $R \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$. Náležení n-tice do relace zapisujeme $\langle x,y,z,\ldots \rangle \in R$, ovšem v případě dvojic je zvykem uplatňovat infixní způsob zápisu xRy, kdy je zřejmé, že prvky x a y (tzv. *relata*) jsou spojena *relátorem* R. (Množinu všech těch x pro něž existuje y takové, že xRy, nazýváme prvním oborem R; množinu všech těch y, pro něž existuje x takové, že xRy, nazýváme druhým oborem; někdy se také hovoří o levém a pravém oboru, či oboru a protioboru. Sjednocení obou oborů se nazývá *pole relace*.)

Jako rozšiřující dodatek doplňme, že pojem relace lze využít k definování jednoho z nejdůležitějších matematických pojmů – pojmu *funkce* (funkci lze ovšem definovat i jinak). Funkce je binární relace F taková, že $F \subseteq M \times N$ právě tehdy, když ke každému $x \in M$ existuje právě (ev. nanejvýš) jedno $y \in N$ takové, že xFy (tedy je-li $\langle x,y \rangle \in F$ a $\langle x,z \rangle \in F$, tak $y=z$). Funkce je běžnější zapisovat $f(x)$, či také $y=f(x)$ (ev. i $x_\varphi = y$, nebo $y=(x)_\varphi$), či přímo $\varphi(x)$; nejlépe je však značíme malými písmeny, např. f, čímž nedojde k možné záměně za označení funkční hodnoty – ta se značí $f(x)$, apod. Funkci se též říká *zobrazení*. Množina všech x se nazývá *definiční obor* (či první obor), množina všech y se nazývá *obor funkčních hodnot* (či hodnoty zobrazení, nebo druhý obor). Častěji se stručně mluví o *argumentech* a *funkčních hodnotách*. Kromě jednoargumentových funkcí existují i funkce definované na uspořádaných n-ticích (dvojicích, trojicích,..., atd.), tedy *n-argumentové funkce* (říká se i *n-ární* funkce). Zde definovaný pojem funkce je spjat s pojetím funkce jakožto grafu (tabulky) souřadnic argument–funkční hodnota. Funkce vyjádříme buď grafem s dvěma osami (analog. kartézskému grafu), či ekvivalentně tabulkou se sloupcem argumentů a hodnot. Funkce se dá zapsat i množinou uspořádaných dvojic, jejichž první člen tvoří argument (příp. n-tice prvků argumentu) a druhý člen hodnota funkce na tomto argumentu. Funkci nazýváme *totální funkce*, jestliže ke každému $x \in M$ existuje právě jeden prvek $y \in N$, že $f(x)=y$. Funkci nazýváme *parciální* (ev. částečná, částečně definovaná) *funkce*, jestliže ke každému $x \in M$ existuje nanejvýše jeden prvek $y \in N$, že $f(x)=y$.

Tato *naivní teorie množin* dovoluje nekritickou výstavbu množin a tak umožňuje *Russellův paradox*. Pokus definovat Russellovu množinu R jako $R=\{x \mid x \notin x\}$, kde x je proměnná pro množiny, se nezdaří. Předpokládáme-li, že R není prvkem sama, tak by dle definice měla být svým prvkem. Předpokládáme-li, že R je prvkem sebe sama, tak by dle definice neměla být prvkem sebe sama. Oba předpoklady tedy vedou ke sporu, R tedy neexistuje. Proto musíme odmítnout nekritický princip výstavby množin, jmenovitě Axiom neomezené komprehenze, podle něhož každé formuli (vč. každé definice množiny) odpovídá nějaká množina. Náhradou naivní teorie množin jsou zejména axiomaticky budované teorie množin, nejznámější jsou Zermelova-Fraenkelova axiomatizace (ZFC, kde C značí přítomnost axiomu výběru) a von Neumannova-Bernaysova-Gödelova axiomatizace (NBG).

1.3 Cvičení – základní terminologie

Zopakujte si, co je:

1) univerzum
2) individuová konstanta
3) individuová proměnná
4) predikát
5) predikátové symboly
6) monadický predikát, n-ární predikát
7) kvantifikátor
8) singulární výrok
9) kvantifikovaný výrok
10) množina
11) komplementární množina
12) průnik množin, sjednocení množin
13) potenční množina
14) n-tice

15) kartézský součin

16) relace

17) vlastnost

18) vztah

K zodpovězení některých otázek lze užít i úvod následující kapitoly.

2. Analýza jednoduchých vět prostředky PL

Připomeňme si, že VL pracuje s pravdivostními hodnotami, které jsou chápány jako významy výroků. Pomocí VL lze analyzovat strukturu určitých oznamovacích vět, přesněji výroků, tj. vět, jež jsou pravdivé nebo nepravdivé. Při tom však lze odlišovat jen výroky jednoduché a výroky složené tím či oním způsobem. Analytický potenciál PL, tedy její expresivnost, je ale mnohem vyšší. S pomocí PL lze totiž identifikovat části jednoduchých vět, zejména predikáty a kvantifikátory. Navíc není analýza pomocí PL omezena jen na výroky – je s to analyzovat třeba strukturu otázek či imperativů; v rámci našeho úvodu do klasické PL se ale budeme omezovat jen na oblast výroků.

Na rozdíl od VL odhaluje PL v jednoduchých větách jako „Alík je pes“ tzv. *S–P strukturu.* S–P strukturu, sestávající z tzv. subjektu a predikátu, odhalovala už tradiční logika. V moderní logice došlo k určitému posunu v jejím chápání, a to už proto, že moderní logika zdůraznila roli kvantifikujících výrazů, jak si záhy vysvětlíme.

Subjekt v logickém smyslu je odlišný od subjektu v gramatickém smyslu. Subjektem je typicky *větný podmět*, či přesněji objekt daným výrazem označený. Například ve větě „Alík je pes“ vyjadřuje subjekt výraz „Alík“. Subjektem je to, čemu se v této větě něco přisuzuje, o čem se něco vypovídá.

Subjekt bývá obvykle označován pomocí vlastního jména. Podle prvního písmene vlastního jména pak volíme názvy *individuových konstant*, jež subjekty predikace zastupují na úrovni formálního zápisu. Například písmeno „a“ volíme tehdy, když reprezentujeme jméno „Alík“ nebo třeba „Aristotelés“. (V našich úvahách předpokládáme, že každé vlastní jméno je jménem pouze jednoho individua, proto například jméno „Petr“ z našich příkladů nechápeme jako jméno množiny všech individuí, která mají jméno „Petr“, ale jako jméno jednoho určitého individua. Výraz „Petr“ v tomto smyslu není predikátem a neodkazuje tedy k žádné vlastnosti ‚být Petr‘.)

Predikátem v logickém smyslu je to, čemu odpovídá nějaká množina individuí. Příkladem predikátů jsou třeba „(být) filosof“ – odpovídající množinou je {Aristotelés, Platón,...}, „(být) pes“ – odpovídající množinou je {Alík, Fido,...}, „(být) žena“ – odpovídající množinou je {Anna, Gabriela,...}. Takovou množinou může být i jednoprvková množina (tj. singleton), například {Adam}, nebo dokonce množina prázdná, tj. Ø, jak je tomu v případech predikátů jako „(být) jednorožec“.

Monadický predikát (tedy *jednomístný*, *jednočetný* predikát) je ve větách přirozeného jazyka představován pomocí:

- *spony a větného předmětu* – například ve větě „Aristotelés je filosof" představuje monadický predikát výraz „je filosof", což budeme upravovat na „(být) filosof";
- *intranzitivního slovesa* – např. ve větě „Aristotelés myslí" představuje monadický predikát výraz „myslí", či ve větě „Orel má křídla" představuje monadický predikát výraz „má křídla".

Binární (popřípadě *vícemístný*, *vícečetný*) *predikát* je ve větách přirozeného jazyka představován pomocí:

- *tranzitivního slovesa*, například ve větě „Aristotelés myslí na Platóna" představuje binární predikát výraz „myslí na", predikátem je „(někdo) myslí na (něco)"; vzácnější příklad: ve větě „Platón je filosofem idejí" se vyskytuje binární predikát výraz „(být) filosofem (něčeho)".

V přirozených jazycích je velmi časté, že intranzitivní i tranzitivní slovesa mají společný slovní základ, například „myslet" a „myslet na (něco)", „mluvit" a „mluvit o (něčem)", podobně „matka" a „matka (někoho)".

Při analýze budeme predikáty označovat podle prvního písmena českého slova, resp. prvního slova fráze, jež představuje daný predikát (ovšem pokud dané sloveso začíná předponou „ne-" coby slovním záporem, tak až třetím písmenem). Pokud bychom měli mít ve formuli více stejných predikátových symbolů, navzájem je odlišíme třeba pomocí apostrofu, tj. např. P, P′, P′′, atd.

Predikáty dále členíme na *jednoduché* a *složené predikáty*. Složeným predikátem je například „(být) zdatný plavec".

Existenčním kvantifikátorem ∃ zachycujeme zpravidla výrazy jako „některý", „někdo", „něco", „někteří", „nějací", „existuje alespoň jedno individuum *x*, takové že". Obecným kvantifikátorem ∀ zachycujeme zpravidla výrazy jako „každý", „kdokoli", „kdo", „cokoli", „jakýkoli", „pro všechna *x* platí, že", avšak i „nikdo", „žádný".

Níže jsou však odhaleny určité výjimky. Důležitou a známou výjimkou jsou věty, jež by měly obsahovat kvantifikátor, ale z nějakých důvodů je v nich vypuštěn, srov. např. „Krávy mají rohy"; tyto věty obvykle zastupují věty obecně kvantifikující, v našem případě tedy „Všechny krávy mají rohy".

Naneštěstí platí, že většina vět přirozeného jazyka je víceznačných. Adekvátních logických analýz takovýchto výrazů je proto více. V úvodech do logiky ale nějaké příklady potřebujeme a tak jsme následně nuceni někdy požadovat jen jeden typický význam jinak víceznačné věty či obratu.

2.1 Příklady – určení predikátů

V následujících větách identifikujte všechny predikáty:

1)

Alík je pes.

Predikátem zde je:

„(být) pes“ – monadický predikát, symbolicky: „P“.

2)

Všechny velryby jsou savci.

Predikáty jsou zde:

„(být) velryba“ – monadický predikát „V“,
„(být) savec“ – monadický predikát „S“.

3)

Každá velryba je savec.

Protože PL neodlišuje singulár a plurál, predikáty jsou zde stejné jako v minulém příkladu.

4)

Honza běží.

Predikátem je zde:

„běžet“ – monadický predikát „B“.

5)

Petra obdivuje sportovce.

Predikáty jsou zde:

„(někdo) obdivuje (někoho)“ – binární predikát „O“,
„(být) sportovec“ – monadický predikát „M“.

6)

Dřevěný kůň je hračka.

Jednoduchými predikáty jsou zde:

„(být) dřevěný“ – monadický predikát „D“,
„(být) kůň“ – monadický predikát „K“,
„(být) hračka“ – monadický predikát „H“.

Složeným predikátem je „(být) dřevěný kůň“.

7)

Labuť má křídla.

Predikáty jsou zde:

„(být) labuť“ – monadický predikát „L“,
„(mít) křídla“ – monadický predikát „K“.

Predikát „(mít) křídla“ je monadický, protože „mít křídla“ nemá jiný význam než „být okřídlený“, což je zjevný monadický predikát. (Jinak je tomu v případě „mít auto“, kde ‚mít‘ je relací mezi majiteli a jejich auty.)

8)

Každý muž má rád nějaké zvíře.

Jednoduchými predikáty jsou zde:

„(být) muž“– monadický predikát „M“,
„mít rád (něco)“– binární predikát „R“,
„(být) zvíře“– monadický predikát „Z“.

2.2 Příklady – analýza jednoduchých vět s monadickými predikáty

Následující věty přirozeného jazyka formalizujte (analyzujte) prostředky PL:

1)

Aristotelés je filosof.
F(a)

Podle PL tato věta říká, že individuum Aristotelés patří do množiny filosofů.

2)

Někdo je filosof. (= Někteří jsou filosofové.)
$\exists x$ F(x)

Tato věta podle PL zase říká, že množina filosofů není prázdná, že v ní nějaké (= alespoň jedno) individuum je. Nevíme však přesně, které individuum to je – ta věta neobsahuje vlastní jméno žádného individua, a proto nesmí být v naší analýze žádná individuová konstanta.

3)

Každý je filosof. (= Všichni jsou filosofové.)
$\forall x$ F(x)

Podle PL tato věta říká, že všechna individua z univerza jsou filosofy, tedy že patří do množiny filosofů.

4)

Aristotelés není filosof.
$\neg F(a)$

Tato věta podle PL říká, že Aristotelés do množiny filosofů nepatří, tedy že Aristotelés náleží do doplňku množiny filosofů.

5)

Někdo není filosof. (= Někteří nejsou filosofy.)
$\exists x \neg F(x)$

Podle PL tato věta hovoří o tom, že existuje alespoň jedno individuum, které nenáleží do množiny filosofů.

6)

Nikdo není filosof.
$\forall x \neg F(x)$

Tato věta podle PL doslova říká, že pro všechny prvky univerza, tedy pro všechna individua, platí, že nenáleží do množiny filosofů. Vidíme zde známý rozdíl mezi jazykovou a logickou formou: čeština užívá dvojí zápor („nikdo" a „není") k vyjádření jedné negace v logickém smyslu.

7)

Není pravda, že každý je filosof.
$\neg \forall x F(x)$

Tato věta říká, že ne všichni patří do množiny filosofů.

8)

Není pravda, že někdo je filosof.
$\neg \exists x F(x)$

Podle PL tato věta říká ekvivalentním způsobem totéž, co věta 6), totiž že žádné individuum z univerza nenáleží do množiny filosofů.

2.3 Příklady – analýza jednoduchých vět s binárními predikáty

Následující věty přirozeného jazyka formalizujte (analyzujte) prostředky PL:

1)

Anna má ráda Borise.
R(a,b)

Tato věta podle PL říká, že dvojice Anna a Boris patří do množiny dvojic individuí, která se mají ráda.

2)

Anna má ráda někoho.
$\exists x$ R(a,x)

Podle PL říká tato věta to, že mezi dvojicemi individuí, která se mají ráda, je alespoň jedna dvojice taková, že jejím prvním členem je Anna, tedy že je alespoň jedno individuum takové, že Anna k němu má vztah ‚mít ráda'.

3)

Někdo má rád Borise.
$\exists x$ R(x,b)

Tato věta zase podle PL říká, že Boris je tím, koho má alespoň jedno individuum rádo.

4)

Někdo má rád někoho.
$\exists x \exists y$ R(x,y)

Podle PL tato věta říká, že existuje alespoň jedna dvojice individuí, která jsou spolu v relaci ‚mít rád'. Pozn.: Výrazy „někdo" a „někoho" tu zachycujeme pomocí různých proměnných proto, že nejde obecně o tatáž individua (identita x a y ovšem není vyloučena a to v případě, kdy onen někdo má rád i sám sebe).

5)

Všichni mají rádi všechny. (= Každý má rád každého.)

$\forall x \forall y\ \mathrm{R}(x,y)$

Tato věta říká podle PL to, že všechna individua (ve všech dvojicích kartézského součinu univerza U^2) jsou k sobě vztažena relací ‚mít rád'.

6)

Nikdo nemá rád nikoho. (= Každý má každého nerad.)

$\forall x \forall y\ \neg \mathrm{R}(x,y)$

Věta podle PL vlastně říká, že pro všechna individua (ve všech dvojicích kartézského součinu univerza U^2) platí, že se nemají ráda.

7)

Někdo má rád každého.

$\exists x \forall y\ \mathrm{R}(x,y)$

Tato věta říká, že alespoň jedno individuum je takové, že má rádo všechny prvky univerza, tedy všechna individua.

8)

Každý má rád někoho.

$\forall x \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$

Tato věta říká, že pro všechna jednotlivá individua (z univerza) platí, že mají ráda alespoň jedno individuum.

3. Jazyk PL

PL, jíž se budeme v této knize věnovat nejvíce, umožňuje kvantifikaci pouze přes individua, je to *PL prvního řádu*, značena bude „PL1". PL a PL1 měla v minulosti i současnosti rozmanité názvy – k historickým patří „functional calculus", „calculus of propostional functions", k soudobým patří „predicate logic", „predicate calculus", „first-order logic", ovšem v češtině se užívá jen „predikátová logika", popř. „predikátový kalkul", „predikátový počet".

PL1 je poměrně dosti expresivní logický aparát. Často však bývá z praktických důvodů obohacována zejména o znak identity („="; srov. níže kap. 16), popř. i symboly funkcí (např. „+"). $PL1^{=}$ bývá někdy chápána jako ‚kanonický jazyk vědy'. Kromě PL1 existuje i PL druhého řádu, jež umožňuje kvantifikaci přes množiny/relace, obsahuje totiž proměnné predikátové symboly a příslušné kvantifikátory (viz níže kapitolu 18.). Pokud to nebude na újmu srozumitelnosti, u výrazu „PL*n*" budeme číslo *n* vynechávat; obvykle budeme pod výrazem „PL" myslet právě PL1.

Klasická PL prvního i vyšších řádů je *kompozicionální* – sémantická hodnota složeného výrazu je funkcí sémantických hodnot podvýrazů daného výrazu, a je též *dvouhodnotová* – každá formule je pravdivá, nebo nepravdivá.

Podobně jako ve VL je definice jak syntaxe, tak sémantiky jazyka PL rekurzivní. Na základě konečného množství specifikací umožňuje o každém výrazu ověřit (vyhledat), zda je výrazem PL a co je jeho sémantickou hodnotou. V zájmu rekurzívnosti budeme používat znaky „*A*", „*B*" „*C*" apod., jakožto metajazykové znaky zastupující libovolné formule PL.

3.1 Syntax PL

Nejdříve uvedeme *syntax* našeho jazyka PL. Po stanovení *abecedy* vymezíme v gramatice, které řetězce nad danou abecedou jsou slovy tohoto jazyka. Jazyk PL lze zadat různými abecedami a zčásti i jinými gramatikami; níže si ukazujeme jednu z často uváděných možností.

Abeceda

i. individuové proměnné $x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots$
ii. individuové konstanty $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n, \ldots$
iii. predikátové symboly (k značí aritu predikátu; $1 \leq k$) $\mathrm{P}^k, \mathrm{Q}^k, \mathrm{R}^k, \ldots, \mathrm{P}_1^{\,k}, \mathrm{P}_2^{\,k}, \ldots$
iv. výrokové spojky (jakožto symboly) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$
v. kvantifikátory $\forall$ a $\exists$
vi. pomocné symboly (,), příp. [,].

Všechny výrazy uváděné v abecedě jsou znaky. Například proměnná x je znak, konstanta c rovněž.

Zvláště individuových proměnných se obvykle uvažuje nekonečný počet. Individuové konstanty bývají některými matematicky založenými autory z jazyka zcela vypuštěny.

Někdy jsou v jazyce (a tedy už v abecedě) zaváděny *funkční termy* (či *funkční symboly*) f^k, g^k, …; ty mají rovněž aritu (např. „+“ má aritu 2; namísto např. „+(2,3)“ se píše všeobecně známé „2+3“).

Už víme, že predikáty arity 1 jsou zvány *monadické predikáty*, predikáty arity 2 jsou *binární* (vzácně: *dyadické*) *predikáty*,..., predikáty arity n jsou n-ární (tedy *polyadické*) *predikáty*. Připomeňme si ještě naši předcházející dohodu, že namísto o predikátových symbolech budeme mnohdy stručně mluvit jen o predikátech.

Počet výrokových spojek bývá vzhledem k jejich vzájemné definovatelnosti redukován, například na tzv. funkčně úplnou množinu $\{\neg,\rightarrow\}$.

Počet kvantifikátorů lze rovněž zmenšit kvůli vzájemné definovatelnosti kvantifikátorů, totiž $\forall x\ A =_{\mathrm{df}} \neg\exists x\ \neg A$ nebo $\exists x\ A =_{\mathrm{df}} \neg\forall x\ \neg A$ (srov. níže De Morganovy zákony). Někdy se o těchto dvou kvantifikátorech mluví jako o *klasických kvantifikátorech*.

Někdy se však setkáme i s *omezenými kvantifikátory* (angl. „restricted quantifiers“), jmenovitě „$(\forall x{\in}A)$“ a „$(\exists x{\in}A)$“, kde A je podmnožinou U; celá formule se pak píše třeba „$(\forall x{\in}A)\neg B$“. Omezené kvantifikátory jsou ovšem definovatelné následovně:

$$(\forall x{\in}A)\ B(x) =_{\mathrm{df}} \forall x\ (A(x)\rightarrow B(x))$$
$$(\exists x{\in}A)\ B(x) =_{\mathrm{df}} \exists x\ (A(x)\wedge B(x))$$

V nedávné době jsou poměrně dosti diskutovány *zobecněné kvantifikátory* (angl. „generalized quantifiers") jako „většina", „polovina" apod., které se běžně vyskytují v přirozeném jazyce. Pro tzv. *numerické kvantifikátory* jako například „právě dva předměty" srov. níže sekci 16.3.

Obecný kvantifikátor ∀ (někdy je nazýván *univerzální kvantifikátor* či *velký kvantifikátor*) je značen podle prvního písmene německého slova „Alle". Někdy je značen pomocí „Π" (ev. „/\"), anebo zvláště ve starší anglicky psané literatuře pomocí „(x)". *Existenční kvantifikátor* ∃ (někdy nazývaný *částečný kvantifikátor* nebo *malý kvantifikátor*) je značen podle prvního písmene německého slova „exists". Někdy je značen pomocí „Σ" (ev. „\/"), anebo ve starší anglicky psané někdy pomocí „(Ex)". V mnohých zvláště matematicky laděných textech se kvantifikátory spolu s doprovodnými proměnnými dávají do závorek, například „$(\forall x)(\exists y)R(x,y)$".

Ve vzápětí uvedené gramatice PL budeme vymezovat ty řetězce symbolů, jimž v sémantice PL přiřadíme význam. Na rozdíl od VL, jež disponovala jen VL-formulemi, gramatika PL odlišuje *formule PL* – níže jen „formule" – a *termy*. Zatímco formule sémanticky vzato označují pravdivostní hodnoty, termy označují individua. Možná poněkud překvapivě nemají v gramatice vyhrazeno svébytné místo predikátové symboly, ty v ní vystupují jen v kontextu formulí.

Gramatika

1) *Termy*

i. Každá individuová proměnná je *term*.
ii. Každá individuová konstanta je *term*.
iii. Nic jiného není *term*.

2) *Formule*

i. Jestliže P^k je k-místný predikátový symbol a jestliže $t_1,\ldots, t_k$ jsou termy, pak $P^k(t_1,\ldots,t_k)$ je *formule*.
ii. Jestliže A a B jsou formule, pak $\neg A$, $(A{*}B)$ (kde $*$ je $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, nebo $\leftrightarrow$) jsou *formule*.
iii. Jestliže x je proměnná a A je formule, pak $\exists x\ A$ a $\forall x\ A$ jsou *formule*.
iv. Nic jiného není *formule*.

Jak už bylo uvedeno, termy druhu i. a ii. nechť jsou dále značeny „t_k“ (některé texty uvádějí „d_k“; pro 1 ≤ k, kde „$_k$“ není arita). Čili t_k je individuová proměnná nebo individuová konstanta.

Pokud jsou zaváděny funkční termy, tak se do gramatiky přidává, že je-li f^k k-ární funkční term a t_1,..., t_k jsou termy, tak $f^k(t_1,...,t_k)$ je term (kde „^{k}“ je arita); tyto termy jsou tedy složené.

Znak arity „^{k}“ bude u predikátového symbolu zpravidla vynecháván. (Někdy v literatuře nalezneme, že se například o formuli „$\mathrm{P}(t_1,...,t_k)$“ mluví jako o predikátu; důvodem tohoto zápisu predikátu jako formule je však snaha vyznačit jak aritu, tak popř. některé z možných argumentů.)

Formule ad 2.2)i. jsou zvány *atomické formule*, kdežto ad. 2.2)ii.–iii. jsou zvány *složené formule*. Stojí-li formule tvaru ($A{*}B$) samostatně, obvykle vynecháváme vnější závorky, tj. píšeme „$A{*}B$“. Vzácně budeme pro lepší čitelnost vkládat okolo „$*$“ mezery, tj. psát „$A * B$“.

Pokud A v $\exists x\ A$ či $\forall x\ A$ je tvaru $\exists x\ B$ či $\forall x\ B$, mezeru za kvantifikátory a proměnnými u nich vypouštíme, tj. píšeme například „$\exists x\exists x\ B$“ namísto „$\exists x\ \exists x\ B$“. V literatuře někdy bývá užívána notační konvence, podle níž „$\forall x_1...x_n\ A$“ zkracuje „$\forall x_1\forall x_2...\forall x_n A$“; obdobně pro případy s $\exists$. Bývá též zmiňováno, že v případě (nekonečného) univerza je $\forall x\ \mathrm{P}(x)$ ekvivalentní nekonečné konjunkci $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1)\wedge...\wedge\mathrm{P}(\mathrm{a}_n)$ (kde a_1,..., a_n jsou individuové konstanty); $\exists x\ \mathrm{P}(x)$ je zase ekvivalentní nekonečné disjunkci $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1)\vee...\vee\mathrm{P}(\mathrm{a}_n)$. Upozorňujeme, že gramatika umožňuje i kvantifikované formule, v jejichž ‚těle‘ se nenachází formule s volnou proměnnou, tj. např. $\forall x\exists y\ \mathrm{R}(\mathrm{a},\mathrm{b})$.

Doplňme nyní informaci o formulích, jejichž operátory jsou jen $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Formuli A^δ, která vznikne systematickou záměnou $\forall$ a $\exists$, $\wedge$ a $\vee$, nazýváme *duální formulí* k formuli A. Formule A a A^δ jsou k sobě vzájemně duální. Platí, že $\neg A\leftrightarrow A^\delta$ právě tehdy, když všechny atomické podformule jsou v právě jedné z těchto formulí negovány. Například jsou takto ekvivalentní $\neg\forall x\ \mathrm{P}(x)$ a $\exists x\ \neg\mathrm{P}(x)$ (ekvivalence mezi právě těmito dvěma formulemi je tzv. De Morganův zákon, srov. seznam logicky pravdivých formulí v kapitole 4.).

Podobně jako ve VL budeme níže někdy mluvit o podformulích. Definici z VL jen patřičně rozšíříme.

Podformule

i. Každá formule A je (tzv. nevlastní) *podformulí* A.
ii. Je-li formule A tvaru $\neg B$, tak B je (tzv. vlastní) *podformulí* A.
iii. Je-li formule A tvaru $(B * C)$, tak B a C jsou (tzv. vlastními) *podformulemi* A.
iv. Je-li formule A tvaru $\exists x\, B$ a $\forall x\, B$, tak B je (tzv. vlastní) *podformulí* A.
v. Nic jiného není *podformulí* formule A.

Kromě podformulí se někdy mluví i o *podtermech*, ale je nasnadě, že podtermy může mít jen funkční term: je-li $f^k(t_1,...,t_k)$ term, tak $t_1,..., t_k$ jsou podtermy $f^k(t_1,...,t_k)$.

Pochopitelně můžeme definovat míru *složitosti formule*, a to jako číslo, jež je počtem výrokových spojek a kvantifikátorů. Dalším údajem, který je zajímavý, je počet vnořených kvantifikátorů, tzv. *řád* (angl. „rank“), což je číslo úměrné množství zanořených kvantifikátorů (i. formule bez kvantifikátoru má řád 0, ii. řád formule složené pomocí výrokových spojek je roven nejvyššímu řádu formulí spojených těmito spojkami, iii. řád formule $\exists x\, B$ nebo $\forall x\, B$ je roven řádu B plus 1; například $\mathrm{P(a)} \land \exists y\, \forall x\, \mathrm{R}(x,y)$ má řád 2.

O výstavbě formulí můžeme rovněž uvažovat v tom smyslu, že tu jsou tyto *formule vytvářející posloupnosti*. Ty získáme, když čteme odspodu (od listů) směrem ke kořeni *syntaktické stromy (pod)formulí*, poněvadž v kořeni stromu je sama formule, v uzlech větví jsou složené podformule a listy jsou tvořeny atomickými formulemi. Zde je ukázka, napravo v úspornější formě:

```
          ∃x (¬R(x,y)→∀z P(z))                    ∃x
           |                                       |
  ¬R(x,y)→∀z P(z)                                  →
          /   \                                   /  \
   ¬R(x,y)  ∀z P(z)                              ¬    ∀z
    |         |                                  |     |
   R(x,y)    P(z)                             R(x,y)  P(z)
```

V souladu s výstavbou formulí podle gramatiky se hovoří o tom, že nějaká definice či nějaký důkaz jsou vystavěny *indukcí podle složitosti formule*, což je pojem, který zužitkovává pojem podformule.

Po syntaktické stránce umožňují kvantifikátory vázání proměnných vyskytujících se v nějaké formuli. Proměnné pak rozlišujeme vázané a volné. Striktně vzato ale nejsou vázané či volné proměnné, ale jejich výskyty. V jedné formuli totiž může být jedna proměnná jak v určitém výskytu volná, tak v nějakém jiném výskytu vázaná. Platí, že žádný výskyt proměnné nemůže být vázán dvěma či více kvantifikátory; na druhou stranu, jeden kvantifikátor může vázat více než jeden výskyt jedné proměnné.

Volnost a vázanost výskytů proměnných

i. *Výskyt proměnné x* je *volný* ve formuli $\neg A$ právě tehdy, když je volný v A. *Výskyt* proměnné x je *volný* ve formuli $(A{*}B)$ právě tehdy, když je volný v A nebo v B.
ii. *Výskyt proměnné x* je *volný* ve formuli tvaru $\exists y\ B$ a $\forall y\ B$ právě tehdy, když je volný v B a proměnná x je odlišná od proměnné y.
iii. *Výskyt proměnné x* je *vázaný* ve formuli tvaru $\exists y\ B$ a $\forall y\ B$ právě tehdy, když je volný v B a zároveň je proměnná x totožná s proměnnou y.

Pro ilustraci, každý první výskyt x v následujících formulích je volný: $\mathrm{P}(x)$, $\exists y\ \mathrm{P}(x)$, $\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists x\ \mathrm{P}(x)$. Na druhou stranu výskyt x v $\exists x\ \mathrm{P}(x)$ je vázaný; proto je vázaný poslední výskyt x v $\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists x\ \mathrm{P}(x)$. Ne příliš často uváděná podmínka iii. nám ukazuje, že ten výskyt x, který je vázaný v $\exists x\ \mathrm{P}(x)$ je výskyt x v její podformuli $\mathrm{P}(x)$. Zda je výskyt x vyskytující se bezprostředně za $\exists$ volný nebo vázaný, definice nijak nestanovuje.

Někdy je v diskusi dostatečné anebo žádoucí abstrahovat od volnosti či vázanosti výskytu proměnné a stručně se vyjadřovat jen k volnosti anebo vázanosti proměnné:

Volnost a vázanost proměnných

i. *Proměnná x* je *volná* ve formuli A právě tehdy, když x má v A alespoň jeden výskyt volný.
ii. *Proměnná x* je *vázaná* v A právě tehdy, když jsou všechny výskyty x v A vázané.

(O volných proměnných se kdysi mluvilo jako o *skutečných* proměnných, kdežto o vázaných proměnných jako o *fiktivních* či *zdánlivých* proměnných.)

Následující definice bude využívána podstatně častěji:

Otevřené a uzavřené formule

i. Formule A je *uzavřená* právě tehdy, když jsou v A všechny proměnné vázány.
ii. Formule A je *otev*řená právě tehdy, když je v A alespoň jeden výskyt nějaké proměnné volný.

Uzavřené formule jsou někdy v literatuře nazývány *sentence*.

V prostředí matematické logiky se pak setkáváme s (*univerzálními*) *uzávěry formule A* (angl. „closure"), což jsou formule tvaru $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n\ A$, kde na pořadí kvantifikátorů vážících volné proměnné $x_1, x_2,..., x_n$ formule A nezáleží, neboť všechny uzávěry A (jež se tedy liší právě jen pořadím kvantifikátorů vázajících proměnné) jsou ekvivalentní.

Uvědomme si tedy, že formule jako například $\exists x\ (\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x))$ a $\exists x\ \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x)$ se závažným způsobem liší. V první formuli jsou oba výskyty x vázány existenčním kvantifikátorem. Druhá formule je však konjunkcí dvou podformulí, přičemž pouze v druhé z nich, totiž v $\mathrm{Q}(x)$, má x volný výskyt. První formule je tedy uzavřená, kdežto druhá otevřená (bez ohledu na to, že obsahuje uzavřenou podformuli).

To, které výskyty proměnných jsou daným kvantifikátorem vázány, ukazuje *dosah kvantifikátoru* (angl. „scope"). Říkáme, že nějaká proměnná, přesněji její výskyt, je či není v dosahu daného kvantifikátoru, což znamená, že je tímto kvantifikátorem vázána. (Někdy bývá definováno, že dosahem kvantifikátoru jako $\exists$ ve formuli $\exists x\ A$ je A.) Například poslední výskyt x v $\exists x\ (\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x))$ je v dosahu $\exists$; ve formuli $\exists x\ \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x)$ je však poslední výskyt x mimo dosah $\exists$. V následujícím příkladu jsou všechny výskyty x v $\exists x\ (\mathrm{P}(x) \wedge \exists y\ \mathrm{Q}(x))$ vázány vepředu stojícím kvantifikátorem $\exists$, druhý kvantifikátor $\exists$ ovšem neváže žádný výskyt nějaké proměnné.

Vázání výskytů proměnných má tedy dopad na možnost korektního přejmenování proměnných a obecněji dosazování termů za proměnnou.

Substituovatelnost termu za proměnnou

Term t je *substituovatelný* za proměnnou x ve formuli A právě tehdy, když term t je individuová konstanta anebo individuová proměnná taková, že po dosazení do formule A není v dosahu žádného kvantifikátoru, který váže proměnnou x. Značíme $A[t/x]$.

Upozorňujeme, že $A[t/x]$ je formulí A, v níž jsou termem t substituovány všechny volné výskyty x.

Formule $A[t/x]$ bývá někdy nazývána *instancí* formule A. Uvědomme si, že instancí třeba $\forall y\ \mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(x)[t/x]$ je jak $\forall y\ \mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{a})$, tak $\forall y\ \mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(x)$. Ovšem $\forall y\ \mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(y)$ už nikoli, neboť náš term t, totiž y, není substituovatelný za x, poněvadž z volné proměnné x by se stala vázaná proměnná. Při substituci se této tzv. kolizi proměnných předchází *korektním přejmenováním proměnných*, tj. všechny výskyty y jsou v našem příkladu přepsány třeba na z. Uveďme jiný konkrétní příklad: v $\forall x\ \mathrm{R}(x,w)$ lze změnit x na y, čehož výsledkem je $\forall y\ \mathrm{R}(y,w)$; nelze však za x substituovat w, protože výsledkem by byla formule $\forall w\ \mathrm{R}(w,w)$, došlo by tedy k vázání daného výskytu.

3.2.1 Sémantika PL1 – struktura, ohodnocení, realizace, interpretace

Vzhledem ke komplexitě formulí a dalších výrazů PL je sémantika PL výrazně složitější než sémantika VL.

Připomeňme si, že sémantická hodnota formule VL byla vypočítána s ohledem na konkrétní valuaci v a interpretaci $\mathfrak{I}$. Každá valuace v je funkce, která přiřazuje pravdivostní hodnoty výrokovým proměnným; výrokové proměnné jsou atomickými formulemi VL. Interpretace $\mathfrak{I}$ je rozšířením v v tom smyslu, že $\mathfrak{I}$ v sobě zahrnuje v, přičemž v souladu s v a s definicemi výrokových spojek přiřazuje $\mathfrak{I}$ pravdivostní hodnoty i jiným než atomickým formulím VL. Například, jestliže $v(p)=1$ a $v(q)=0$, tak $\mathfrak{I}(v,A \vee B)=1$, protože pro $\langle 1,0 \rangle$ vrací funkce $\vee$ hodnotu 1. V tomto smyslu je interpretace ‚parametrizována' vzhledem k v.

Sémantiku VL jsme si definovali takto i kvůli tomu, abychom si usnadnili přechod k formulaci sémantiky PL. Namísto valuace v budeme mít *ohodnocení e* (angl. „evaluation", popř. „assignment"; v česky psaných textech často najdeme i termín „valuace"; v textech informatiků nacházíme i angl. „enviroment", což je vlastně momentální nastavení hodnot proměnných v prostředí běžícího počítačového programu). V PL jsou ohodnocovány termy (nikoli výrokové proměnné, jež v jazyce klasické PL1 chybí). Namísto interpretace ‚parametrizované' vzhledem k v, máme v PL *interpretaci* ‚parametrizovanou' vzhledem k e; značíme ji však rovněž $\mathfrak{I}$ a objasníme si ji za chvíli.

Ohodnocení *e*

Každé ohodnocení *e* je funkce (zobrazení), která termům přiřazuje prvky univerza U. Značíme *e*(*t*)=ξ, kde *t* je term a ξ prvek U.

(Ohodnocení *e* někdy bývá rozšiřováno na ē, jež ohodnocuje i funkční termy, srov. níže interpretaci termů. K tzv. pozměněnému ohodnocení viz níže sekci 3.2.2.)

V některých kontextech budeme aplikaci *e* na daný term *t* značit např. *t*[*e*]=ξ. (Psaní *e* do hranatých závorek za výraz jazyka PL má ještě jeden význam, totiž že daný výraz je interpretován při ohodnocení *e*; srov. níže.)

Někteří autoři uvádějí takové rozšíření *e*, podle něhož *e* ohodnocuje konstanty jako c právě tak jako interpretace $\mathfrak{I}$. Někdo by mohl očekávat, že ohodnocení *e* a zvláště pak rozšířené *e*, resp. $\mathfrak{I}$, vždy ohodnotí například konstantu „a" jakožto označující individuum α, nikdy ne β. Obecnost úvah v matematické logice však vyžaduje, aby term „a" mohl díky *e* označovat kterýkoli prvek U, třeba β. V naší knize se však budeme držet praxe, že interpretací např. „a" bude vždy α; α je takto tzv. *designovaná hodnota* pro „a".

Nyní si přiblížíme několik pojmů často skloňovaných v rámci matematické logiky. Jazyk PL je umělý a tedy vlastně jakoby neznámý jazyk, a proto potřebuje explicitní uvedení své sémantiky, tedy toho, co výrazy daného jazyka znamenají. Logika je pak možno chápat jako někoho, kdo zkouší onen cizí jazyk interpretovat. To je důvod, proč se setkáváme s technickým pojmem *interpretace* a proč jej volíme v této knize i my. Namísto tohoto termínu se ovšem zvláště v prostředí matematické logiky setkáme s termíny „struktura", ba i „model", které jsou v zásadě míněny obdobně. Různí autoři ovšem tyto termíny různě definují a někteří je i ztotožňují. Podotkněme, že našimi hlavními termíny budou „interpretace" a „ohodnocení", s termíny „model" či „struktura" v níže uvedeném smyslu budeme pracovat jen příležitostně.

Nejprve si přiblížíme pojem modelu. *Model* je něco jako realita, či spíše kus reality. Modelem formule říkající, že v Paříži prší, je realita pršení v Paříži. Pro více konkrétní příklad, formule P(a)∧R(a,b) je interpretována jakožto mluvící o tom, že α je v množině označované predikátem P a že ⟨α,β⟩ je v množině označované predikátem R. Modelem je tedy to, že α je prvkem množiny ‚P', a přitom je ve vztahu ‚R' k β. Jak si čtenář jistě domyslel, rozdíl mezi modelem a interpretací tedy lze mnohdy pominout. Náš pojem modelu zavedeme přesněji až níže na konci sekce 3.2.2.

Exaktní termín *struktura* $\mathcal{M}$ (mnohými značena „A“) bývá nezřídka zvláště v prostředí matematické logiky nahrazován termíny „model“, ba i *interpretace*. Každá matematická struktura má dvě složky: nosnou množinu *M* a množinu operací na *M*, operací v širším slova smyslu. Pro ilustraci si vezměme náš příklad z kapitoly 1., jehož objekty lze chápat jako strukturu. *Nosnou množinou M* (značená též třeba |A|) této naší struktury byla {α,β,γ} (tj. Anna, Bára, Gabriela). V logice nosné množině často říkáme *doména D* či *univerzum* U. Univerzum U sestává z předmětů, jimž říkáme individua. Vynecháme-li nyní z operací funkce, tak jsou operacemi struktury především relace, v našem příkladu to byla třeba relace ‚být vyšší než‘.

Struktura $\mathcal{M}$

Struktura $\mathcal{M}$ sestává z neprázdného univerza U jakožto nosné množiny a množiny funkcí, jež jsou prvky $U^n \mapsto U$, a dále množiny relací, jež jsou podmnožinami U^n, tj. obecně $\mathcal{M}=\langle U,U^n \mapsto U,U^n\rangle$.

Příkladem (matematické) struktury s konečnou doménou je třeba $\langle\{1,0\},\{\neg,\rightarrow\}\rangle$; příkladem struktury s nekonečnou doménou je třeba $\langle\mathcal{N},\{+,\times\},\{<\}\rangle$, kde $\mathcal{N}$ je množina přirozených čísel, $\{+,\times\}$ je množinou funkcí (operací) na $\mathcal{N}$ a $\{<\}$ je množinou relací na $\mathcal{N}$ (mnozí autoři vynechávají vnitřní závorky a píší rovnou $\langle\mathcal{N},+,\times,<\rangle$).

$\mathcal{M}$ je zvána *relační strukturou*, pokud kromě domény obsahuje pouze relace. Příkladem relační struktury je námi níže běžně využívaná $\langle U,U^n\rangle$ nebo třeba $\langle\mathcal{Z},\{<\}\rangle$, kde $\mathcal{Z}$ je množina celých čísel. Pokud nemá struktura žádné relace, je to *algebraická struktura* (někdy zestručňováno na *algebra*). Příkladem je třeba $\langle\{1,0\},\{\neg,\rightarrow\}\rangle$.

Nyní nechť *L* je jazyk nějaké formální teorie, jež zahrnuje PL. *Jazyk L* je interpretován v tom smyslu, že jeho výrazy denotující objekty nějaké struktury. Například jména *L* denotují prvky U a predikáty *L* denotují relace definované nad U (namísto „nad U“ mnozí píší „nad $\mathcal{M}$“). Pokud k tomu dochází, tedy jazyk *L* hovoří o věcech dané struktury, trefně se říká, že *L* má *realizaci* v této struktuře.

Realizace jazyka *L* ve struktuře $\mathcal{M}$

Jazyk *L* má *realizaci ve struktuře* $\mathcal{M}$ právě tehdy, když všechny termy a funkční a predikátové symboly jazyka *L* mají každý svou dílčí realizaci v $\mathcal{M}$, tj. označují prvky univerza U a funkce, jež jsou prvky $U^n \mapsto U$, a relace, jež jsou podmnožinami U^n.

Dílčí realizace jsou tyto: realizací termu t je ohodnocení e takové, že $e(t)\in U$ (e je tedy definováno pro $\mathcal{M}$, tj. úžeji pro U); realizací predikátového symbolu R^k je nějaká podmnožina U^k; realizací k-árního funkčního termu je funkce, jež je prvkem $U^k \mapsto U$.

Zavedení termínu interpretace v námi intendovaném smyslu si odůvodníme následujícím pozorováním. Realizací nějaké formule jako takové není nic, protože pravdivostní hodnoty 1 a 0 v $\mathcal{M}$ nejsou. Pravdivostní hodnoty – 1 jako *Pravda*, 0 jako *Nepravda* – můžeme při vyznávání redukcionismu chápat jako totožné s nějakými objekty $\mathcal{M}$ (např. s univerzální a prázdnou množinou, v tomto pořadí), ale to není příliš obvyklé. Pravdivostní hodnoty můžeme totiž chápat až jako entity, jež jsou potřeba k realizaci našeho *metajazyka ML*, jímž popisujeme *objektový jazyk L*, jímž je právě zadávaný jazyk PL. Když tedy tvrdíme, že formuli A interpretujeme jakožto mající pravdivostní hodnotu 1 nebo 0, přičemž pravdivostní hodnoty v $\mathcal{M}_L$ (kde $\mathcal{M}$ je struktura pro jazyk L) nejsou, tak pravdivostní hodnoty jsou prvky $\mathcal{M}_{ML}$.

Konečně je tu náš nejdůležitější pojem:

Interpretace $\mathfrak{I}$

Interpretace $\mathfrak{I}$ je funkce, která všem výrazům jazyka L přiřazuje sémantické hodnoty vzhledem k realizaci L v $\mathcal{M}$ a k ohodnocení e.

Správně by $\mathfrak{I}$ měla být explicitně vztahována k dané struktuře $\mathcal{M}$, ale my budeme tento údaj obvykle vypouštět. Takže místo například „$\mathfrak{I}(\mathcal{M},e,A)$“ či „$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}(A)[e]$“, kde A je term nebo formule daného jazyka L, budeme psát mnohem obvyklejší „$\mathfrak{I}(A)[e]$“, přičemž v kontextu úvahy je dána relevantní struktura $\mathcal{M}$.

Interpretace $\mathfrak{I}$ v sobě zahrnuje realizaci termů, tj. ohodnocení termů a realizaci funkčních a predikátových symbolů. V našem pojetí však zahrnuje i realizaci formulí jakožto označujících pravdivostní hodnoty. Termín „realizace formule“ se však neříká právě proto, že ve struktuře obvykle není žádný objekt (pravdivostní hodnota), který by mohl být realizací té formule. Pokud bychom chápali realizaci jako funkci přiřazující výrazům denotáty (resp. významy), tak bychom mohli chápat interpretaci prostě jako rozšíření funkce realizace a to o přiřazování denotátů formulím.

Už bylo řečeno, že různí autoři definují pojmy model, struktura, interpretace různě. My jsme se snažili shodnout s mnoha těmito autory, byť jsme poněkud modifikovali (rozšířili) pojem interpretace. Není totiž vzácné, že termín „interpretace“ si autoři ponechávají namísto realizace ve výše uvedeném smyslu realizace. U jiných autorů můžeme najít třeba toto chápání: struktura $\mathcal{M}$ prvořádového jazyka *L* je $\langle D, \mathfrak{I} \rangle$, kde *D* je doména a $\mathfrak{I}$ interpretace, přičemž $\mathfrak{I}$ přiřazuje prvkům *L* prvky *D* nebo objekty definovatelné nad *D*, např. relace. Jiní autoři zase chápou strukturu $\mathcal{M}$ jako doslova totožnou s interpretací $\mathfrak{I}$ ve smyslu realizace.

Nyní si naše klíčové pojmy ve zkratce zrekapitulujeme:

- *struktura* $\mathcal{M}=\langle \mathrm{U}, \mathrm{U}^n \mapsto \mathrm{U}, \mathrm{U}^n \rangle$ je realita sestávající se z předmětů-individuí v U a z funkcí a relací mezi těmito předměty (struktuře někdy říkáme *model*; model je struktura, která činí pravdivou formuli, resp. množinu formulí, viz níže 3.2.2 a 3.2.3)
- *ohodnocení e* je funkce přiřazující sémantické hodnoty, tj. nějaké entity z $\mathcal{M}$) termům jazyka *L*; ohodnocení je realizací termů v $\mathcal{M}$
- *realizace* výrazů jazyka *L* v $\mathcal{M}$ je funkce, která přiřazuje sémantické hodnoty (jež jsou nějakými entitami z $\mathcal{M}$) výrazům *L*, jmenovitě termům a funkčním a predikátovým symbolům
- *interpretace* $\mathfrak{I}$ je funkce, jež přiřazuje všem (smysluplným) výrazům *L* sémantické hodnoty, přičemž tato funkce v sobě zahrnuje (je tedy rozšířením) realizaci *L* v $\mathcal{M}$

3.2.2 Sémantika PL1 – interpretace jazyka PL

Interpretací $\mathfrak{I}$ termu *t* je realizace *t* v $\mathcal{M}$. To znamená, že interpretací $\mathfrak{I}$ konstanty c je nějaký prvek univerza U. Interpretací $\mathfrak{I}$ proměnné *x* je rovněž nějaký prvek U, nicméně ten, který je té proměnné *x* přiřazen ohodnocením *e*.

Interpretaci $\mathfrak{I}$ *termu t při ohodnocení e* značíme „$\mathfrak{I}(t)[e]$“. Interpretace termů $\mathfrak{I}(t)[e]$ je binární funkce (zobrazení) definovaná na dvojicích ⟨term, ohodnocení⟩, přičemž její funkční hodnoty jsou prvky U.

Interpretace termů

1) Termy

i. Je-li term *t* proměnná *x*, pak $\mathfrak{I}(t)[e]=e(x)$.
ii. Je-li *t* individuová konstanta c, pak $\mathfrak{I}(t)[e]=\mathfrak{I}(\mathrm{c})$.

Někteří autoři nepoužívají termín interpretace v našem smyslu a mluví rovnou o *realizaci termu při ohodnocení e*, což značí $t[e]$ a definují to takto: i. jestliže t je proměnná, tak $t[e]=e(t)$; ii. jestliže t je konstanta c, tak $\mathrm{c}[e]=\mathrm{c}_{\mathcal{M}}$ (popř. místo „$\mathrm{c}_{\mathcal{M}}$“ píší „$\mathrm{c}^{\mathcal{M}}$“).

Kvůli funkčním termům bývá někdy ohodnocení e rozšiřováno na ē, jenž v sobě zahrnuje e. Je to ohodnocení proměnných, ale navíc ohodnocuje i funkční termy: $\bar{e}(f(t_1,t_2,...,t_n))=f(\bar{e}(t_1),\bar{e}(t_2),...,\bar{e}(t_n)))$.

Níže budeme potřebovat mluvit o *pozměněném ohodnocení*. Obecně platí, že různá ohodnocení se mohou shodovat v tom, co přiřazují nějakému termu, přesněji proměnné – jedné či více proměnným mohou přiřazovat tytéž prvky U. Pozměněné ohodnocení se však bude lišit od původního ohodnocení jen v tom, co přiřazuje jedné určité proměnné. Pozměněné ohodnocení bývá mnohdy zapisováno $e(p/x)$, kde p je konkrétní prvek U, který je přiřazen x, přičemž právě tímto jedním dílčím přiřazením se $e(p/x)$ liší od e. Například $e(\beta/x)$ je funkce identická s e, přičemž se navzájem liší jedině v tom, že $e(\beta/x)$ přiřazuje proměnné x individuum β.

Pozměněné ohodnocení může být rigorózně definováno následujícím způsobem:

Pozměněné ohodnocení

$$e(p/x)(y) \begin{cases} p & \text{je-li } y=x \\ e(y) & \text{je-li } y\neq x \end{cases}$$

Protože níže nebudeme potřebovat, aby bylo specifikováno, čím konkrétně se pozměněné ohodnocení liší od e, můžeme pro jeho označení užívat jen „e'“.

Konečně se dostáváme k definici interpretace formulí. Tato definice je rekurzivní, postupuje dle složitosti formule. *Interpretaci* $\mathfrak{I}$ *formule A při ohodnocení e* budeme zapisovat pomocí „$\mathfrak{I}(A)[e]$“, kde A je formule. Interpretace formulí $\mathfrak{I}(A)[e]$ je binární funkce (zobrazení) definovaná na dvojicích ⟨formule, ohodnocení⟩, přičemž jejími funkčními hodnotami jsou pravdivostní hodnoty.

Interpretace formulí

2) *Formule*

2.1) *Atomické formule*

i. Je-li A atomická formule $P^k(t_1,\dots,t_k)$, pak $\Im(A)[e]=1$ právě tehdy, když $\langle\Im(t_1)[e],\dots,\Im(t_k)[e]\rangle\in\Im(P^k)$.

2.2) *Molekulární formule*

a)

i.	Je-li A tvaru $\neg B$,	pak $\Im(A)[e]=1$ právě tehdy, když	$\Im(B)[e]=0$.
ii.	Je-li A tvaru $B\wedge C$,	pak $\Im(A)[e]=1$ právě tehdy, když	$\Im(B)[e]=\Im(C)[e]=1$.
iii.	Je-li A tvaru $B\vee C$,	pak $\Im(A)[e]=0$ právě tehdy, když	$\Im(\mathrm{B})[e]=\Im(C)[e]=0$.
iv.	Je-li A tvaru $B\rightarrow C$,	pak $\Im(A)[e]=0$ právě tehdy, když	$\Im(B)[e]=1$ a $\Im(C)[e]=0$.
v.	Je-li A tvaru $B\leftrightarrow C$,	pak $\Im(A)[e]=1$ právě tehdy, když	$\Im(B)[e]=\Im(C)[e]$.

b)

i. Je-li A tvaru $\forall x\ B$, pak $\Im(A)[e]=1$ právě tehdy, když při každém pozměněném ohodnocení e' platí $\Im(B)[e']=1$.

ii. Je-li A tvaru $\exists x\ B$, pak $\Im(A)[e]=1$ právě tehdy, když při některém pozměněném ohodnocení e' platí $\Im(B)[e']=1$.

V dílčích bodech by mohlo být přidáno poněkud nadbytečné upozornění „v opačném případě $\Im(A)[e]=0$“; v bodech 2.2.a)iii.–iv. by samozřejmě bylo doplněno „v opačném případě $\Im(A)[e]=1$“.

Než budeme k této definici uvádět doplňující informace, uvedeme si konkrétní příklady interpretace formulí. Přitom budeme používat zápis jako $\Im(\mathrm{P})$, jež výše nebyl definován, nicméně plyne z definice sémantiky formulí jako P(a), P(x) apod.: „$\Im(\mathrm{P})$“ označuje množinu všech těch individuí, pro něž – jsou-li hodnotami x – je formule P(x) pravdivá.

2.1)i. První krok definice vymezuje, kdy jsou pravdivé atomické formule jako P(a), P(x), nebo R(a,b) či R(a,x). Tyto formule jsou pravdivé tehdy, když interpretace daných termů jsou prvky interpretací příslušných predikátů. Nechť $\mathrm{U}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Pak například formule $\Im(\mathrm{P(a)})[e]=1$ tehdy, když například $\Im(\mathrm{P})=\{\alpha,\beta\}$, $\Im(\mathrm{a})=\alpha$, a tedy $\Im(\mathrm{a})\in\Im(\mathrm{P})$. Obdobně pro P($x$), jen s tím, že musí být $\Im(x)[e]=\alpha$ nebo $\Im(x)[e]=\beta$. V dalším dílčím příkladu platí $\Im(\mathrm{R(a,b)})[e]=1$ tehdy, když $\Im(\mathrm{a})=\alpha$, $\Im(\mathrm{b})=\beta$ a $\Im(\mathrm{P})=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\dots\}$ (kde „...“ označuje, že zde mohou, ale nemusí být další dvojice z U^2). Interpretace R(a,x) či R(y,x) je snadno odvoditelná z výše řečeného.

Zde je přehledná tabulka právě uváděných příkladů, kdy jsou do ‚sloupečků' pod termy psána přiřazená individua a pod predikátové symboly jsou kurzívou psány příslušné pravdivostní hodnoty. Nechť tedy:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$
$\Im(P)=\{\alpha,\beta\}$
$\Im(R)=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\alpha\rangle\}$
$\Im(a)=\alpha$
$\Im(b)=\beta$
$\Im(x)[e]=\beta$
$\Im(y)[e]=\alpha$

	P (a)	P (x)	R(a,b)	R(a,y)	R(x,y)
e:	*1* α	*1* β	*1* $\alpha\ \beta$	*0* $\alpha\ \alpha$	*1* $\beta\ \alpha$

2.2.a)i.–v. Tyto definiční kroky známe již z VL, nebudeme je zde znovu vysvětlovat. Zde je jeden ilustrující příklad: $\Im(P(a)\vee R(a,y))[e]=1$ při interpretaci a ohodnocení uvedeném v odstavci komentujícím bod 2.1)i., protože P(a) nebo R(a,y) má při dané interpretaci a ohodnocení pravdivostní hodnotu 1.

2.2.b)i. Kroky pro kvantifikované formule jako například $\forall x$ R(x,y) využívají pozměněné ohodnocení e'. Pravdivost takové formule totiž není podmíněna tím, co e přiřazuje vázané proměnné jako např. x v našem příkladu. Kvantifikátor tedy jakoby říká: nedbej na momentální odhodnocení x a projdi veškerá možná ohodnocení x a prozkoumej, zda tato individua, jež jsou možnými hodnotami x, ‚splňují' danou formuli. Jsou tedy evokována alternativní ohodnocení; z množiny všech možných ohodnocení, co existují, jsou však vybrána jen určitá pozměněná ohodnocení, jež se od e liší v hodnotě pro proměnné x.

Zde jsou dva příklady, jež jsou vypsány ‚sloupečkovým' způsobem. V řádcích pod formulí je rozepsána hodnota otevřené formule B (jež je ‚tělem' námi zkoumané $\forall x$ B) při ohodnocení e a příslušných pozměněných ohodnoceních e' (jež odlišujeme jako e_1' a e_2'). Číslice více zarovnaná vlevo a psaná kurzívou je výslednou interpretací dané formule.

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$
$\Im(P)=\{\alpha,\beta\}$
$\Im(R)=U^2$
$e(x)=\alpha$
$e(y)=\gamma$

	$\forall x\, P(x)$	$\forall x\, R(x,y)$
e:	1 α	1 $\alpha\,\gamma$
e_1':	1 β	1 $\beta\,\gamma$
e_2':	0 γ	1 $\gamma\,\gamma$
	0	*1*

2.2.b)ii. V případě formulí tvaru $\exists x\, B$ je tomu zcela podobně jen s tou výjimkou, že taková formule je pravdivá, když aspoň pro jedno ohodnocení e' je B pravdivá. Nechť:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$
$\Im(P)=\{\alpha,\beta\}$
$\Im(R)=\emptyset$
$e(x)=\alpha$
$e(y)=\gamma$

	$\exists x\, P(x)$	$\exists x\, R(x,y)$
e:	1 α	0 $\alpha\,\gamma$
e_1':	1 β	0 $\beta\,\gamma$
e_2':	0 γ	0 $\gamma\,\gamma$
	1	*0*

Dostatek příkladů k procvičení interpretací formulí lze nalézt v kap. 12.

Zde si ještě ukážeme, že výpočet sémantické hodnoty ‚sloupečkovým způsobem' lze vyjádřit i odlišně. Z tohoto vyjádření je dobře vidět, že ohodnocení vytváří systém argumentů a formule jako $R(x,z)$ je funkcí provádějící výpočet, přičemž pro různá ohodnocení e, e_1', e_2',..., e_n' (pro $n=|U|$) dává rozmanité výsledky. Vzhledem k definici sémantiky pro kvantifikované formule bude formule $\exists x\, R(x,y)$ ohodnocením e, e_1', e_2',..., e_n' přiřazovat při dané interpretaci R vždy tutéž hodnotu.

$e(x)=\alpha$
$e(y)=\gamma$
$e(z)=\beta$
$\Im(\mathrm{P})=\{\beta\}$
$\Im(\mathrm{R})=\{\langle\gamma,\beta\rangle\}$

	$x, y, z,...$	$\mathrm{P}(x)$	$\mathrm{P}(y)$	$\mathrm{P}(\mathrm{a})$	$\mathrm{R}(x,z)$	$\exists x\, \mathrm{R}(x,y)$
e	$\alpha\ \gamma\ \beta...$	0	0	0	0	1
e_1'	$\beta\ \gamma\ \beta...$	1	0	0	0	1
e_2'	$\gamma\ \gamma\ \beta...$	0	0	0	1	1

Nyní se vraťme k obecnějším poznámkám o naší definici. Díky námi stanovenému pojmu interpretace je $\Im$ binární funkcí definovanou na dvojicích ⟨formule *A*, ohodnocení *e*⟩ (kromě formulí to mohou být termy, ale od toho teď abstrahujme); hodnotami této funkce jsou pravdivostní hodnoty 1 a 0. Už jsme řekli, že pravdivostní hodnoty ve struktuře $\mathcal{M}$ nejsou; aby však byla $\Im$ dobře definována, její hodnoty 1 a 0 někde být musí. My předpokládáme, že jsou prvky struktury, která umožňuje realizaci našeho metajazyka, v němž popisujeme sémantiku jazyka PL, tj. jsou v $\mathcal{M}_{ML}$. Tímto metajazykem se v této knize nezabýváme.

Sémantika jazyka PL se však dá stanovit bez takového explicitního postulování pravdivostních hodnot 1 a 0 (či chcete-li: postulování pravdivosti). V takovéto definici je využit jen pojem struktury (resp. modelu) a pojem splňování. Níže uvedená definice *splňování formulí* v $\mathcal{M}$ je ovšem ekvivalentní naší výše uváděné definici interpretace formulí PL. Někdy tato definice bývá označována jako *Tarského definice pravdy* (lépe by bylo říci: pravdivosti formulí; jiný název je *Tarského definice splňování*), protože ji jako první formuloval Alfred Tarski ve své proslulé stati o sémantickém pojmu pravdy. Podotkněme, že tuto definici si níže uvádíme jen jako rozšiřující informaci, neboť v této knize využíváme výše uvedenou definici interpretace.

Nechť zápis „$\mathcal{M} \vDash A[e]$“ (řada autorů píše „$\vDash_{\mathcal{M}} A[e]$“) znamená totéž, co „$\mathcal{M}$ splňuje formuli *A* při ohodnocení *e*“. Jak je patrné ze zápisu „$\mathcal{M} \vDash A[e]$“, vztah $\vDash$ je explicitně ternární a v následující definici je definován indukcí podle složitosti (2.1 je nultý krok).

Splňování formulí ve struktuře

Je-li A tvaru:	pak $\mathcal{M} \vDash A[e]$ právě tehdy, když:
2.1)	
i. $P^k(t_1 \ldots t_k)$	$\langle t_1[e],\ldots,t_k[e]\rangle \in P^{k\mathcal{M}}$
2.2)	
a)	
i. $\neg B$	$\mathcal{M} \nvDash B[e]$
ii. $(B \wedge C)$	$\mathcal{M} \vDash B[e]$ a $\mathcal{M} \vDash C[e]$
iii. $(B \vee C)$	$\mathcal{M} \vDash B[e]$ nebo $\mathcal{M} \vDash C[e]$
iv. $(B \rightarrow C)$	$\mathcal{M} \nvDash B[e]$ nebo $\mathcal{M} \vDash C[e]$
v. $(B \leftrightarrow C)$	$\mathcal{M} \vDash B[e]$ a $\mathcal{M} \vDash C[e]$, nebo $\mathcal{M} \nvDash B[e]$ a $\mathcal{M} \nvDash C[e]$
b)	
i. $\forall x\, B$	$\mathcal{M} \vDash B[e(p/x)]$ pro každé p takové, že $p \in$ U
ii. $\exists x\, B$	$\mathcal{M} \vDash B[e(p/x)]$ pro některé p takové, že $p \in$ U

Někdy se říká, že ohodnocení e splňuje v $\mathcal{M}$ formuli A. To je formulace přibližující se Tarského vyjadřování, podle něhož byla formule splňována (nekonečnými) posloupnostmi objektů.

Čtenář si jistě všiml, že v této definici je užit znak splňování, který je totožný se znakem vyplývání (jež my přesně definujeme až níže). Užívat jeden znak „$\vDash$" pro obě skutečnosti není zcela neoprávněné. Vzpomeňme si, že $\mathcal{M}$ je nějaká realita, a uvažme, že v ní je třeba Alík psem. Formule P(a), formalizace věty „Alík je pes", je pravdivá právě proto, že se shoduje s touto realitou, takže ‚vyplývá' z této reality. Když si představíme trochu jiný příklad, snížíme krkolomnost tohoto připodobnění. Uvažme pro jednoduchost, že struktura $\mathcal{M}$ je velmi primitivní realita, v níž se děje jen jediná věc: Alík je psem. Pak $\mathcal{M}$ můžeme ztotožnit s jejím nejmenším kompletním popisem, tj. s množinou formulí {P(a)}. Z této množiny formulí {P(a)} pak vyplývá například $\exists x$ P(x), tj. {P(a)} $\vDash \exists x$ P(x), neboli $\mathcal{M} \vDash \exists x$ P(x).

Odtud snadno přejdeme k námi nepříliš využívanému pojmu *model*, přesněji *model formule*, jenž bývá obvykle definován takto:

Model formule

Model formule A je struktura $\mathcal{M}$, v níž je formule A pravdivá při daném ohodnocení e (tj. je splnitelná).

Struktura $\mathcal{M}$, v níž je formule A při daném ohodnocení e nepravdivá (tj. je nesplnitelná), je zvána *kontramodel A*.

Takže výše uvažovaná velmi jednoduchá struktura $\mathcal{M}$, v níž je Alík psem, je modelem formule P(a) („Alík je pes“). Je však také modelem formule $\exists x$ P(x). Na druhou stranu, je kontramodelem ¬P(a) („Alík není pes“).

Lehko si pak můžeme uvědomit, proč někteří autoři neodlišují strukturu a model (přesněji model množiny formulí, což definujeme přesně až níže). Pravdivé věty ‚zrcadlí‘ realitu, tj. model. Části nepravdivých vět sice ve struktuře-modelu mají realizaci (např. „P“ z ¬P(a) má ve struktuře jako korelát určitou množinu), ale ta realita není modelem této věty, ta věta této realitě neodpovídá.

3.2.3 Sémantika PL1 – pravdivost a vyplývání

Podle některých autorů je pravdivost a splnitelnost vlastně totéž, neboť $\mathcal{M} \vDash A[e]$ chápou v tom smyslu, že A je *pravdivá* ve struktuře $\mathcal{M}$ či je *splněna* modelem $\mathcal{M}$ při ohodnocení e. My však budeme terminologicky poněkud opatrnější. Nejdříve zavedeme terminologii užívanou v naší knize, a teprve níže si zmíníme terminologii, která je nezřídka používána v prostředí matematické logiky.

Jak mohlo být zřejmé už z definice interpretace, pravdivost formule PL závisí na více faktorech. Následně můžeme rozlišit tři různé ‚stupně‘ pravdivosti formule. Ten nejslabší stupeň se tradičně nazývá *splnění* – přesněji *splnění ohodnocením e při interpretaci* $\mathfrak{I}$. Míní se tím pravdivost v interpretaci $\mathfrak{I}$ ohodnocením e (viz bod i.), což se běžně jako termín příliš nepoužívá, nicméně my jej používat budeme.

Pravdivost při ohodnocení (splňování), pravdivost a logická pravdivost

i. Formule A je *pravdivá při ohodnocení e* (tj. je *splněna ohodnocením e*) *v interpretaci* $\mathfrak{I}$ struktury $\mathcal{M}$ právě tehdy, když $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}A[e]=1$.
ii. Formule A je *pravdivá v interpretaci* $\mathfrak{I}$ struktury $\mathcal{M}$ právě tehdy, když pro každé ohodnocení e platí, že $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}A[e]=1$. Značíme $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}(A)=1$.
iii. Formule A je *logicky pravdivá* právě tehdy, když je pravdivá v každé struktuře $\mathcal{M}$. Značíme $\vDash A$.

Doplňme, že namísto *logicky pravdivá* se někdy říká formule *logicky platná* či *validní*, ev. že daná formule je *tautologií*. Formule A je *logicky nepravdivá* (či *logicky sporná*) právě tehdy, když je negací logicky pravdivé formule, tj. když neexistuje $\mathfrak{I}$, při níž by byla A pravdivá. Formule A a B jsou *ekvivalentní* právě tehdy, když je logicky pravdivá formule $A \leftrightarrow B$.

Z těchto tří definic pravdivosti i.–iii. je zřejmé, že pravdivost otevřených formulí závisí na ohodnocení e, kdežto uzavřené formule takto citlivé na ohodnocení e nejsou. Pro uzavřené formule tedy pravdivost a pravdivost při ohodnocení splývá. Pro zjištění pravdivosti uzavřené formule proto stačí ověřit její pravdivost pouze při jednom ohodnocení.

Pokud bychom nepoužívali náš pojem interpretace a vystačili si jen s pojmem splňování, pak by obdoby právě definovaných tří druhů pravdivosti byly následující. (Tuto definici uvádíme jen pro informaci.)

Splnění, splnitelnost, pravdivost a logická pravdivost (ve struktuře)

i. Formule A je *splněna ohodnocením e ve struktuře $\mathcal{M}$* právě tehdy, když $\mathcal{M} \vDash A[e]$, tj. $\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}A[e]=1$.
ii. Formule A je *pravdivá ve struktuře $\mathcal{M}$* právě tehdy, když pro každé ohodnocení e platí, že $\mathcal{M} \vDash A[e]$. Značíme $\mathcal{M} \vDash A$.
iii. Formule A je *logicky pravdivá* právě tehdy, když je pravdivá v každé struktuře $\mathcal{M}$. Značíme $\vDash A$.

Často bývá tato definice doplňována takto. Formule A je *splnitelná ve struktuře $\mathcal{M}$* právě tehdy, když existuje ohodnocení e takové, že $\mathcal{M} \vDash A[e]$.

Konečně se dostáváme k definici vyplývání.

Vyplývání

Formule A *vyplývá* z formulí A_1, A_2, A_n právě tehdy, když A je pravdivá v každé interpretaci, při níž jsou pravdivé všechny formule A_1, A_2, A_n. Značíme $A_1, A_2, A_n \vDash A$.

Namísto *vyplývá* se někdy říká *logicky vyplývá*. Poznamenejme, že je nezvyklé a zavádějící užívat termín „predikátově-logicky vyplývá“, neboť v ostatních logických systémech, například v (kvantifikované) modální logice platí stále tatáž definice vyplývání; jazyk modální logiky se totiž od PL liší jen speciálními konstantami.

Připomeňme si, že v klasické logice platí A_1, A_2,..., $A_n \vDash A$ právě tehdy, když konjunkce všech formulí A_1, A_2,..., A_n implikuje A s logickou nutností, tedy když formule $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$ je tautologií. Další vlastnosti vyplývání diskutujeme v kapitole 11.

Mnoho formálních logiků hovoří o tom, že logika je vědou o logickém důsledku. Ten je definován následovně („A_1,..., A_n" je zkratkou za „$\{A_1,..., A_n\}$"):

Logický důsledek

Formule A je *logickým důsledkem* formulí A_1, A_2, A_n právě tehdy, když A je pravdivá v každém modelu, v němž jsou pravdivé formule A_1, A_2, A_n. Značíme A_1, A_2, $A_n \vDash A$.

Někdy se říká, že pojem logického důsledku je přesnější než pojem vyplývání. Přitom však záleží na tom, jak je přesně definována interpretace. Uvažme pro ilustrativní příklad množinu formulí $\{A(x)\}$ a formuli $\forall x\, A(x)$. Existuje interpretace a ohodnocení, při nichž je formule $A(x)$ pravdivá, avšak $\forall x\, A(x)$ nikoli, tj. kvantifikovaná formule nevyplývá z dané množiny formulí. Právě uváděný pojem logického důsledku říká, že formule $\forall x\, A(x)$ není důsledkem $\{A(x)\}$ právě proto, že není pravdivá při tom ohodnocení, při němž je pravdivou formule $A(x)$.

Model množiny formulí

Struktura $\mathcal{M}$ je *modelem množiny formulí* Γ právě tehdy, když v $\mathcal{M}$ je každá formule A, jež je prvkem Γ, splnitelná, tj. je pravdivá při daném ohodnocením e. Značíme $\mathcal{M} \vDash \Gamma$.

V kapitole 15. budeme definovat model teorie T, kdy T vlastně bude něčím, co generuje určitou množinu formulí. Daná definice tedy bude vymezovat užší pojem. Rozdíl je ten, že v právě uvedené definici je Γ libovolnou množinou formulí, kdežto T lze chápat jen jako množinu formulí generovaných z axiomů T.

S pojmem modelu množiny formulí můžeme zavést *vyplývání* A z Γ *ve struktuře* $\mathcal{M}$ následovně: $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}} A$ právě tehdy, když pro každý model $\mathcal{M}$ platí, že jestliže $\vDash_{\mathcal{M}} \Gamma$, tak $\vDash_{\mathcal{M}} A$. (Mj. $\vDash A$ lze vhodně chápat jako $\emptyset \vDash A$.)

3.3 Cvičení – syntax a sémantika PL

1) Definujte gramatiku PL (jsou v ní vymezeny predikátové symboly?).

2) Definujte, co jsou podformule nějaké formule A.

3) Definujte volnost a vázanost výskytu proměnné ve formuli A.

4) Definujte otevřené a uzavřené formule.

5) Definujte substitutovatelnost termu t za proměnnou x ve formuli A, tj. $A[t/x]$.

6) Vysvětlete (ev. definujte) následující termíny:

   a) struktura $\mathcal{M}$

   b) ohodnocení e

   c) realizace

   d) interpretace $\mathfrak{I}$

   e) model

7) Uveďte obecnou sémantiku (tj. interpretaci) a) uzavřené, b) otevřené atomické formule PL.

8) Uveďte, co je pozměněné ohodnocení e' a vysvětlete, jak je zabudováno do sémantiky (tj. interpretace) kvantifikovaných formulí.

9) Definujte, kdy je formule A:

   a) splněna

   b) splnitelná

   c) pravdivá

   d) logicky pravdivá

10) Vysvětlete rozdíl mezi $\mathcal{M} \vDash A[e]$, $\mathcal{M} \vDash A$ a $\vDash A$ (resp. v jiném zápisu $\vDash_{\mathfrak{I}} A[e]$, $\vDash_{\mathfrak{I}} A$ a $\vDash A$).

11) Definujte vyplývání.

4. Vybrané logicky pravdivé formule

Připomeňme si, že *logicky pravdivé formule* – či *platné formule*, ev. *logické zákony* – jsou formule pravdivé v každé interpretaci (a to při jakémkoli ohodnocení). Určitou část z logicky pravdivých formulí tvoří formule, jež mají tvar výrokově-logických tautologií. Těmto budeme říkat *tautologie PL*, či stručněji *tautologie*.

Tautologie PL

Tautologie PL je logicky platná formule, jež má tvar tautologie VL.

Platí tedy, že každá tautologie je logicky platnou formulí, avšak existuje mnoho logicky platných formulí, jež nejsou tautologiemi. Příklady tautologií, jež lze získat patřičnou úpravou výrokově-logické tautologie $p \lor \neg p$ (zákon vyloučeného třetího), jsou $\forall x\ \mathrm{P}(x) \lor \neg \forall x\ \mathrm{P}(x)$, $\mathrm{P}(x) \lor \neg \mathrm{P}(x)$, nebo třeba $\exists x\ \mathrm{R}(\mathrm{a},x) \lor \neg \exists x\ \mathrm{R}(\mathrm{a},x)$.

Významné logicky pravdivé formule PL uvádíme v následující tabulce. Ve skupině a) je De Morganův zákon pro kvantifikátory a jeho varianty. Všimněme si, že negátory jsou v každé formuli vždy dva, přičemž jeden negátor se vztahuje na celou formuli (stojí před kvantifikátorem), zatímco druhý se vztahuje na zbývající část, tedy na část za kvantifikátorem.

Ve skupině b) jsou uvedeny vybrané zákony distributivnosti kvantifikátorů, jde o formule tvaru ekvivalence. Ve skupině c) jsou další takové zákony, nicméně nejde o ekvivalence, ale jen o implikace.

Ve skupinách d) a e) jsou vybrané zákony pro vsunutí kvantifikátoru dovnitř ekvivalence, pokud tento kvantifikátor v antecedentu nic neváže, v případě zákonů skupiny e) je podobná omezující podmínka uvedena níže.

Skupina f) obsahuje základní zákony pro záměnu pořadí kvantifikátorů pro formule s binárním predikátem. Namísto „A“ tam píšeme „$R(x,y)$“, aby si čtenář mohl snáze promyslet jejich platnost.

Ve skupině g) jsou uvedeny některé významné zákony pro usuzování: zákon konkretizace, zákon abstrakce a zákon partikularizace. V učebnicích logiky se setkáme i s jejich jinými názvy. V soudobé filosofické logice se ovšem prvním dvěma obvykle říká, v tomto pořadí, univerzální instanciace a existenční generalizace.

Připomínáme, že $A[t/x]$ značí, že term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli A, je-li term individuová konstanta nebo individuová proměnná x taková, že po dosazení do formule A není v dosahu kvantifikátoru, který váže proměnnou x.

Nejdůležitější zákony pro zapamatování indikujeme pomocí „*“.

Nejdůležitější logicky pravdivé formule

a)

$\neg\forall x\, A$	$\leftrightarrow$	$\exists x\, \neg A$	*De Morganovy zákony* (DM)	*
$\forall x\, \neg A$	$\leftrightarrow$	$\neg\exists x\, A$		
$\neg\forall x\, \neg A$	$\leftrightarrow$	$\exists x\, A$		
$\forall x\, A$	$\leftrightarrow$	$\neg\exists x\, \neg A$		

b)

$\forall x\, (A \wedge B)$	$\leftrightarrow$	$(\forall x\, A \wedge \forall x\, B)$	*zákony distributivity*
$\exists x\, (A \vee B)$	$\leftrightarrow$	$(\exists x\, A \vee \exists x\, B)$	*kvantifikátorů*
$\exists x\, (A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(\forall x\, A \rightarrow \exists x\, B)$	

c)

$(\forall x\, A \vee \forall x\, B)$	$\rightarrow$	$\forall x\, (A \vee B)$	*zákony distributivity*
$\forall x\, (A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(\forall x\, A \rightarrow \forall x\, B)$	*kvantifikátorů*
$\exists x\, (A \wedge B)$	$\rightarrow$	$(\exists x\, A \wedge \exists x\, B)$	
$(\exists x\, A \rightarrow \exists x\, B)$	$\rightarrow$	$\exists x\, (A \rightarrow B)$	

d)

$\forall x\, (A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow \forall x\, B)$	(podmínka: přesunem kvantifikátoru
$\exists x\, (A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow \exists x\, B)$	se žádná proměnná v A nestane
$\forall x\, (A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(\exists x\, A \rightarrow B)$	v antecedentu volná)
$\exists x\, (A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(\forall x\, A \rightarrow B)$	

e)

$\exists x\, (A \wedge B)$	$\leftrightarrow$	$(A \wedge \exists x\, B)$	(podmínka: přesunem kvantifikátoru
$\exists x\, (A \wedge B)$	$\leftrightarrow$	$(\exists x\, A \wedge B)$	se žádná proměnná v nekvantifikované
$\forall x\, (A \vee B)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee \forall x\, B)$	formuli A nebo B nestane napravo
$\forall x\, (A \vee B)$	$\leftrightarrow$	$(\forall x\, B \vee A)$	od $\leftrightarrow$ volná)

f)

$\forall x \forall y\, R(x,y)$	$\leftrightarrow$	$\forall y \forall x\, R(x,y)$	*zákony záměny pořadí kvantifikátorů*	*
$\exists x \exists y\, R(x,y)$	$\leftrightarrow$	$\exists y \exists x\, R(x,y)$		*
$\exists x \forall y\, R(x,y)$	$\rightarrow$	$\forall y \exists x\, R(x,y)$		
$\exists y \forall x\, R(x,y)$	$\rightarrow$	$\forall x \exists y\, R(x,y)$		

g)

$\forall x\, A \rightarrow A[t/x]$	*zákon konkretizace* („univerzální instanciace“)	*
$A[t/x] \rightarrow \exists x\, A$	*zákon abstrakce* („existenční generalizace“)	*
$\forall x\, A \rightarrow \exists x\, A$	*zákon partikularizace*	*

4.1 Cvičení – vybrané logicky pravdivé formule

1) Uveďte De Morganův zákon v základní variantě a popište, jak z ní odvodit varianty další.

2) Uveďte zákon univerzální instanciace (tj. zákon konkretizace) a zákon existenční generalizace (tj. zákon abstrakce). Vysvětlete jejich intuitivní platnost.

3) Uveďte, pro které kvantifikátory (a výrokové spojky) platí distributivnost v podobě ekvivalence.

5. Logický čtverec

Aristotelská a posléze tradiční scholastická logika pracovala převážně jen s monadickými predikáty, je tak zjevně pouze fragmentem PL1. Čtyři specifické druhy výroků, jejichž vzájemné vztahy byly v tradiční logice studovány, jsou uspořádány v *logickém čtverci* (angl. „square of opposition", vzácněji „logical square"). Příležitostně pro tyto výroky budeme používat historické označení „soud".

Tyto výroky jsou tvaru QAB, kde *Q* je klasický kvantifikátor $\forall$ či $\exists$, v místě subjektu (připomeňme si S–P strukturu) se nachází monadický predikát A a v místě predikátu se nachází monadický predikát B. (Jiná používaná značení namísto A a B jsou: S a P, P a Q, M a N, anebo F a G.) Když budeme níže mluvit o *neprázdnosti termínu* P, je tím míněno, že existuje individuum, které má vlastnost označenou termínem-predikátem P.

U výroků z logického čtverce jsou rozeznávány dva druhy vlastností:

Kvantita soudu

- soud je *obecný*, pokud se v něm přes individua kvantifikuje pomocí obecného kvantifikátoru
- soud je *částečný*, pokud se v něm přes individua kvantifikuje pomocí existenčního kvantifikátoru

Kvalita soudu

- soud je *kladný*, pokud se v něm nevyskytuje zápor (negace)
- soud je *záporný*, pokud se v něm vyskytuje zápor (negace)

Na základě možných distribucí kvality a kvantity vznikají celkem čtyři *druhy výroků-soudů*. Ty byly ve středověku reprezentovány písmeny:

a, *e*, *i*, *o*,

přičemž *a* značí obecný kladný soud, *i* značí částečný kladný soud, *e* značí obecný záporný soud, *o* značí částečný záporný soud. Písmena *a* a *i* pochází ze samohlásek latinského slova „affirmo", tj. tvrdím; písmena *e* a *o* pochází ze samohlásek latinského slova „nego", tj. popírám. S pomocí těchto písmen jsou druhy soudů formalizovatelné následujícím způsobem:

Druhy soudů

- „Každé A je B.“ A*a*B *obecný kladný soud*
- „Některá A jsou B.“ A*i*B *částečný kladný soud*
- „Žádné A není B.“ A*e*B *obecný záporný soud*
- „Některá A nejsou B.“ A*o*B *částečný záporný soud*

Zde je srovnání vyjádření těchto čtyř druhů výroků v tradiční logice, v PL a v Boolově algebře. Nakonec v posledním sloupci je vyjádření v PL, jež pracuje s omezenými kvantifikátory:

tradiční logika:	PL:	Boolova algebra:	PL s omezenými kvantifikátory:
A*a*B	$\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$	$A \cap B = A \quad (A \cup B = B)$	$(\forall x \in A)\ B(x)$
A*i*B	$\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$	$A \cap B \neq \emptyset$	$(\exists x \in A)\ B(x)$
A*e*B	$\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$	$A \cap B = \emptyset$	$(\forall x \in A)\ \neg B(x)$
A*o*B	$\exists x\,(A(x) \wedge \neg B(x))$	$A \cap B^C \neq \emptyset \quad (A \cup B \neq B)$	$(\exists x \in A)\ \neg B(x)$

Pohotové chápání formulí PL, jimiž přepisujeme výroky diskutovaných čtyř druhů, je jednou z nejdůležitějších dovedností, kterou adept logiky musí v úvodním kurzu ovládnout. Jako pomůcku zde proto uvádíme převyprávění těchto čtyř formulí do ‚logičtiny‘.

- $\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$ Všechna A jsou B. tj. Co je v A, je v B.
  nebo: Je-li x v (množině) A, tak je i v (množině) B.
- $\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$ Některá A jsou B. tj. Něco je v průniku A a B.
  nebo: Alespoň jedno x je v (množině) A i v (množině) B.

- $\forall x\ (A(x) \rightarrow \neg B(x))$ Žádná A nejsou B. tj. Nic není v průniku A a B.
  nebo: Je-li x v (množině) A, tak není v (množině) B.
- $\exists x\ (A(x) \wedge \neg B(x))$ Některá A nejsou B. tj. Nějaký prvek A není v B.
  nebo: Alespoň jedno x je v (množině) A, ale není v (množině) B.

Výroky diskutovaných čtyř druhů mají rozmanité vztahy, jež byly předmětem logického zájmu. Tradiční logika těchto vztahů uznávala více než moderní logika, jež si ponechala v plné platnosti jen první z níže uváděných čtyř vztahů. Zbylé vztahy neplatí v moderní logice obecně; příčina jejich neplatnosti je viděna v souvislosti s možností, že některé termíny-predikáty mohou být prázdné.

Vztahy výroků logického čtverce

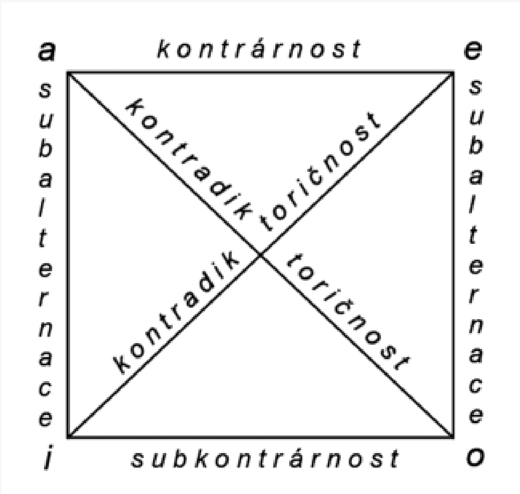
- *kontradiktoričnost* (kontradikčnost, protikladnost): správný opak, negace daného výroku; dané výroky mají vždy opačnou pravdivostní hodnotu
  např. „Všechny labutě jsou bílé“–„Některé labutě nejsou bílé“
- *subalternost* (podřazenost): lze přejít od *a* k *i* (nikoli však naopak), lze přejít od *e* k *o* (nikoli však naopak), čili *a* implikuje *i* a *e* implikuje *o*
  např. „Všechny labutě jsou bílé“–„Některé labutě jsou bílé“
- *kontrárnost* (protiva): výroky *a* a *e* nemohou být oba pravdivé, ovšem oba mohou být nepravdivé
  např. „Všechny labutě jsou bílé“–„Žádné labutě nejsou bílé“
- *subkontrárnost* (podprotiva): výroky *o* a *i* nemohou být oba nepravdivé, ovšem oba mohou být pravdivé
  např. „Některé labutě jsou bílé“–„Některé labutě nejsou bílé“

Subalternost dle moderní logiky obecně neplatí, protože například obecný kladný výrok „Všechny labutě jsou bílé“ je pravdivý i za okolností, kdy žádné labutě neexistují, a tedy částečný kladný výrok „Některé labutě jsou bílé“ není pravdivý. Podobně pro případ obecného záporného výroku, jenž obecně neimplikuje částečný záporný výrok. Obecná neplatnost subalternace se však přenáší i na kontrárnost a subkontrárnost.

Kontrárnost dle moderní logiky totiž obecně neplatí proto, že v definici je podmínka, že je-li obecný kladný výrok pravdivý, tak je nepravdivý obecný záporný výrok (a naopak), což znamená, že ten obecný kladný výrok implikuje částečný kladný výrok, což ale neplatí; neboli, negace obecného záporného výroku není subalternována obecnému kladnému výroku. Zcela podobně pro subkontrárnost, která v definici předpokládá, že negace částečného kladného výroku, tj. obecný záporný výrok, implikuje částečný záporný výrok.

Schématické výroky diskutovaných čtyř druhů jsou pro názornost nanášeny na vrcholy čtverce tak, aby byly vyjádřeny i výše diskutované vztahy kontradiktoričnosti, (sub)kontrárnosti a subalternace. (V soudobé literatuře obvykle najdeme ve vrcholech čtverce velká písmena A, E, I, O.)

Logický čtverec



K dalším studovaným vztahům patří tzv. *obraty*. Jedná se o transformace zachovávající ekvivalentnost (tj. vzájemné vyplývání) či implikování (tj. vyplývání) výroků. Obraty jsou platné i v moderní logice; transformované formule lze získat pomocí známých tautologií VL a logicky pravdivých formulí PL.

obrat prostý (konverze výroků) – kvantita je zachována

$AiB \leftrightarrow BiA$	$\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x\,(B(x) \wedge A(x))$
$AeB \leftrightarrow BeA$	$\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$	$\leftrightarrow$	$\forall x\,(B(x) \rightarrow \neg A(x))$

obrat po případě – kvantita je oslabena

A*a*B→B*i*A $\quad \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \quad \rightarrow \quad \exists x\,(A(x) \wedge B(x))$

(předpokladem platnosti tohoto vztahu je ale neprázdnost A)

A*e*B→B*o*A $\quad \forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x)) \quad \rightarrow \quad \exists x\,(A(x) \wedge \neg B(x))$

(předpokladem platnosti tohoto vztahu je ale neprázdnost A)

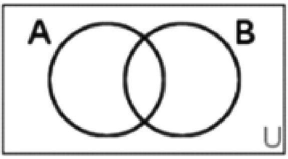
V literatuře často nalezneme ekvivalentní transformaci nazývanou *obverze*. Příklady dvojic výroků jsou „Všechna A jsou B"–„Žádná A nejsou non--B", „Všechna A jsou non-B"–„Žádná A nejsou B", „Některá A jsou B"–„Některá A nejsou non-B", „Některá A jsou non-B"–„Některá A nejsou B". (V těchto výrocích ovšem nemusí „non-" znamenat jednoduše ¬.)

Nutno poznamenat, že logický čtverec jako takový je značným zjednodušením jazykové i logické situace, usouvztažňuje totiž pouze některé výroky. V jeho obvykle prezentované formě logický čtverec nezahrnuje například singulární výroky (někteří středověcí logici ale do logického čtverce singulární výroky kladli, byť je museli upravovat na kvantifikující výroky). Logický čtverec neklasifikuje ani výroky, v nichž kromě kvantifikátoru vystupují jiné logické spojky, než v obvyklém přepisu výroků logického čtverce (srov. například „Něco je kulaté nebo hranaté").

5.1 Vennovy diagramy a logický čtverec

Vennovy diagramy jsou grafickým množinovým vyjádřením výroků. (Hned upozorňujeme, že Vennovy diagramy jsou odlišné například od kdysi velmi známých diagramů Eulerových.)

Základ Vennova diagramu pro reprezentaci sémantického obsahu výroků se dvěma monadickými predikáty je následující. Vzhledem k univerzu U nakreslíme dva kruhy reprezentující množiny A a B takto:



Univerzum je tedy rozděleno na čtyři základní podmnožiny, z nichž do tří jejich grafických vyjádření budeme graficky vyznačovat sémantický obsah výroků logického čtverce. Pro následující výklad bude výhodné si zavést pomocnou terminologii pro tři vyobrazení význačných podmnožin (s posledním z nich se ovšem setkáme až při protínání tří kruhů, viz níže kapitolu o sylogismech). (V literatuře se často můžeme setkat s tím, že místo tvarů se k označení diskutovaných podmnožin užívají písmena a–d.)

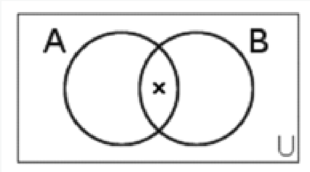
půlměsíc rybička srdíčko

Vennovými diagramy schematicky vyznačujeme, za jakého stavu světa je daný výrok pravdivý. Částečné výroky jsou pravdivé, když aspoň nějaké individuum má tu či onu vlastnost. Obecné výroky jsou pravdivé, když některou vlastnost žádné individuum nemá. Vyznačujeme tedy nezbytnou podmínku platnosti výroku.

Částečné výroky do výše uvedeného diagramu vyznačujeme pomocí křížku, který reprezentuje nějaké (tj. alespoň jedno) individuum, o kterém daný výrok může platit.

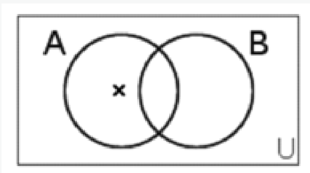
(*i*) V případě částečného kladného výroku zakreslujeme křížek do graficky vyjádřeného průniku obou množin, tedy do rybičky. Vyznačujeme tím tedy takový stav, kdy alespoň jedno individuum má vlastnosti A i B.

Vennův diagram částečného kladného výroku



(*o*) V případě částečného záporného výroku zakreslujeme křížek do té části množiny A, která je mimo množinu B, tedy do půlměsíce. Vyznačujeme tedy takový stav, kdy alespoň jedno individuum má vlastnost A, avšak nemá vlastnost B.

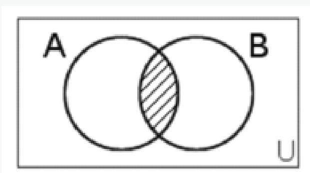
Vennův diagram částečného záporného výroku



Obecné výroky vyznačujeme pomocí šrafování, které reprezentuje to, že v daném poli se zcela žádné individuum nenachází. Šrafování je takto jaksi negativní, což je rozdíl vůči šrafování, které je zažité z Eulerových diagramů. (V mnoha novějších učebnicích se místo šrafu radši používá znak prázdné množiny, tj. „Ø“, v obrázcích mnohdy „∅“; šrafování je ale přece jen výhodnější.)

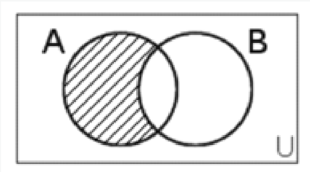
(*e*) V případě obecného záporného výroku šrafujeme průnik obou množin, tedy rybičku. Vyznačujeme tedy takový stav, kdy žádný prvek A nenáleží zároveň do množiny B.

Vennův diagram obecného záporného výroku



(*a*) V případě obecného kladného výroku šrafujeme tu část množiny A, graficky půlměsíce, která je mimo množinu B. Vyznačujeme tedy takový stav, kdy žádné individuum nemá vlastnost A, aniž by mělo vlastnost B; nezavazujeme se však k existenci nějakého A.

Vennův diagram obecného kladného výroku



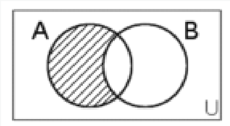
Ačkoliv se v případě obecného kladného výroku vyznačování toho, že se žádné individuum v půlměsíci nenachází, zdá neobvyklé, zcela přesně reprezentuje to, co podle moderní logiky vyjadřuje daný výrok. Uvědomme si totiž, že například výrok „Každý jednorožec je savec" (ekvivalentně: „Pro každé individuum platí, že je-li jednorožec, je savec") je nepravdivý jen v případě, kdy existují jednorožci, kteří nejsou savci, avšak je pravdivá v případech, kdy a) pro všechna x, která jsou jednorožcem (tj. formule J(x) je pravdivá) platí, že jsou savcem (atomická formule S(x) je tedy také pravdivá), nebo b) žádní jednorožci nejsou (atomická formule J(x) je nepravdivá) a nikdo také není savcem (atomická formule S(x) je tedy také nepravdivá), anebo c) žádní jednorožci nejsou (atomická formule J(x) je nepravdivá), avšak nějaká x, o nichž nic bližšího nevíme, jsou savci (atomická formule S(x) je tedy pravdivá).

Dále si na Vennových diagramech všimněme, že pokud chceme vyjádřit pravý opak tvrzení, že A a B mají společný prvek, tak musíme říci, že v průniku A a B žádná individua nejsou. Pokud chceme vyjádřit pravý opak tvrzení, že všechny prvky A (jsou-li jaké) jsou též v množině B, tak musíme říct, že existuje alespoň jeden prvek množiny A, který nenáleží do množiny B.

Nám již známý obrázek logického čtverce nyní obohacujeme kromě Vennových diagramů daných čtyř výroků i o formální zápisy, vč. ekvivalentů odvoditelných na základě De Morganových zákonů a tautologií VL.

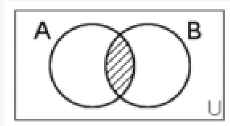
Logický čtverec v moderní logice

obecný kladný výrok

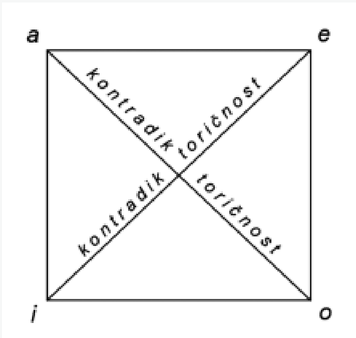


„Všechna A jsou B."
$\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$
či: $\neg \exists x\,(A(x) \wedge \neg B(x))$

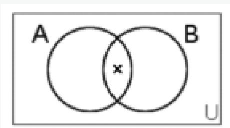
obecný záporný výrok



„Žádná A nejsou B."
$\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$
či: $\neg \exists x\,(A(x) \wedge B(x))$

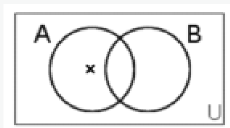


částečný kladný výrok



„Některá A jsou B."
$\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$
či: $\neg \forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

částečný záporný výrok



„Některá A nejsou B."
$\exists x\,(A(x) \wedge \neg B(x))$
či: $\neg \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

5.2 Cvičení – všechny druhy soudů k danému výroku

K následujícím větám sestavte všechny druhy soudů logického čtverce:

1) Každý člověk je smrtelný.
2) Některé labutě jsou černé.
3) Žádný oběd není zadarmo.
4) Někteří lidé nejsou moudří.

5.2 Řešení – všechny druhy soudů k danému výroku

1)

obecný kladný soud: „Každý člověk je smrtelný".
částečný kladný soud: „Některý člověk je smrtelný".
obecný záporný soud: „Žádný člověk není smrtelný".
částečný záporný soud: „Některý člověk není smrtelný".

2)

obecný kladný soud: „Všechny labutě jsou černé".
částečný kladný soud: „Některé labutě jsou černé".
obecný záporný soud: „Žádné labutě nejsou černé".
částečný záporný soud: „Některé labutě nejsou černé".

3)

obecný kladný soud: „Každý oběd je zadarmo".
částečný kladný soud: „Některý oběd je zadarmo".
obecný záporný soud: „Žádný oběd není zadarmo".
částečný záporný soud: „Některý oběd není zadarmo".

4)

obecný kladný soud: „Všichni lidé jsou moudří".
částečný kladný soud: „Někteří lidé moudří".
obecný záporný soud: „Žádní lidé nejsou moudří".
částečný záporný soud: „Někteří lidé nejsou moudří".

5.3 Cvičení – negace výroků logického čtverce

Slovně vyjádřete negaci (či: správný opak) daného schematického výroku a určete, o jaký druh soudu se jedná. Podobně jako ve VL, *negací výroku V* nerozumíme doslova $\neg V$, ale výrok W, který je ekvivalentní $\neg V$, srov. logický čtverec.

1) Všechna A jsou B.

2) Některá A jsou B.

3) Žádná A nejsou B.

4) Některá A nejsou B.

5.3 Řešení – negace výroků logického čtverce

1) „Některá A nejsou B." – částečný záporný soud.
2) „Žádná A nejsou B." – obecný záporný soud.
3) „Některá A jsou B." – částečný kladný soud.
4) „Všechna A jsou B." – obecný kladný soud.

5.4 Cvičení – negace výroků logického čtverce (výběr z možností)

Určete ten výrok z níže nabízených možností, který je negací výroku daného:

1)
Všechny disciplíny jsou náročné.

a) Všechny disciplíny jsou náročné.
b) Žádné disciplíny nejsou náročné.
c) Některé disciplíny nejsou náročné.
d) Některé disciplíny jsou náročné.

2)
Některá těhotenství jsou riziková.

a) Některá těhotenství jsou riziková.
b) Žádná těhotenství nejsou riziková.
c) Všechna těhotenství jsou riziková.
d) Některá těhotenství nejsou riziková.

3)
Žádní vědci nejsou vševědoucí.

a) Někteří vědci nejsou vševědoucí.
b) Žádní vědci nejsou vševědoucí.
c) Všichni vědci jsou vševědoucí.
d) Někteří vědci jsou vševědoucí.

4)
Některé dny nejsou pracovní.

a) Všechny dny jsou pracovní.
b) Některé dny jsou pracovní.
c) Některé dny nejsou pracovní.
d) Žádné dny nejsou pracovní.

5)
Všichni cestovatelé jsou odvážní.

a) Všichni odvážní jsou cestovateli.
b) Žádní odvážní nejsou cestovateli.
c) Žádní cestovatelé nejsou odvážní.
d) Někteří cestovatelé nejsou odvážní.
e) Někteří odvážní nejsou cestovateli.

6)
Někteří učitelé jsou přísní.

a) Někteří přísní nejsou učiteli.
b) Někteří učitelé nejsou přísní.
c) Žádní učitelé nejsou přísní.
d) Všichni učitelé jsou přísní.
e) Všichni přísní jsou učiteli.

7)

Žádné soužití není bezproblémové.

a) Některé soužití není bezproblémové.
b) Každé soužití je bezproblémové.
c) Nic bezproblémové není soužitím.
d) Něco, co je bezproblémové, není soužitím.
e) Některé soužití je bezproblémové.

8)

Některá piva nejsou alkoholická.

a) Některá piva jsou alkoholická.
b) Něco, co je alkoholické, není pivo.
c) Všechna piva nejsou alkoholická.
d) Všechna piva jsou alkoholická.
e) Žádná piva nejsou alkoholická.

9)

Každý, kdo je opilý, je obtížný.

a) Každý, kdo je obtížný, je opilý.
b) Každý, kdo není opilý, je obtížný.
c) Někdo není opilý a je obtížný.
d) Někdo je obtížný a není opilý.
e) Někdo je opilý a není obtížný.

10)

Někdo je zamilovaný a je šťastný.

a) Nikdo, kdo není zamilovaný, není šťastný.
b) Nikdo, kdo je zamilovaný, není šťastný.
c) Nikdo, kdo není šťastný, není zamilovaný.
d) Někdo není zamilovaný a není šťastný.
e) Někdo je šťastný a není zamilovaný.

11)

Nikdo, kdo pil, nesmí řídit.

a) Někdo pil a nesmí řídit.
b) Někdo smí řídit a nepil.
c) Někdo pil a smí řídit.
d) Nikdo, kdo nepil, nesmí řídit.
e) Nikdo, kdo smí řídit, nepil.

12)

Někdo je chytrý a není namyšlený.

a) Někdo není chytrý a je namyšlený.
b) Nikdo, kdo je chytrý, není namyšlený.
c) Nikdo, kdo je namyšlený, není chytrý.
d) Každý, kdo je chytrý, je namyšlený.
e) Někdo je namyšlený a není chytrý.

5.4 Řešení – negace výroků logického čtverce (výběr z možností)

1) c)	2) b)	3) d)	4) a)	5) d)	6) c)
7) e)	8) d)	9) e)	10) b)	11) c)	12) d)

5.5 Cvičení – ekvivalence výroků logického čtverce

Ke každému následujícímu schematického výroku formulujte ekvivalentní výrok, který je buď výrokem z logického čtverce (např. „Všechna A jsou B“) nebo je jeho přímou negací (např. „Není pravda, že všechna A jsou B“). Určete rovněž, o jaký druh soudu z logického čtverce se jedná:

1) Není pravda, že některá A nejsou B.

2) Není pravda, že žádná A nejsou B.

3) Není pravda, že některá A jsou B.

4) Není pravda, že všechna A jsou B.

5) Všechna A jsou B.

6) Některá A jsou B.

7) Žádná A nejsou B.

8) Některá A nejsou B.

5.5 Řešení – ekvivalence výroků logického čtverce

1) „Všechna A jsou B.“ – obecný kladný soud.
2) „Některá A jsou B.“ – částečný kladný soud.
3) „Žádná A nejsou B.“ – obecný záporný soud.

4) „Některá A nejsou B." – částečný záporný soud.
5) „Není pravda, že některá A nejsou B." – obecný kladný soud.
6) „Není pravda, že žádná A nejsou B." – částečný kladný soud.
7) „Není pravda, že některá A jsou B." – obecný záporný soud.
8) „Není pravda, že všechna A jsou B." – částečný záporný soud.

5.6 Cvičení - ekvivalence výroků logického čtverce (výběr z možností)

Z níže nabízených možností vyberte ten výrok, který je ekvivalentní výroku danému:

1)

Není pravda, že někteří stavaři nejsou architekty.

a) Někteří stavaři nejsou architekty.
b) Někteří stavaři jsou architekty.
c) Všichni stavaři jsou architekty.
d) Žádní stavaři nejsou architekty.

2)

Není pravda, že některé látky jsou omamné.

a) Některé látky nejsou omamné.
b) Žádné látky nejsou omamné.
c) Některé látky jsou omamné.
d) Všechny látky jsou omamné.

3)

Není pravda, že všichni politici jsou čestní.

a) Žádní politici nejsou čestní.
b) Všichni politici jsou čestní.
c) Někteří politici nejsou čestní.
d) Někteří politici jsou čestní.

4)

Není pravda, že někteří prognostici jsou skeptici.

a) Všichni prognostici jsou skeptici.
b) Žádní prognostici nejsou skeptici.
c) Někteří prognostici jsou skeptici.
d) Někteří prognostici nejsou skeptici.

5)

Není pravda, že některé problémy nejsou řešitelné.

a) Všechny problémy jsou řešitelné.
b) Žádné problémy nejsou řešitelné.
c) Některé problémy nejsou řešitelné.
d) Některé problémy jsou řešitelné.

5.6 Řešení - ekvivalence výroků logického čtverce (výběr z možností)

1) c)   2) b)   3) c)   4) b)   5) a)

6. Analýza složitějších vět prostředky PL

Pokud máme za úkol formalizovat věty přirozeného jazyka prostředky PL, je třeba správně postihnout to, co daná věta vlastně říká. Velké potíže obvykle zprvu činí nalezení vztahu mezi predikáty (resp. atomickými formulemi), protože například implikace nebývá ve větě nijak indikována. Níže se naučíme tento vztah pohotověji analyzovat, když se seznámíme s jazykovým kvantifikátorem „pouze".

Připomínáme, že pokud ve větě chybí kvantifikátor a měl by tam být, protože se ve výroku implicitně kvantifikuje (srov. např. „Krávy mají rohy"), daný výrok obvykle formalizujeme jakožto obsahující vepředu stojící ∀. Nejde však o stoprocentní pravidlo, například výrok „Když je někdo kráva, má šest žaludků" je obecný výrok, ač obsahuje výraz „někdo", jenž obvykle indikuje ∃, zde je to však ∀.

Známou komplikací je, že ač nějaká česká věta obsahuje dvojí mluvnický zápor, nejčastěji jde o případ „Žádná A nejsou B", daná věta vlastně vyjadřuje jen jednu logickou negaci.

Často uplatnitelnou zásadou je, že je-li ve větě dominantní výraz „některý/některí" (∃), pak atomické formule spojujeme konjunkcí. Je-li ve větě dominantní výraz „každý/všichni" (∀), pak atomické formule spojujeme implikací. Srov. jak je tomu ve formalizacích výroků logického čtverce.

Věty, s nimiž se můžeme setkat, jsou rámcově tří druhů:

1) jedná se o singulární věty (např. „Adam má vlastnost F" nebo „Adam a Bára jsou ve vztahu R"),
2) věty, v nichž se vyskytuje jeden či více kvantifikátorů a dva či více predikátů,
3) věty, které obsahují dva a více vět druhu 1) a 2), jež jsou spojeny nějakou výrokovou spojkou.

V případě vět druhu 2) se jedná o:

a) věty z logického čtverce (např. „Všechna A jsou B"),
b) věty strukturně podobné větám z logického čtverce (např. „Všechno je A nebo B"),
c) věty, které mají v základě podobnou formu (např. „Všechna A jsou B nebo C" či „Každé A je ve vztahu R k některému B").

Neboli, věty druhu 2) roubujeme na mustr, jímž jsou čtyři nám již známé formule, jež jsou formalizacemi výroků logického čtverce.

6.1 Cvičení – zápis výroků z logického čtverce symbolismem PL

Již v předchozí kapitole jsme si ukázali příklad přepisů vět, které zde procvičujeme. Do cvičení však kromě formalizací výroků logického čtverce zahrnujeme i výroky, jež jsou přímými negacemi takovýchto výroků.

1) Všichni soudci jsou spravedliví.
2) Někteří hráči jsou vášniví.
3) Žádní nocležníci nejsou domácí.
4) Některá jídla nejsou zdravá.
5) Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.
6) Není pravda, že některé kočky štěkají.
7) Není pravda, že žádní teoretici nejsou užiteční.
8) Není pravda, že některé muchomůrky jsou jedlé.
9) Ne všechny banány dozrávají.
10) Není všechno zlato, co se třpytí.

6.1 Řešení – zápis výroků z logického čtverce symbolismem PL

1) $\forall x\ (\mathrm{S}(x)\rightarrow \mathrm{S}'(x))$
2) $\exists x\ (\mathrm{H}(x)\wedge \mathrm{V}(x))$
3) $\forall x\ (\mathrm{N}(x)\rightarrow \neg \mathrm{D}(x))$
4) $\exists x\ (\mathrm{J}(x)\wedge \neg \mathrm{Z}(x))$
5) $\neg \forall x\ (\mathrm{P}(x)\rightarrow \mathrm{L}(x))$
6) $\neg \exists x\ (\mathrm{K}(x)\wedge \check{\mathrm{S}}(x))$
7) $\neg \forall x\ (\mathrm{T}(x)\rightarrow \neg \mathrm{U}'(x))$
8) $\neg \exists x\ (\mathrm{M}(x)\rightarrow \mathrm{J}(x))$
9) $\neg \forall x\ (\mathrm{B}(x)\rightarrow \mathrm{D}(x))$
10) $\neg \forall x\ (\mathrm{Z}(x)\rightarrow \mathrm{T}(x))$

6.2 Příklady – nezvyklé věty s více monadickými predikáty

Následující věty přirozeného jazyka formalizujte prostředky PL. Provádějte vždy co nejpečlivější analýzu, která zahrnuje všechny predikáty:

1)

Námořníky jsou jenom ostrované.
$\forall x\ (N(x) \rightarrow O(x))$

Uvědomme si, že nutnou podmínkou daného výroku je plnění vlastnosti ‚být ostrovan', námořníci se totiž ‚rekrutují' výlučně z ostrovanů.

2)

Pouze ostrované jsou námořníky.
$\forall x\ (O(x) \leftarrow N(x))$

Tato věta je ekvivalentní předcházející větě, $\forall x\ (N(x) \rightarrow O(x)) \leftrightarrow \forall x\ (O(x) \leftarrow N(x))$, opět se námořníci rekrutují jen z ostrovanů. To je patrné i z alternativního vyjádření „Každý je ostrovanem, pokud je námořníkem". Z tohoto si můžeme odvodit pravidlo, že šipka implikace směřuje k tomu predikátu, před nímž je jazykový kvantifikátor „pouze" („jenom", „výlučně").

3)

Někteří ostrované nejsou námořníci, ale Francis Drake je námořník.
$(\exists x\ (O(x) \wedge \neg(N(x))) \wedge N(d)$

Tento výrok je souvětím spojeným konjunkcí (vyjádřenou pomocí „ale"). Druhý člen této formule je atomická formule. Připomínáme, že „Francis Drake" je jméno individua (proto je ve formalizaci konstanta „d"), nikoli nějakého predikátu.

4)

Kdo je rybář, není námořník nebo není ostrovan.
$\forall x\ (R(x)\rightarrow(\neg N(x)\vee\neg O(x)))$

Tento výrok je rozvitou formou obecného kladného soudu, kdy namísto nějakého $B(x)$ má v konsekventu $\neg N(x)\vee\neg O(x)$.

5)

Kdo je rybář, není námořník nebo ostrovan.
$\forall x\ (R(x)\rightarrow\neg(N(x)\vee O(x)))$

Pro všechna x platí, že je-li rybářem, tak není takový, že je námořníkem nebo ostrovanem. Neboli:

Žádný rybář není námořník nebo ostrovan.

Jde také o rozvinutou formu obecného záporného soudu, namísto nějakého $B(x)$ je v konsekventu $N(x)\vee O(x)$. Všimněme si rozdílu vzhledem k minulému příkladu: v něm opakované slovo „není“ (viz „není ostrovanem“) indikovalo, že první výskyt slova „není“ se neaplikuje na celý konsekvent, jak je tomu v tomto příkladu.

6)

Kdo je rybář, není námořník nebo je ostrovan.
$\forall x\ (R(x)\rightarrow(\neg N(x)\vee O(x)))$

Čili kdokoli, kdo je rybář, není námořníkem nebo je ostrovanem. Vidíme tedy, že vsunutí „je“ za „nebo“ omezilo dosah „není“ pouze na predikát „(být) námořníkem“ (tedy podobně jako omezilo v příkladu 4) dosah prvního „není“ vsunutí druhého „není“).

7)

Všichni rybáři nejsou námořníky nebo ostrovany.
$\neg\forall x\ (R(x)\rightarrow(N(x)\vee O(x)))$

Po krátkém zamyšlení zjistíme, že slovním ekvivalentem věty dané opravdu je:

Není pravda, že všichni rybáři jsou námořníky nebo ostrovany.

Je tedy ekvivalentní tomu, že existují taková x, která jsou rybářem a zároveň nejsou námořníkem nebo ostrovanem:

$\exists x\ (\mathrm{R}(x) \wedge \neg(\mathrm{N}(x) \vee \mathrm{O}(x)))$

Tedy „Všichni A nejsou B“ je ekvivalentní „Ne všichni A jsou B“. To je také ekvivalentní „Není pravda, že všichni A jsou B“ a rovněž i „Některé A není B“.

6.3 Příklady – věty zahrnující i binární predikáty

Následující věty přirozeného jazyka formalizujte prostředky PL:

1)

Andrea má ráda pouze lékaře.
$\forall x\ (\mathrm{R}(\mathrm{a},x) \rightarrow \mathrm{L}(x))$

Neboli: pro všechna x platí, že pokud má Andrea to x ráda, tak x je lékař.

2)

Andrea má ráda (všechny) lékaře.
$\forall x\ (\mathrm{L}(x) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{a},x))$

Neboli: pro všechna x platí, je-li to x lékař, tak Andrea má ráda to x.

3)

Andrea neobdivuje nikoho, kdo není logik.
$\forall x\ (\neg \mathrm{L}(x) \rightarrow \neg \mathrm{O}(\mathrm{a},x))$

Neboli: pro všechna x platí, že pokud x není logik, tak ho Andrea neobdivuje. Ekvivalentně díky transpozici implikace $\forall x\ (\mathrm{O}(\mathrm{a},x) \rightarrow \mathrm{L}(x))$:

Andrea obdivuje pouze logiky.

4)

Neexistuje nikdo, koho by Andrea obdivovala a nebyl logik.
$\neg\exists x\ (O(a,x)\land\neg L(x))$

Neboli: není pravda, že existuje někdo takový, koho Andrea obdivuje a není logikem. Této větě je ekvivalentní věta:

Každý, koho Andrea obdivuje, je logik.

tedy: Andrea obdivuje pouze logiky.

5)

Každý muž má rád nějaké zvíře.
$\forall x\ (M(x)\rightarrow\exists y\ (Z(y)\land R(x,y)))$

Neboli: pro všechna *x* platí, že pokud *x* je muž, tak existuje nějaké *y* takové, že *y* je zvíře a *x* má rád to *y*. Kvantifikace existenčním kvantifikátorem se vztahuje až k předmětu toho, co *x*, který je mužem, dělá, proto tento existenční kvantifikátor vkládáme až za znak implikace (čili celou formuli nezapisujeme jako $\forall x\exists y\ (M(x)\rightarrow(Z(y)\land R(x,y)))$).

6)

Kdo se bojí, nesmí do lesa.
$\forall x\ ((B(x)\rightarrow\forall y\ (L(y)\rightarrow\neg S(x,y)))$

Neboli: pro všechna *x*, jestliže *x* se bojí, tak platí pro každé *y*, které je lesem, že *x* do toho *y* nesmí.

7)

Někteří lidé nemají nikoho rádi.
$\exists x\ (L(x)\land\forall y\ (L(y)\rightarrow\neg R(x,y)))$

Formální zápis této věty by mohl vyvolat určité pochyby, avšak výraz „nikoho“ (na rozdíl od „nic“) se dá považovat za gramatický signál, že jde opět o lidi, v analýze proto píšeme L(*y*); takovouto analýzu však zde uvádíme spíše pro ukázku možného cizelování logických analýz výrazů přirozeného jazyka.

8)

Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Láďou.
$\forall x\ (K(x,l) \rightarrow \neg K(m,x))$

Neboli: pro všechna x platí, že kamarádí-li x s Láďou, tak Milan s tím x nekamarádí. Nutnou podmínkou je zde to, že Milan se nekamarádí (s někým), proto je tato podmínka vyjádřena v konsekventu.

9)

Josef je strýcem někoho, kdo je manželkou Petra.
$\exists x\ (S(j,x) \wedge M(x,p))$

Neboli: existuje x takové, že Josef je strýcem toho x a to x je manželkou Petra.

10)

Každý člověk je mladší než jeho rodiče.
$\forall x\ (Č(x) \rightarrow \forall y\ (R(y,x) \rightarrow M(x,y)))$

Neboli: pro všechna x platí, že je-li x člověkem, tak pro všechna y platí, že je-li y rodičem x, tak x je mladší než y.

11)

Každý člověk má otce a matku.
$\forall x\ (Č(x) \rightarrow (O(x) \wedge M(x)))$

Implicitně se však tou větou rozumí, že každý člověk má nějakého otce a nějakou matku, takže by tak byla na místě formule $\forall x\ (Č(x) \rightarrow \exists y \exists z\ (O(y,x) \wedge M(z,x)))$ (a taky by mělo být dodáno, že $y \neq z$; podobně hned v následujícím příkladu).

12)

Každý, kdo má otce, má i matku.
$\forall x\ (\exists y\ O(y,x) \rightarrow \exists z\ M(z,x))$

Z už výše řečených důvodů by zřejmě byla vhodná tato analýza, neboť je v ní explicitně předvedena existence obou rodičů.

13)

Každý obyvatel vesnice má příbuzného staršího než on.
$\forall x\ (\exists y\ (V(y) \wedge O(x,y)) \rightarrow \exists z\ (P(z,x) \wedge S(z,x)))$

Neboli: pro všechna *x*, pokud existuje *y* takové, že *y* je vesnicí a *x* je obyvatelem *y*, tak existuje *z* takový, že *z* je příbuzný *x* a ten *z* je starší než *x*.

14)

Kdo seje vítr, sklízí bouři.
$\forall x\ (\exists y\ (V(y) \wedge S(x,y)) \rightarrow \exists z\ (B(z) \wedge S'(x,z)))$

Čili: pro všechna *x* platí, že pokud existuje nějaké *y*, které je větrem a ten *x* seje to *y*, tak existuje nějaké *z*, které je bouří a *x* sklízí to *z*. Existenční kvantifikátory jsou zde proto, že *x* neseje každý vítr a nesklízí každou bouři.

6.4 Cvičení – analýza vět s jedním binárním predikátem

Nechť binární predikátový symbol R znamená binární predikát „*x* rozumí *y*“. Následující věty formalizujte prostředky PL.

1) Každý něčemu rozumí.
2) Všemu někdo nerozumí.
3) Každý něčemu nerozumí.
4) Všemu někdo rozumí.
5) Každý rozumí všemu.
6) Něčemu někdo nerozumí.
7) Nikdo nerozumí všemu.
8) Něčemu někdo rozumí.
9) Někdo rozumí něčemu.
10) Všemu nikdo nerozumí.
11) Někdo něčemu nerozumí.
12) Všemu každý rozumí.
13) Někdo rozumí všemu.
14) Něčemu nikdo nerozumí.
15) Někdo nerozumí ničemu.
16) Něčemu rozumí každý.

6.4 Řešení – analýza vět s jedním binárním predikátem

Vzhledem k víceznačnostem těchto výrazů nejsou nabízená řešení jediná možná.

1) $\forall x \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$
2) $\forall y \exists x\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
3) $\forall x \exists y\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
4) $\forall y \exists x\ \mathrm{R}(x,y)$
5) $\forall x \forall y\ \mathrm{R}(x,y)$
6) $\exists y \exists x\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
7) $\forall x \forall y\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
8) $\exists y \exists x\ \mathrm{R}(x,y)$
9) $\exists x \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$
10) $\forall y \forall x\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
11) $\exists x \exists y\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
12) $\forall y \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$
13) $\exists x \forall y\ \mathrm{R}(x,y)$
14) $\exists y \forall x\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
15) $\exists x \forall y\ \neg \mathrm{R}(x,y)$
16) $\exists y \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$

6.5 Cvičení – analýza vět s jedním ternárním predikátem

Nechť výraz „P(a,b,c)“ znamená „Adam půjčuje Báře Cyrila“. Následující věty formalizujte prostředky PL.

1) Někdo půjčuje Báře Cyrila.
2) Adam půjčuje někomu Cyrila.
3) Adam někomu něco půjčuje.
4) Někdo někomu něco půjčuje.
5) Adam každému něco půjčuje.
6) Někdo někomu všechno půjčuje.
7) Každý někomu něco půjčuje.
8) Někdo každému všechno půjčuje.
9) Někdo nikomu nic nepůjčuje.
10) Nikdo nikomu nic nepůjčuje.

6.5 Řešení – analýza vět s jedním ternárním predikátem

Vzhledem k víceznačnostem těchto výrazů nejsou nabízená řešení jediná možná.

1) $\exists x\ P(x,b,c)$
2) $\exists x\ P(a,x,c)$
3) $\exists x \exists y\ P(a,x,y)$
4) $\exists x \exists y \exists z\ P(x,y,z)$
5) $\forall x \exists y\ P(a,x,y)$
6) $\exists x \exists y \forall z\ P(x,y,z)$
7) $\forall x \exists y \exists z\ P(x,y,z)$
8) $\exists x \forall y \forall z\ P(x,y,z)$
9) $\exists x \forall y \forall z\ \neg P(x,y,z)$
10) $\forall x \forall y \forall z\ \neg P(x,y,z)$

6.6 Cvičení – analýza vět zahrnujících monadické i binární predikáty

Následující věty přirozeného jazyka formalizujte prostředky PL:

1) Všichni muži nejsou opilci.
2) Adéla obdivuje všechny umělce.
3) Adam má rád pouze intelektuály.
4) Adam nemá rád nikoho, kdo není intelektuál.
5) Neexistuje nikdo takový, že ho Adam má rád a není to intelektuál.
6) Misantrop každého nenávidí.
7) Včely sbírají med.
8) Někteří studenti nemají hudební nadání.
9) Pes je věrný přítel člověka.
10) Někdo má rád každého, ale ne sám sebe.
11) Každé číslo dělitelné 8 je dělitelné 4.
12) Vše, co se děje, má svou příčinu.
13) Žádný učený z nebe nespadl.

14) Kdo nic nedělá, nic nepokazí.

15) Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.

16) Všichni přítomní jsou starší než někteří členové klubu.

17) Žádný dobrý učitel nikoho zbytečně nepotrestal.

18) Bohdan jde do kina pouze tehdy, pokud jeho žena není doma.

19) Všichni savci rodí živá mláďata.

20) Posláním mudrce je vytvářet řád.

21) Myslí dobře ten, kdo se k věcem dobře postaví.

6.6 Řešení – analýza vět zahrnujících monadické i binární predikáty

1) $\neg\forall x\,(\mathrm{M}(x)\rightarrow\mathrm{O}(x))$

2) $\forall x\,(\mathrm{U}'(x)\rightarrow\mathrm{O}(\mathrm{a},x))$

3) $\forall x\,(\mathrm{R}(\mathrm{a},x)\rightarrow\mathrm{I}(x))$
Pro všechna *x* platí, že jestliže Adam má rád *x*, tak je *x* intelektuál.

4) $\forall x\,(\neg\mathrm{I}(x)\rightarrow\neg\mathrm{R}(\mathrm{a},x))$
Pro všechna *x* platí, že není-li *x* intelektuálem, pak Adam ho nemá rád. Větě dané je ekvivalentní: každý, koho má Adam rád, je intelektuálem. Srov. dále ekvivalent, jímž je 5).

5) $\neg\exists x\,(\mathrm{R}(\mathrm{a},x)\land\neg\mathrm{I}(x))$
Větě dané je ekvivalentní: každý, koho má Adam rád, je intelektuálem, srov. 4).

6) $\forall x\,(\mathrm{M}(x)\rightarrow\forall y\,\mathrm{N}(x,y))$

7) $\forall x\,(\mathrm{V}(x)\rightarrow\exists y\,(\mathrm{M}(y)\land\mathrm{S}(x,y)))$
Neboli: pro všechna *x* platí, že je-li *x* včelou, tak existuje nějaké *y*, které je medem (*x* totiž nesbírá veškerý med) a *x* sbírá to *y*.

8) $\exists x\,(\mathrm{S}(x)\land\exists y\,((\mathrm{H}(y)\land\mathrm{N}(y))\land\neg\mathrm{M}(x,y)))$
Neboli: existuje nějaké *x*, které je studentem a existuje nějaké *y*, které je hudební a je nadáním a *x* nemá to *y*. (Je otázkou, zda „mít (něco)“ je zde třeba chápat jako soběstačný predikát.)

9) $\forall x\ (\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall y\ (\check{\mathrm{C}}(y)\rightarrow(\mathrm{V}(x,y)\wedge\mathrm{P}'(x,y)))$
Neboli: pro všechna *x* platí, že je-li *x* psem, tak pro každé *y*, je-li *y* člověkem, tak to *x* je věrné tomu *y* a je přítelem toho *y*.

10) $\exists x\forall y\ (\mathrm{R}(x,y)\wedge\neg\mathrm{R}(x,x))$
Stylisticky řečeno jinak: někdo má rád všechny ostatní.

11) $\forall x\ (\check{\mathrm{C}}(x)\rightarrow(\mathrm{D}(x,8)\rightarrow\mathrm{D}(x,4)))$
Neboli: pro všechna *x* platí, že je-li *x* číslem, tak pokud to *x* je dělitelné osmi, tak je to *x* dělitelné čtyřmi. Správná analýza tedy odlišuje predikát „(být) dělitelný (čím)“ od čísel, jimiž je nějaké *x* dělitelné; predikát „(být) dělitelný (čím)“ je totiž vyjádřen tranzitivním slovesem.

12) $\forall x\ (\mathrm{D}(x)\rightarrow\exists y\ \mathrm{P}(y,x))$
Pro všechna *x* platí, že pokud se *x* děje, tak existuje nějaké *y*, které je příčinou *x* (slovo „mít“ zde totiž nechápeme jako svébytný predikát).

13) $\forall x\ (\mathrm{U}'(x)\rightarrow\exists y\ (\mathrm{N}(y)\wedge\neg\mathrm{S}(x,y)))$
Neboli: pro všechna *x* platí, že pokud je *x* učené, tak existuje nějaké *y*, které je nebem a *x* nespadl z toho *y*.

14) $\forall x\forall y\ (\neg\mathrm{D}(x,y)\rightarrow\neg\mathrm{P}(x,y))$
Neboli: pro všechna *x* a všechna *y* platí, že pokud *x* nedělá to *y*, tak *x* nepokazí to *y*.

15) $\forall x\exists y\ (\exists z\ (\mathrm{J}(y)\wedge\mathrm{K}(x,y,z))\rightarrow\mathrm{P}(x,y))$
Neboli: pro všechna *x* platí, že existuje *y* takové, že pokud existuje *z* takové, že *y* je jáma a *x* kope to *y* tomu *z*, tak *x* padá do *y*.

16) $\forall x\ (\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists y\exists z\ (\mathrm{K}(y)\wedge\check{\mathrm{C}}(z,y)\wedge\mathrm{S}(x,z)))$
Pro všechna *x* platí, že pokud *x* je přítomný, tak existují *y* a *z* taková, že *y* je klub a *z* je členem *y* a *x* jsou starší než ti (někteří) *z*.

17) $\forall x\ ((\mathrm{D}(x)\wedge\mathrm{U}'(x))\rightarrow\neg\exists y\exists z\ (\mathrm{Z}(z)\wedge\mathrm{P}(x,y,z)))$
Čili: pro všechna *x* platí, že pokud *x* je dobré a učitel, tak neexistuje *y* takové, že by existovalo *z*, které je způsob a *x* by potrestal *y* tím *z*.

18) $\exists x\ ((\mathrm{K}(x)\wedge\mathrm{P}(\mathrm{b},x))\leftrightarrow\exists y\ (\check{\mathrm{Z}}(y,\mathrm{b})\wedge\neg\mathrm{D}(y))$
Čili: existuje *x*, které je kino a Bohdan jde do *x*, a to právě tehdy, když existuje *y* takové, že *y* je ženou Bohdana a to *y* není doma.

19) $\forall x\ (\mathrm{S}(x)\rightarrow\exists y\ ((\check{\mathrm{Z}}(y)\wedge\mathrm{M}(y))\wedge\mathrm{R}(x,y)))$
Pro všechna *x* platí, že jestliže *x* je savcem, tak existuje *y*, které je živým mládětem a *x* rodí to *y*. Analýza $\forall x\ (\mathrm{S}(x)\rightarrow\forall y\ ((\check{\mathrm{Z}}(y)\wedge\mathrm{M}(y))\rightarrow\mathrm{R}(x,y)))$ by byla chybná proto, že jsou i taková živá mláďata, která nejsou rozena savci, ale třeba plazy (např. ještěrka živorodá); jedná se ovšem o mimologický důvod, z čistě logického hlediska daná věta připouští obě čtení.

20) $\forall x\, (\mathrm{M}(x) \rightarrow \exists y\, ((\check{\mathrm{R}}(y) \wedge \mathrm{V}(x,y)) \wedge \mathrm{P}(x,y))))$
Pro všechna x platí, že je-li x mudrcem, tak existuje nějaké y, které je řádem a x vytváří y, a x má poslání vzhledem k y.

21) $\forall x\, ([\exists y\, \mathrm{V}(y) \wedge \exists z\, (\mathrm{D}(z) \wedge \mathrm{P}(x,y,z))] \rightarrow [\exists z'\, (\mathrm{D}(z') \wedge \mathrm{M}(x,z'))])$
Pro všechna x platí, že pokud existuje y, které je věc, a zároveň existuje z takové, které je dobré, a x se postaví k tomu y způsobem z, tak existuje z', které je dobré a x myslí to z'.

7. Ekvivalentní transformace

Podobně jako ve VL můžeme i v PL jednak na syntaktické úrovni procvičovat jednak ekvivalence formulí, jednak ekvivalence výroků, které jsou formulemi formalizovány. Jak je patrné i z následujících příkladů, při ekvivalentních transformacích formulí soustavně uplatňujeme zejména De Morganovy zákony pro záměnu kvantifikátorů a tautologie VL. Připomeňme si, že vzájemně ekvivalentní formule vyplývají jedna z druhé a že řetězec ekvivalentních transformací můžeme pokládat za důkaz koncové formule z kterékoli předcházející formule.

7.1 Příklady – ekvivalence jednoduchých výroků formálně

Následující výroky, jež rámcově spadají pod logický čtverec, formalizujte prostředky PL a takto získané formule transformujte na formule ekvivalentní, které pak vyjádřete slovně. Při ekvivalentních transformacích se snažíme o to, aby se symboly negace vyskytovaly nanejvýše před atomickými (pod)formulemi.

1)

Co je skutečné, to je rozumné.

Formálně tedy:

$\forall x\ (\mathrm{S}(x) \rightarrow \mathrm{R}(x))$

Ekvivalentní formule:

$\leftrightarrow \neg\exists x\ \neg(\mathrm{S}(x) \rightarrow \mathrm{R}(x))$	DM zákon
$\leftrightarrow \neg\exists x\ (\mathrm{S}(x) \wedge \neg \mathrm{R}(x))$	tautologie VL

Slovně „Neexistuje něco skutečné, co není rozumné“. Daný výrok je mimochodem ekvivalentní výroku „Pouze rozumné je skutečné“ s formalizací $\forall x\ (\mathrm{R}(x) \leftarrow \mathrm{S}(x))$.

2)

Vrozené ideje neexistují.

Formálně:

$\neg\exists x\ (V(x)\wedge I(x))$

Ekvivalentní formule:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg(V(x)\wedge I(x))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg V(x)\vee\neg I(x))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ (V(x)\rightarrow\neg I(x))$	tautologie VL

Slovně „Nic vrozené není idea". Ekvivalentní je i „Žádná idea není vrozená", protože $\forall x\ (V(x)\rightarrow\neg I(x)) \leftrightarrow \forall x\ (I(x)\rightarrow\neg V(x))$.

3)

Člověk je tvor společenský.

Formálně:

$\forall x\ (Č(x)\rightarrow(T(x)\wedge S(x)))$

Ekvivalentní formule:

$\leftrightarrow \neg\exists x\ \neg(Č(x)\rightarrow(T(x)\wedge S(x)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \neg\exists x\ (Č(x)\wedge\neg(T(x)\wedge S(x)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \neg\exists x\ (Č(x)\wedge(\neg T(x)\vee\neg S(x)))$	tautologie VL

Slovně „Neexistuje člověk, který není tvor nebo není společenský".

4)

Nic není v rozumu, co by nebylo ve smyslech.

Formálně:

$\neg\exists x\ (R(x)\wedge\neg S(x))$

(Jiná vhodná formalizace je $\forall x\ (\neg R(x) \leftarrow \neg S(x))$, kdy $\neg S(x)$ reprezentuje podmínku a tedy antecedent implikace „co by nebylo ve smyslech“; obrat „Nic není v rozumu“ obsahuje nám již známý dvojí gramatický zápor češtiny, jenž reprezentujeme jedním záporem logickým. $\forall x\ (\neg R(x) \leftarrow \neg S(x))$ je ekvivalentní $\forall x\ (\neg S(x) \rightarrow \neg R(x))$ a tedy pak $\forall x\ (R(x) \rightarrow S(x))$.)
Ekvivalentní formule:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg(R(x) \wedge \neg S(x))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg R(x) \vee \neg\neg S(x))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg R(x) \vee S(x))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ (R(x) \rightarrow S(x))$	tautologie VL

Slovně „Je-li to v rozumu, bylo to ve smyslech“.

7.2 Cvičení – ekvivalence jednoduchých výroků formálně

Následující výrok formalizujte prostředky PL a získanou formuli podrobte ekvivalentním transformacím tak, aby se symboly negace vyskytovaly jen před atomickými (pod)formulemi. Výslednou formuli využijte k sestavení ekvivalentu daného výroku:

1) Každý člověk je smrtelný.
2) Některé nemoci jsou léčitelné.
3) Žádný tyran není spravedlivý.
4) Někteří cyklisté nejsou ukáznění.
5) Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.
6) Není pravda, že některé kočky štěkají.
7) Není pravda, že žádný kaskadér není akrobat.
8) Není pravda, že některé muchomůrky nejsou jedovaté.
9) Ne všechny banány dozrávají.
10) Není všechno zlato, co se třpytí.

7.2 Řešení – ekvivalence jednoduchých výroků formálně

1) $\forall x\,(\check{C}(x)\rightarrow S(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\neg(\check{C}(x)\rightarrow S(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(\check{C}(x)\wedge\neg S(x))$;
„Není pravda, že nějaký člověk není smrtelný".
2) $\exists x\,(N(x)\wedge L(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\,\neg(N(x)\wedge L(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\,(N(x)\rightarrow\neg L(x))$;
„Není pravda, že žádné nemoci nejsou léčitelné".
3) $\forall x\,(T(x)\rightarrow\neg S(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\,\neg(T(x)\rightarrow\neg S(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\,(T(x)\wedge\neg\neg S(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\,(T(x)\wedge S(x))$;
„Neexistuje tyran, který je spravedlivý".
4) $\exists x\,(C(x)\wedge\neg U(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\,\neg(C(x)\wedge\neg U(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\,(C(x)\rightarrow\neg\neg U(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\,(C(x)\rightarrow U(x))$;
„Není pravda, že všichni cyklisté jsou ukáznění".
5) $\neg\forall x\,(P(x)\rightarrow L(x)) \leftrightarrow \exists x\,\neg(P(x)\rightarrow L(x)) \leftrightarrow \exists x\,(P(x)\wedge\neg L(x))$;
„Existuje prvočíslo, které není liché".
6) $\neg\exists x\,(K(x)\wedge\check{S}(x)) \leftrightarrow \forall x\,\neg(K(x)\wedge\check{S}(x)) \leftrightarrow \forall x\,(K(x)\rightarrow\neg\check{S}(x))$;
„Žádná kočka neštěká".
7) $\neg\forall x\,(K(x)\rightarrow\neg A(x)) \leftrightarrow \exists x\,\neg(K(x)\rightarrow\neg A(x)) \leftrightarrow \exists x\,(K(x)\wedge\neg\neg A(x)) \leftrightarrow \exists x\,(K(x)\wedge A(x))$;
„Existuje kaskadér, který je akrobat".
8) $\neg\exists x\,(M(x)\wedge\neg J(x)) \leftrightarrow \forall x\,\neg(M(x)\wedge\neg J(x)) \leftrightarrow \forall x\,(M(x)\rightarrow\neg\neg J(x)) \leftrightarrow \forall x\,(M(x)\rightarrow J(x))$;
„Všechny muchomůrky jsou jedovaté".
9) $\neg\forall x\,(B(x)\rightarrow D(x)) \leftrightarrow \exists x\,\neg(B(x)\rightarrow D(x)) \leftrightarrow \exists x\,(B(x)\wedge\neg D(x))$;
„Některé banány nedozrávají".
10) $\neg\forall x\,(Z(x)\rightarrow T(x)) \leftrightarrow \exists x\,\neg(Z(x)\rightarrow T(x)) \leftrightarrow \exists x\,(Z(x)\wedge\neg T(x))$;
„Existuje zlato, které se netřpytí".

7.3 Cvičení – ekvivalence vět s jedním binárním predikátem

Nechť binární predikátový symbol R znamená binární predikát „x rozumí y". Daný výrok formalizujte prostředky PL, načež získanou formuli transformujte pomocí De Morganových zákonů a vyjádřete ji slovně:

1) Každý něčemu rozumí.
2) Všemu někdo nerozumí.
3) Každý něčemu nerozumí.
4) Všemu někdo rozumí.
5) Každý rozumí všemu.
6) Něčemu někdo nerozumí.
7) Nikdo nerozumí ničemu.
8) Něčemu někdo rozumí.

7.3 Řešení – ekvivalence vět s jedním binárním predikátem

1) $\forall x \exists y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\exists y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$;
„Není pravda, že někdo nerozumí ničemu".
2) $\forall y \exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \neg\exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \forall x\ \neg\neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$;
„Není pravda, že něčemu rozumí každý".
3) $\forall x \exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \forall y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \forall y\ \neg\neg\mathrm{R}(x,y)$;
„Není pravda, že někdo všemu rozumí".
4) $\forall y \exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \neg\exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \forall x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$.
„Není pravda, že něčemu nikdo nerozumí".
5) $\forall x \forall y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\forall y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$.
„Není pravda, že někdo něčemu nerozumí".
6) $\exists y \exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \neg\exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \forall x\ \neg\neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$.
„Není pravda, že všemu rozumí každý".
7) $\forall x \forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \exists y\ \neg\neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$.
„Není pravda, že někdo něčemu rozumí".
8) $\exists y \exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \neg\exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \forall x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$.
„Není pravda, že všemu nikdo nerozumí".

7.4 Cvičení – ekvivalence výroků (výběr z možností)

Z níže uvedených možností určete všechny ty výroky, které jsou ekvivalentní výroku danému. Pro pomoc či ověření daný výrok formalizujte a získanou formuli převeďte na jí ekvivalentní formuli, jejíž slovní vyjádření hledejte mezi nabízenými možnostmi:

1)

Každé prase létá.

a) Neexistuje prase, které nelétá.
b) Není pravda, že některé prase nelétá.
c) Není pravda, že neplatí, že každé prase létá.
d) Ne vše, co létá, je prase.
e) Žádné prase nelétá.

2)

Není pravda, že některé pendlovky nejsou kukačky.

a) Některé pendlovky nejsou kukačky.
b) Všechny pendlovky jsou kukačky.
c) Některé pendlovky jsou kukačky.
d) Některé kukačky nejsou pendlovky.
e) Co pendlovky, to kukačky.

3)

Není pravda, že žádní řidiči nejsou závodníci.

a) Někteří závodníci jsou řidiči.
b) Někteří závodníci nejsou řidiči.
c) Žádní řidiči nejsou závodníci.
d) Někteří řidiči jsou závodníci.
e) Někteří řidiči nejsou závodníci.

4)

Někteří medvědi jsou fikaní.

a) Neexistuje medvěd, který by nebyl fikaný.
b) Existují fikaní medvědi.
c) Něco fikaného jsou medvědi.

d) Není pravda, že všichni medvědi jsou nefikaní.
e) Ne všichni medvědi jsou fikaní.

5)

Není pravda, že každý osel je vědec.

a) Žádný osel není vědec.
b) Některý osel není vědec.
c) Jsou oslové, kteří nejsou vědci.
d) Každý osel není vědec.
e) Není pravda, že neexistuje osel, který není vědec.

6)

Není pravda, že některé včelky jsou líné.

a) Některé včelky nejsou líné.
b) Každá včelka není líná.
c) Všechny včelky nejsou pilné.
d) Neexistují včelky, které jsou líné.
e) Žádné včelky nejsou líné.

7)

Každý slon je plavec.

a) Neexistuje slon, který není plavec.
b) Každý plavec je slon.
c) Není pravda, že neplatí, že každý slon je plavec.
d) Není pravda, že některý slon není plavec.
e) Žádný slon není plavec.

8)

Není pravda, že někteří účastníci nejsou přímí.

a) Každý účastník je přímý.
b) Někteří účastníci jsou přímí.
c) Není žádný účastník, který není přímý.
d) Existuje účastník, který je přímý.
e) Ne každý účastník je nepřímý.

9)

Není pravda, že žádný krajíc není namazaný.

a) Každý krajíc je namazaný.
b) Některý krajíc je namazaný.
c) Není pravda, že žádný namazaný není krajíc.
d) Existuje krajíc, který je namazaný.
e) Každý krajíc není namazaný.

10)

Některé balíky jsou expresní.

a) Neexistuje balík, který by nebyl expresní.
b) Existují expresní balíky.
c) Něco, co je expresní, jsou balíky.
d) Ne všechny balíky jsou expresní.
e) Není pravda, že všechny balíky jsou expresní.

11)

Není pravda, že každá žirafa je pyšná.

a) Žádná žirafa není pyšná.
b) Některá žirafa není pyšná.
c) Ne všechny žirafy jsou pyšné.
d) Není pravda, že neexistuje žirafa, která není pyšná.
e) Jsou žirafy, které nejsou pyšné.

12)

Není pravda, že některé šifry jsou prolomitelné.

a) Některé šifry nejsou neprolomitelné.
b) Každá šifra je prolomitelná.
c) Všechny šifry jsou neprolomitelné.
d) Neexistují šifry, které jsou prolomitelné.
e) Ne všechny šifry jsou neprolomitelné.

7.4 Řešení – ekvivalence výroků (výběr z možností)

1) Ekvivalentní a) i b), protože $\forall x\ (P(x) \rightarrow L(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\ (P(x) \wedge \neg L(x))$. Ekvivalentní je také c), protože $\forall x\ (P(x) \rightarrow L(x)) \leftrightarrow \neg\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow L(x))$.
2) Ekvivalentní jsou b) a e), protože $\neg\exists x\ (P(x) \wedge \neg K(x)) \leftrightarrow \forall x\ \neg(P(x) \wedge \neg K(x)) \leftrightarrow \forall x\ (\neg P(x) \vee \neg\neg K(x)) \leftrightarrow \forall x\ (\neg P(x) \vee K(x)) \leftrightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow K(x))$.
3) Ekvivalentní je d), protože $\neg\forall x\ (Ř(x) \rightarrow \neg Z(x)) \leftrightarrow \exists x\ \neg(Ř(x) \rightarrow \neg Z(x)) \leftrightarrow \exists x\ (Ř(x) \wedge \neg\neg Z(x)) \leftrightarrow \exists x\ (Ř(x) \wedge Z(x))$. Ekvivalentní je i a), protože $\exists x\ (Ř(x) \wedge Z(x)) \leftrightarrow \exists x\ (Z(x) \wedge Ř(x))$.
4) Ekvivalentní je bezpochyby b), protože $\exists x\ (M(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \exists x\ (M(x) \wedge F(x))$. Dále je však ekvivalentní d), protože $\exists x\ (M(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg F(x))$. Ovšem ekvivalentní je samozřejmě také c), protože $\exists x\ (M(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \exists x\ (F(x) \wedge M(x))$.
5) Ekvivalentní jsou b) i c), neboť $\neg\forall x\ (O(x) \rightarrow V(x)) \leftrightarrow \exists x\ (O(x) \wedge \neg V(x))$. Ekvivalentní je rovněž e), protože $\neg\forall x\ (O(x) \rightarrow V(x)) \leftrightarrow \neg\neg\exists x\ (O(x) \wedge \neg V(x))$.
6) Ekvivalentní je samozřejmě d), protože d) a věta daná mají stejnou formalizaci $\neg\exists x\ (V(x) \wedge L(x))$. Ekvivalentní je jistě i e), protože $\neg\exists x\ (V(x) \wedge L(x)) \leftrightarrow \forall x\ (V(x) \rightarrow \neg L(x))$.
7) Ekvivalentní jsou a) i d), protože $\forall x\ (S(x) \rightarrow R(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\ (S(x) \wedge \neg R(x))$. Ekvivalentní je také c), neboť $\forall x\ (S(x) \rightarrow R(x)) \leftrightarrow \neg\neg\forall x\ (S(x) \rightarrow R(x))$.
8) Ekvivalentní je pochopitelně c), protože $\neg\exists x\ (Ú(x) \wedge \neg P(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\ (Ú(x) \wedge \neg P(x))$. Ekvivalentní je také a), protože $\neg\exists x\ (Ú(x) \wedge \neg P(x)) \leftrightarrow \forall x\ (Ú(x) \rightarrow P(x))$.
9) Ekvivalentní jsou b) i d), protože $\neg\forall x\ (K(x) \rightarrow \neg N(x)) \leftrightarrow \exists x\ (K(x) \wedge N(x))$. Ekvivalentní je ovšem také c), neboť $\neg\forall x\ (K(x) \rightarrow \neg N(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\ (N(x) \rightarrow \neg K(x))$.
10) Ekvivalentní jsou b) i c), protože $\exists x\ (B(x) \wedge E(x)) \leftrightarrow \exists x\ (E(x) \wedge B(x))$.
11) Ekvivalentní je c), protože $\neg\forall x\ (Ž(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \neg\forall x\ (Ž(x) \rightarrow P(x))$. Ekvivalentní jsou dále b) i e), neboť $\neg\forall x\ (Ž(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \exists x\ (Ž(x) \wedge \neg P(x))$. Ekvivalentní je také d), protože $\neg\forall x\ (Ž(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \exists x\ (Ž(x) \wedge \neg P(x)) \leftrightarrow \neg\neg\exists x\ (Ž(x) \wedge \neg P(x))$.
12) Ekvivalentní je d), protože $\neg\exists x\ (P(x) \wedge O(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\ (P(x) \wedge O(x))$. Ekvivalentní je i c), protože $\neg\exists x\ (P(x) \wedge O(x)) \leftrightarrow \forall x\ \neg(P(x) \wedge O(x)) \leftrightarrow \forall x\ (\neg P(x) \vee \neg O(x)) \leftrightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow \neg O(x))$ a „být neprolomitelný“ je významově vlastně totéž, co „nebýt prolomitelný“.

7.5 Prenexní formy formulí

Zvláště v prostředí informatiky jsou často diskutovány prenexní formy formulí a rozmanitá problematika o ně se opírající, zejm. skolemizace (k ní hned níže), Herbrandova procedura, Robinsonův unifikační algoritmus, rezoluční dokazování, jejichž vysvětlování je však nad rámec této knihy.

Formule A je v *prenexní normální formě* (či *prenexním tvaru*) právě tehdy, když má tvar

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n\ B,$$

kde Q_k (pro $1 \leq k \leq n$) označuje $\forall$ nebo $\exists$ a proměnné $x_1, x_2,..., x_n$ jsou od sebe různé (tj. žádná se nevyskytuje dvakrát). Sekvence „$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n$" se nazývá *prefix* a „$B$" se nazývá (otevřené) *jádro formule A*. (Formule $Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n\ B$ je zvána univerzální či existenční formule v souladu s tím, zda $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ jsou jen obecné či jen existenční kvantifikátory.) *Věta o prenexní normální formě* říká, že ke každé formuli A existuje formule B v prenexní normální formě, přičemž platí, že $A \leftrightarrow B$.

Tzv. *Skolemova normální forma* je pak formule ekvivalentní formuli v prenexní normální formě, nicméně všechny existenční kvantifikátory a jimi vázané proměnné byly postupem *skolemizace* nahrazeny *Skolemovou funkcí*. Například formuli $\forall x \forall y \exists z\ \mathrm{R}(x,y,z)$ odpovídá Skolemova normální forma $\forall x \forall y\ \mathrm{R}(x,y,f(x,y))$.

K převodu formulí do jejich prenexní normální formy používáme De Morganovy zákony a další transformační logické zákony (ty používáme jako pravidla, čili zákon $A \rightarrow B$ je pravidlem $A\ /\ B$). Zejména pro přesun kvantifikátorů ven, tj. dopředu, jsou používány následující čtyři zákony distributivity kvantifikátorů (v kapitole 4. jde o skupinu d), jež si zde pracovně označíme:

$$\begin{array}{ll}
(A \rightarrow \forall x\ B) \leftrightarrow \forall x\ (A \rightarrow B) & \quad \rightarrow\forall \\
(A \rightarrow \exists x\ B) \leftrightarrow \exists x\ (A \rightarrow B) & \quad \rightarrow\exists \\
(\forall x\ A \rightarrow B) \leftrightarrow \exists x\ (A \rightarrow B) & \quad \forall\rightarrow \\
(\exists x\ A \rightarrow B) \leftrightarrow \forall x\ (A \rightarrow B) & \quad \exists\rightarrow
\end{array}$$

Při přesouvání kvantifikátorů musí být proměnné vhodně přejmenovávány (de facto vyměněny za jinou proměnnou), abychom zabránili tomu, že proměnné začnou být vázány jiným kvantifikátorem.

1)

Zde je první příklad transformací formule do jejího prenexního normálního tvaru:

	$\forall x \exists y\, R(x,y) \rightarrow \exists z \forall x\, R(z,x)$	
$\leftrightarrow$	$\forall x \exists y\, R(x,y) \rightarrow \exists z \forall w\, R(z,w)$	přejmenování proměnné (w/x)
$\leftrightarrow$	$\exists z\, (\forall x \exists y\, R(x,y) \rightarrow \forall w\, R(z,w))$	$\rightarrow\exists$
$\leftrightarrow$	$\exists z \forall w\, (\forall x \exists y\, R(x,y) \rightarrow R(z,w))$	$\rightarrow\forall$
$\leftrightarrow$	$\exists z \forall w \exists x\, (\exists y\, R(x,y) \rightarrow R(z,w))$	$\forall\rightarrow$
$\leftrightarrow$	$\exists z \forall w \exists x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow R(z,w))$	$\exists\rightarrow$

2)

Příklady obvykle mohou být řešeny více způsoby, jak si teď ukážeme:

	$\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\, R(x,y)$	
$\leftrightarrow$	$\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall w \exists z\, R(w,z)$	přejmenování proměnných (w/x, z/y)
$\leftrightarrow$	$\forall w\, (\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \exists z\, R(w,z))$	$\rightarrow\forall$
$\leftrightarrow$	$\forall w \exists z\, (\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	$\rightarrow\exists$
$\leftrightarrow$	$\forall w \exists z \forall x\, (\forall y\, R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	$\exists\rightarrow$
$\leftrightarrow$	$\forall w \exists z \forall x \exists y\, (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	$\forall\rightarrow$

Danou formuli bychom totiž mohli upravovat i v jiném pořadí aplikace pravidel:

	$\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\, R(x,y)$	
$\leftrightarrow$	$\exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall w \exists z\, R(w,z)$	přejmenování proměnných (w/x, z/y)
$\leftrightarrow$	$\forall x\, (\forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall w \exists z\, R(w,z))$	$\exists\rightarrow$
$\leftrightarrow$	$\forall x \exists y\, (R(x,y) \rightarrow \forall w \exists z\, R(w,z))$	$\forall\rightarrow$
$\leftrightarrow$	$\forall x \exists y \forall w\, (R(x,y) \rightarrow \exists z\, R(w,z))$	$\rightarrow\forall$
$\leftrightarrow$	$\forall x \exists y \forall w \exists z\, (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	$\rightarrow\exists$

Oba získané výsledky jsou však ekvivalentní a mohou být dále převedeny na identickou formuli pomocí zákonů pro záměnu pořadí kvantifikátorů. Právě dosaženou formuli $\forall x \exists y \forall w \exists z\, (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$ bychom tak upravili třeba na:

$\leftrightarrow$	$\forall x \forall w \exists y \exists z\, (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	záměna pořadí $\exists$ a $\forall$

O něco výše dosaženou formuli $\forall w \exists z \forall x \exists y\ (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$ bychom těmito zákony zase upravili postupně následovně:

$\leftrightarrow$	$\forall w \forall x \exists z \exists y\ (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	záměna pořadí $\exists$ a $\forall$
$\leftrightarrow$	$\forall w \forall x \exists y \exists z\ (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	záměna pořadí $\exists$ a $\exists$
$\leftrightarrow$	$\forall x \forall w \exists y \exists z\ (R(x,y) \rightarrow R(w,z))$	záměna pořadí $\forall$ a $\forall$

3)

Náš poslední příklad má kromě jiného připomenout, že formule, jež nejsou tvaru implikace, lze po vhodných převodech na tvar implikace převést, aby pak mohly být aplikovány výše uváděné zákony pro distribuci kvantifikátorů:

	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ \neg P(x)$	
$\leftrightarrow$	$\neg \exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	tautologie VL
$\leftrightarrow$	$\neg \exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ \neg P(y)$	přejmenování proměnné (y/x)
$\leftrightarrow$	$\exists y\ (\neg \exists x\ P(x) \rightarrow \neg P(y))$	$\rightarrow\exists$
$\leftrightarrow$	$\exists y\ (\forall x\ \neg P(x) \rightarrow \neg P(y))$	DM
$\leftrightarrow$	$\exists y \exists x\ (\neg P(x) \rightarrow \neg P(y))$	$\forall\rightarrow$
$\leftrightarrow$	$\exists x \exists y\ (\neg P(x) \rightarrow \neg P(y))$	záměna pořadí $\exists$ a $\exists$

7.6 Cvičení – prenexní formy formulí

Následující formule upravte do prenexní normální formy. Pro úpravu třetí formule použijte zákon $\exists x\ (A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge \exists x\ B)$.

1) $\exists x \forall y\ R(x,y) \vee \forall x \exists y\ R(x,y)$

2) $\forall x\ (P(x) \rightarrow \forall y\ (Q(x,y) \rightarrow \neg \forall z\ R(y,z)))$

3) $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$

7.6 Řešení – prenexní formy formulí

1)

	$\exists x \forall y\ R(x,y) \vee \forall x \exists y\ R(x,y)$
$\leftrightarrow$	$\neg \exists x \forall y\ R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\ R(x,y)$
$\leftrightarrow$	$\forall x \neg \forall y\ R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\ R(x,y)$
$\leftrightarrow$	$\forall x \exists y\ \neg R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\ R(x,y)$
$\leftrightarrow$	$\forall x \exists y\ \neg R(x,y) \rightarrow \forall w \exists z\ R(w,z)$
$\leftrightarrow$	$\forall w\ (\forall x \exists y\ \neg R(x,y) \rightarrow \exists z\ R(w,z))$
$\leftrightarrow$	$\forall w \exists z\ (\forall x \exists y\ \neg R(x,y) \rightarrow R(w,z))$
$\leftrightarrow$	$\forall w \exists z \exists x\ (\exists y\ \neg R(x,y) \rightarrow R(w,z))$
$\leftrightarrow$	$\forall w \exists z \exists x \forall y\ (\neg R(x,y) \rightarrow R(w,z))$

2)

	$\forall x\ (P(x) \rightarrow \forall y\ (Q(x,y) \rightarrow \neg \forall z\ R(y,z)))$
$\leftrightarrow$	$\forall x \forall y\ (P(x) \rightarrow (Q(x,y) \rightarrow \neg \forall z\ R(y,z)))$
$\leftrightarrow$	$\forall x \forall y\ (P(x) \rightarrow (Q(x,y) \rightarrow \exists z\ \neg R(y,z)))$
$\leftrightarrow$	$\forall x \forall y\ (P(x) \rightarrow \exists z\ (Q(x,y) \rightarrow \neg R(y,z)))$
$\leftrightarrow$	$\forall x \forall y \exists z\ (P(x) \rightarrow (Q(x,y) \rightarrow \neg R(y,z)))$

3)

	$\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$
$\leftrightarrow$	$\exists x\ P(x) \wedge \exists y\ Q(y)$
$\leftrightarrow$	$\exists y\ (\exists x\ P(x) \wedge Q(y))$
$\leftrightarrow$	$\exists y\ (Q(y) \wedge \exists x\ P(x))$
$\leftrightarrow$	$\exists y \exists x\ (Q(y) \wedge P(x))$
$\leftrightarrow$	$\exists x \exists y\ (Q(y) \wedge P(x))$
$\leftrightarrow$	$\exists x \exists y\ (P(x) \wedge Q(y))$

8. Negace výroků

V tomto cvičebním okruhu navážeme na procvičování negací výroků logického čtverce. Nyní však k explicitnímu a tedy kontrolovatelnému provedení úkolu využijeme PL. Daný výrok formalizujeme, získanou formuli A negujeme na $\neg A$ a provedeme ekvivalentní transformace, výsledkem bude formule B, přičemž se budeme snažit, aby se symboly negace vyskytovaly v B nejvýše před atomickými podformulemi; výslednou formuli B vyjádříme slovně.

8.1 Příklady – negace výroků formálně

Následující výroky formalizujte prostředky PL, takto získané formule negujte a tyto negované formule transformujte na formule ekvivalentní, které pak vyjádřete slovně:

1)

Všechny moderní vlaky jsou rychlé.

Formalizace:

$$\forall x\ ((\mathrm{M}(x) \wedge \mathrm{V}(x)) \rightarrow \mathrm{R}(x))$$

Negace:

$$\neg \forall x\ ((\mathrm{M}(x) \wedge \mathrm{V}(x)) \rightarrow \mathrm{R}(x))$$

Ekvivalenty negace:

$$\leftrightarrow \exists x\ \neg((\mathrm{M}(x) \wedge \mathrm{V}(x)) \rightarrow \mathrm{R}(x))) \qquad \text{DM zákon}$$
$$\leftrightarrow \exists x\ ((\mathrm{M}(x) \wedge \mathrm{V}(x)) \wedge \neg \mathrm{R}(x))) \qquad \text{tautologie VL}$$

Tedy „Některé moderní vlaky nejsou rychlé“.

2)

Někteří moudří lidé nejsou vychytralí.

Formalizace:

$\exists x\ ((L(x) \wedge M(x)) \wedge \neg V(x))$

Negace:

$\neg \exists x\ ((L(x) \wedge M(x)) \wedge \neg V(x))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg((L(x) \wedge M(x)) \wedge \neg V(x))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ ((L(x) \wedge M(x)) \rightarrow \neg\neg V(x))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \exists x\ ((L(x) \wedge M(x)) \rightarrow V(x))$	tautologie VL

Tedy „Všichni moudří lidé jsou vychytralí“.

8.2 Cvičení – negace výroků formálně

Následující výroky formalizujte prostředky PL, takto získané formule negujte a tyto negované formule transformujte na formule ekvivalentní, které pak vyjádřete slovně. Při ekvivalentních transformacích se snažte o to, aby se symboly negace vyskytovaly nanejvýše před atomickými (pod)formulemi.

1) Některé pomalované sedačky nejsou laciné.

2) Některá přirozená čísla jsou sudá.

3) Některá prvočísla jsou dělitelná dvěma a pěti.

4) Nikdo, kdo je soudný, není ukvapený nebo věrolomný.

5) Všichni přítomní jsou starší než někteří členové klubu.

8.2 Řešení – negace výroků formálně

1)
Formalizace:

$\exists x\ ((P(x)\wedge S(x))\wedge\neg L(x))$

Negace:

$\neg\exists x\ ((P(x)\wedge S(x))\wedge\neg L(x)))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg((P(x)\wedge S(x))\wedge\neg L(x)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg(P(x)\wedge S(x))\vee\neg\neg L(x)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg(P(x)\wedge S(x))\vee L(x)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ ((P(x)\wedge S(x))\rightarrow L(x)))$	tautologie VL

Tedy „Všechny pomalované sedačky jsou laciné“.

2)
Formalizace:

$\exists x\ ((P(x)\wedge Č(x))\wedge S(x))$

Negace:

$\neg\exists x\ ((P(x)\wedge Č(x))\wedge S(x))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg((P(x)\wedge Č(x))\wedge S(x))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg(P(x)\wedge Č(x))\vee\neg S(x))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ ((P(x)\wedge Č(x))\rightarrow\neg S(x))$	tautologie VL

Slovně „Žádné přirozené číslo není sudé“.

3)
Formalizace:

$\exists x\ (P(x)\wedge(Děl(x,2)\wedge Děl(x,5)))$

Negace:

$\neg\exists x\ (P(x)\wedge(Děl(x,2)\wedge Děl(x,5)))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg(P(x)\wedge(Děl(x,2)\wedge Děl(x,5)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg P(x)\vee\neg(Děl(x,2)\wedge Děl(x,5)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ (P(x)\rightarrow\neg(Děl(x,2)\wedge Děl(x,5)))$	tautologie VL

Tedy „Žádná prvočísla nejsou dělitelná dvěma a pěti“.

4)
Formalizace:

$\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg(U(x) \vee V(x)))$

Negace:

$\neg\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg(U(x) \vee V(x)))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \exists x\ \neg(S(x) \rightarrow \neg(U(x) \vee V(x)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \exists x\ (S(x) \wedge \neg\neg(U(x) \vee V(x)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \exists x\ (S(x) \wedge (U(x) \vee V(x)))$.	tautologie VL

Slovně „Někdo soudný je ukvapený nebo věrolomný“.

5)
Formalizace:

$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (K(y) \wedge S(x,y)))$

Negace:

$\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (K(y) \wedge S(x,y)))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \exists x\ \neg(P(x) \rightarrow \exists y\ (K(y) \wedge S(x,y)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \neg\exists y\ (K(y) \wedge S(x,y)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ \neg(K(y) \wedge S(x,y)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (K(y) \rightarrow \neg S(x,y)))$	tautologie VL

Slovně „Existují přítomní, kteří nejsou starší než jacíkoli členové klubu“.

8.3 Příklady – ekvivalentní transformace negací formulí

Následující formule nejprve negujte a poté proveďte ekvivalentní transformace tak, aby se symboly negace vyskytovaly jen před atomickými (pod)formulemi. Opakovaně uplatňujte zejména De Morganovy zákony (jak z PL, tak z VL):

1)

$\exists x \forall y\ (P(x) \wedge Q(x,y))$

Negace:

$\neg\exists x \forall y\ (P(x) \wedge Q(x,y))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x \neg \forall y\ (P(x) \wedge Q(x,y))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x \exists y\ \neg(P(x) \wedge Q(x,y))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x \exists y\ (\neg P(x) \vee \neg Q(x,y))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x \exists y\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x,y))$	tautologie VL

2)

$$\exists x\ ((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$$

Negace:

$$\neg \exists x\ ((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg R(x))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ ((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg R(x))$	tautologie VL

Jiná varianta:

$\neg \exists x\ ((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$	
$\leftrightarrow \forall x\ \neg((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$	DM zákon
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg R(x))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \forall x\ ((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg R(x))$	tautologie VL

3)

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(x,y) \wedge \exists z\ Q(y,z)))$$

Negace:

$$\neg \forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(x,y) \wedge \exists z\ Q(y,z)))$$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \exists x\, \neg(P(x) \rightarrow \exists y\, (Q(x,y) \wedge \exists z\, Q(y,z)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \neg \exists y\, (Q(x,y) \wedge \exists z\, Q(y,z)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, \neg(Q(x,y) \wedge \exists z\, Q(y,z)))$	DM zákon
$\leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (\neg Q(x,y) \vee \neg \exists z\, Q(y,z)))$	tautologie VL
$\leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (\neg Q(x,y) \vee \forall z\, \neg Q(y,z)))$	DM zákon

8.4 Cvičení – ekvivalentní transformace negací formulí

Následující formule negujte a získané formule transformujte na formule ekvivalentní. Při ekvivalentních transformacích usilujte o to, aby se symboly negace vyskytovaly nanejvýše před atomickými (pod)formulemi a to v co nejmenším počtu:

1) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, R(x,y))$

2) $\exists x \forall y\, (R(x,y) \wedge \neg R(x,x))$

3) $\forall x \forall y\, (\neg R(x,y) \rightarrow \neg R(x,y)))$

4) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, (Q(y) \wedge R(x,y)))$

5) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, (Q(y) \rightarrow (R(x,y) \wedge S(x,y)))$

6) $\forall x \exists y\, (\exists z\, (P(y) \wedge R(x,y,z)) \vee S(x,y))$

7) $\exists x\, (S(x) \wedge \exists y\, ((P(y) \wedge Q(y)) \wedge \neg R(x,y))$

8) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, ((Q(y) \wedge R(x,y)) \wedge S(x,y)))$

9) $\exists x\, (P(x) \wedge R(a,x)) \vee \exists y\, (R(y,b) \wedge \neg R(y))$

10) $\forall x\, ((P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists y \exists z\, (P(z) \wedge R(x,y,z)))$

8.4 Řešení – ekvivalentní transformace negací formulí

1) $\exists x\,(P(x) \wedge \exists y\, \neg R(x,y))$
2) $\forall x \exists y\,(R(x,y) \rightarrow R(x,x))$
3) $\exists x \exists y\,(\neg R(x,y) \wedge R(x,y))$
4) $\exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y)))$
5) $\exists x\,(P(x) \wedge \exists y\,(Q(y) \wedge (R(x,y) \rightarrow \neg S(x,y))))$
6) $\exists x \forall y\,(\forall z\,(P(y) \rightarrow \neg R(x,y,z)) \wedge \neg S(x,y))$
7) $\forall x\,(S(x) \rightarrow \forall y\,((P(y) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x,y)))$
8) $\exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,((Q(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \neg S(x,y)))$
9) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg R(a,x)) \wedge \forall y\,(R(y,b) \rightarrow R(y))$
10) $\exists x\,((P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \wedge \forall y \forall z\,(P(z) \rightarrow \neg R(x,y,z)))$

8.5 Cvičení – negace výroků (výběr z možností)

Z níže nabízených možností určete právě ten jediný výrok, který je negací daného výroku. K nalezení řešení použijte formální přepis a ekvivalentní transformace:

1)

Nikdo, kdo je uspěchaný, není šťastný nebo klidný.

a) Každý, kdo není uspěchaný, je šťastný nebo klidný.
b) Nikdo, kdo není uspěchaný, není šťastný nebo klidný.
c) Někdo, kdo je uspěchaný, není šťastný nebo klidný.
d) Někdo, kdo je uspěchaný, je šťastný nebo klidný.
e) Někdo, kdo není uspěchaný, je šťastný nebo klidný.

2)

Každý, kdo je nadaný, je umělec nebo vědec.

a) Někdo je nadaný a je umělec a vědec.
b) Někdo je nadaný a není umělec a není vědec.
c) Někdo není nadaný a není umělec a vědec.
d) Nikdo, kdo je nadaný, není umělec nebo vědec.
e) Nikdo, kdo není nadaný, není umělec nebo vědec.

3)

Každý, kdo není amatér, je pokročilý nebo profesionál.

a) Někdo, kdo není amatér, je pokročilý nebo profesionál.
b) Někdo, kdo je amatér, není pokročilý nebo profesionál.
c) Každý, kdo je amatér, je pokročilý nebo profesionál.
d) Nikdo, kdo je amatér, není pokročilý nebo profesionál.
e) Někdo, kdo není amatér, není ani pokročilý, ani profesionál.

4)

Někdo není otužilý a je horolezec nebo polárník.

a) Někdo je otužilý a není horolezec nebo polárník.
b) Někdo není otužilý nebo není ani horolezec, ani polárník.
c) Každý je otužilý nebo není ani horolezec, ani polárník.
d) Každý je otužilý nebo není horolezec a polárník.
e) Nikdo, kdo je otužilý, není horolezec a polárník.

8.5 Řešení – negace výroků (výběr z možností)

1) d), protože $\neg\forall x\ (\mathrm{U}'(x)\rightarrow\neg(\check{\mathrm{S}}(x)\vee \mathrm{K}(x))) \leftrightarrow \exists x\ \neg(\mathrm{U}'(x)\rightarrow\neg(\check{\mathrm{S}}(x)\vee \mathrm{K}(x))) \leftrightarrow \exists x\ (\mathrm{U}'(x)\wedge\neg\neg(\check{\mathrm{S}}(x)\vee \mathrm{K}(x))) \leftrightarrow \exists x\ (\mathrm{U}'(x)\wedge(\check{\mathrm{S}}(x)\vee \mathrm{K}(x)))$.
2) b), protože $\neg\forall x\ (\mathrm{N}(x)\rightarrow(\mathrm{U}'(x)\vee \mathrm{V}(x))) \leftrightarrow \exists x\ \neg(\mathrm{N}(x)\rightarrow(\mathrm{U}'(x)\vee \mathrm{V}(x))) \leftrightarrow \exists x\ (\mathrm{N}(x)\wedge\neg(\mathrm{U}'(x)\vee \mathrm{V}(x))) \leftrightarrow \exists x\ (\mathrm{N}(x)\wedge(\neg \mathrm{U}'(x)\wedge\neg \mathrm{V}(x)))$.
3) e), protože $\neg\forall x\ (\neg \mathrm{A}(x)\rightarrow(\mathrm{P}(x)\vee \mathrm{P}'(x))) \leftrightarrow \exists x\ \neg(\neg \mathrm{A}(x)\rightarrow(\mathrm{P}'(x)\vee \mathrm{P}'(x))) \leftrightarrow \exists x\ (\neg \mathrm{A}(x)\wedge\neg(\mathrm{P}(x)\vee \mathrm{P}'(x))) \leftrightarrow \exists x\ (\neg \mathrm{A}(x)\wedge(\neg \mathrm{P}(x)\wedge\neg \mathrm{P}'(x)))$.
4) c), protože $\neg\exists x\ (\neg \mathrm{O}(x)\wedge(\mathrm{H}(x)\vee \mathrm{P}(x))) \leftrightarrow \forall x\ \neg(\neg \mathrm{O}(x)\wedge(\mathrm{H}(x)\vee \mathrm{P}(x))) \leftrightarrow \forall x\ (\neg\neg \mathrm{O}(x)\vee\neg(\mathrm{H}(x)\vee \mathrm{P}(x))) \leftrightarrow \forall x\ (\mathrm{O}(x)\vee\neg(\mathrm{H}(x)\vee \mathrm{P}(x))) \leftrightarrow \forall x\ (\mathrm{O}(x)\vee(\neg \mathrm{H}(x)\wedge\neg \mathrm{P}(x))) \leftrightarrow \forall x\ (\mathrm{O}(x)\vee(\mathrm{H}(x) \uparrow \mathrm{P}(x)))$.

9. Kategorický sylogismus

Aristotelův *kategorický sylogismus* je úsudek, který má právě dvě premisy, *vyšší premisu* a *nižší premisu*, a jeden závěr. Premisy a závěr jsou složeny právě a pouze ze tří *termínů*, tj. (obvykle monadických) predikátů:

- *subjektu* S
- *predikátu* P
- *středního* (či *mediálního*) *členu* M

Výrazy „subjekt" a „predikát" mají jiný význam než v moderním výkladu PL, všechny S, P i M jsou (obvykle monadickými) predikáty. Každý výrok obsažený v běžném sylogismu je výrokem z logického čtverce. Obsahuje proto vždy dva z těchto termínů. Pravidla pro rozmístění těchto termínů v sylogismu jsou pak následovná:

- subjekt S je termín, který stojí v závěru na místě subjektu (subjektu ve smyslu PL) a vyskytuje se ve druhé premise
- predikát P je termín, který stojí v závěru na místě predikátu (predikátu ve smyslu PL) a vyskytuje se v první premise
- střední člen M se vyskytuje v obou premisách, avšak nikoli v závěru.

Co nesplňuje dosud právě uvedené podmínky, není kategorický sylogismus.

Z hlediska rozmístění termínů jsou kombinatoricky možné právě 4 *figury*; první tři objevil Aristotelés, čtvrtá byla přidána v pozdní antice Galénem.

I. figura	II. figura	III. figura	IV. figura
M P S M —— S P	P M S M —— S P	M P M S —— S P	P M M S —— S P

Pro každou z figur je 4^3, tj. 64, možných distribucí druhů soudů z logického čtverce, tedy výroků druhu *a*, *i*, *e*, *o*, mezi termíny premis a závěru. Celkem je tedy 4×4^3, tj. 256 *modů* kategorických sylogismů, tedy druhů úsudků.

Aristotelés a jeho pokračovatelé z těchto 256 modů vybrali jen ty, jejichž závěr vyplývá z premis. Středověká logika rozeznávala 19 platných modů, z nichž však 4 nejsou platné, pokud je určitý z termínů tzv. prázdný; bez tohoto požadavku je tedy 15 platných modů sylogismů. (Příklad takového modu je sylogismus druhu darapti, III. figura, který uvedl B. Russell: „Všechny skleněné hory jsou hory“, „Všechny skleněné hory jsou ze skla“ ∴ „Některé hory jsou ze skla“; příslušný střední termín M nesmí být neprázdný, aby šlo o skutečně platný sylogismus.) Za předpokladu neprázdnosti určitých termínů je platných celkem 24 modů. Klasická sylogistika proto měla specifické pravidlo určující, že střední termín musí být alespoň v jedné premise tzv. vyčerpán (distribuován, použit) v celém rozsahu.

Závěrem poznamenejme, že nějaký soud se v sylogistice dokazuje tak, že se vyhledává střední termín obsažený v tom soudu obsaženým termínům (subjektu a predikátu), tak aby mohl být nalezen platný modus sylogismu.

9.1 Platné mody v jednotlivých figurách

Scholastičtí logikové (zejm. Petr Hispánský) stanovili k lepšímu zapamatování platných sylogismů mnemotechnické pomůcky, tedy slova, v nichž právě samohlásky *a*, *e*, *i*, nebo *o* indikovaly druhy soudů premis a závěru. Souhlásky pak indikovaly možné operace s nimi: první písmeno slovního označení modu sylogismu indikuje, od kterého modu první figury je odvozena platnost tohoto modu (např. všechny mody sylogismů, jejichž označení začíná písmenem *b*, lze nějak převést na modus barbara). Ostatní souhlásky indikují, na základě jakých úprav je takové převedení možné: *s* – prostým obratem, *p* – obratem po případech, *m* – záměnou premis, *c* – pomocí důkazu sporem. Zbylá písmena význam nemají.

Platnými mody v jednotlivých figurách jsou v tradičním názvosloví:

- I. *barbara*, *celarent*, *darii*, *ferio*
  – za předpokladu neprázdnosti termínů též *barbari*, *celaront*
- II. *baroco, camestres, cesare, festino*
  – za předpokladu neprázdnosti termínů též *camestros, cesaro*
- III. *bocardo, datisi, disamis, ferison*
  – za předpokladu neprázdnosti termínů též *darapti, felapton* (oba mody byly ve středověku řazeny mezi platné díky přijímanému předpokladu neprázdnosti M)

- IV. *calemes (camenes), dimatis, fresison*
  – za předpokladu neprázdnosti termínů též *bamalip (bramantip), fesapo, calemos* (první dva mody byly ve středověku řazeny mezi platné, fesapo díky předpokladu neprázdnosti M, bamalip rovněž, ačkoli nezbytná je také neprázdnost P)

Přehled platných modů sylogismů jednotlivých figur vyjádřených tradičním zápisem:

I. figura	barbara	barbari S≠∅	celarent	celaront S≠∅	darii	ferio
M P S M ——— S P	M*a*P S*a*M ——— S*a*P	M*a*P S*a*M ——— S*i*P	M*e*P S*a*M ——— S*e*P	M*e*P S*a*M ——— S*o*P	M*a*P S*i*M ——— S*i*P	M*e*P S*i*M ——— S*o*P

II. figura	baroco	cesare	cesaro S≠∅	camestres	camestros S≠∅	festino
P M S M ——— S P	P*a*M S*o*M ——— S*o*P	P*e*M S*a*M ——— S*e*P	P*e*M S*a*M ——— S*o*P	P*a*M S*e*M ——— S*e*P	P*a*M S*e*M ——— S*o*P	P*e*M S*i*M ——— S*o*P

III. figura	bocardo	darapti M≠∅	datisi	disamis	felapton M≠∅	ferison
M P M S ——— S P	M*o*P M*a*S ——— S*o*P	M*a*P M*a*S ——— S*i*P	M*a*P M*i*S ——— S*i*P	M*i*P M*a*S ——— S*i*P	M*e*P M*a*S ——— S*o*P	M*e*P M*i*S ——— S*o*P

IV. figura	bamalip P≠∅	calemes	calemos S≠∅	dimatis	fesapo M≠∅	fresison
P M M S ——— S P	P*a*M M*a*S ——— S*i*P	P*a*M M*e*S ——— S*e*P	P*a*M M*e*S ——— S*o*P	P*i*M M*a*S ——— S*i*P	P*e*M M*a*S ——— S*o*P	P*e*M M*i*S ——— S*o*P

Zde je přehled platných modů jednotlivých figur vyjádřených formulemi PL. Nechť výrazy S, P, M jsou v zápisech formulí PL v této tabulce zkratkami za otevřené atomické formule S(x), P(x), M(x):

I.	barbara	barbari $S \neq \emptyset$	celarent	celaront $S \neq \emptyset$	darii	ferio
M P	$\forall x\ (M \rightarrow P)$	$\forall x\ (M \rightarrow P)$	$\forall x\ (M \rightarrow \neg P)$	$\forall x\ (M \rightarrow \neg P)$	$\forall x\ (M \rightarrow P)$	$\forall x\ (M \rightarrow \neg P)$
S M	$\forall x\ (S \rightarrow M)$	$\forall x\ (S \rightarrow M)$	$\forall x\ (S \rightarrow M)$	$\forall x\ (S \rightarrow M)$	$\exists x\ (S \wedge M)$	$\exists x\ (S \wedge M)$
S P	$\forall x\ (S \rightarrow P)$	$\exists x\ (S \rightarrow P)$	$\forall x\ (S \rightarrow \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$

II.	baroco	cesare	cesaro $S \neq \emptyset$	camestres	camestros $S \neq \emptyset$	festino
P M	$\forall x\ (P \rightarrow M)$	$\forall x\ (P \rightarrow \neg M)$	$\forall x\ (P \rightarrow \neg M)$	$\forall x\ (P \rightarrow M)$	$\forall x\ (P \rightarrow M)$	$\forall x\ (P \rightarrow \neg M)$
S M	$\exists x\ (S \wedge \neg M)$	$\forall x\ (S \rightarrow M)$	$\forall x\ (S \rightarrow M)$	$\forall x\ (S \rightarrow \neg M)$	$\forall x\ (S \rightarrow \neg M)$	$\exists x\ (S \wedge M)$
S P	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\forall x\ (S \rightarrow \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\forall x\ (S \rightarrow \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$

III.	bocardo	darapti $M \neq \emptyset$	datisi	disamis	felapton $M \neq \emptyset$	ferison
M P	$\exists x\ (M \wedge \neg P)$	$\forall x\ (M \rightarrow P)$	$\forall x\ (M \rightarrow P)$	$\exists x\ (M \wedge P)$	$\forall x\ (M \rightarrow \neg P)$	$\forall x\ (M \rightarrow \neg P)$
M S	$\forall x\ (M \rightarrow S)$	$\forall x\ (M \rightarrow S)$	$\exists x\ (M \wedge S)$	$\forall x\ (M \rightarrow S)$	$\forall x\ (M \rightarrow S)$	$\exists x\ (M \rightarrow S)$
S P	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge P)$	$\exists x\ (S \wedge P)$	$\exists x\ (S \wedge P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$

IV.	bamalip $P \neq \emptyset$	calemes	calemos $S \neq \emptyset$	dimatis	fesapo $M \neq \emptyset$	fresison
P M	$\forall x\ (P \rightarrow M)$	$\forall x\ (P \rightarrow M)$	$\forall x\ (P \rightarrow M)$	$\exists x\ (P \wedge M)$	$\forall x\ (P \rightarrow \neg M)$	$\forall x\ (P \rightarrow \neg M)$
M S	$\forall x\ (M \rightarrow S)$	$\forall x\ (M \rightarrow \neg S)$	$\forall x\ (M \rightarrow \neg S)$	$\forall x\ (M \rightarrow S)$	$\forall x\ (M \rightarrow S)$	$\exists x\ (M \wedge S)$
S P	$\exists x\ (S \wedge P)$	$\forall x\ (S \rightarrow \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$	$\exists x\ (S \wedge \neg P)$

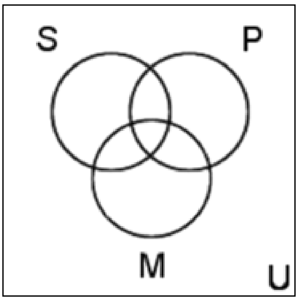
K jinému určení platnosti sylogismů, než jakým je určení na základě shody se jmenovanými platnými mody sylogismů, slouží následující základní pravidla. První tři jsou doporučena k zapamatování:

- ze dvou částečných soudů nic neplyne (tj. alespoň jedna premisa musí být obecná);
- ze dvou záporných soudů nic neplyne (tj. alespoň jedna premisa musí být kladná);
- když jsou obě premisy obecné, závěr nemůže být částečný (pokud není zaručena neprázdnost termínů);
- je-li jedna premisa záporná, tak je i závěr záporný;
- je-li jedna premisa částečná, tak je i závěr částečný.

10. Ověřování platnosti úsudků Vennovými diagramy

Pro ověření platnosti úsudků pomocí PL máme k dispozici několik prostředků. Podobně jako ve VL můžeme kromě syntaktických prostředků důkazu využít metodu protipříkladu, jež uplatňuje sémantickou interpretaci formulí. Pro určitou skupinu úsudků, mezi něž patří zejména kategorické sylogismy, se však s oblibou využívají Vennovy diagramy. (Existuje i metoda využívající jiné diagramy, a také např. Genslerova metoda, která diagramy nevyužívá.)

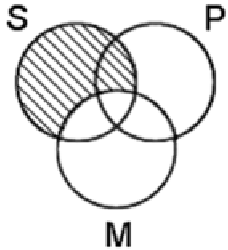
Nejdříve se zaměříme na grafickou reprezentaci úsudku pomocí Vennových diagramů. Každý kategorický sylogismus má tři termíny, tedy tři predikáty, jež jsou predikovatelné individuím. Predikáty interpretujeme jako množiny a množiny můžeme reprezentovat jako kruhy. Abychom dostali všechny možné kombinace predikací, naše tři kruhy zastupující dané predikáty S, P a M se budou protínat následovně:



(Obdélník značící univerzum, ani indikaci univerza písmenem „U“ už nebudeme v dalších diagramech vyznačovat.) Vidíme, že univerzum je danými predikáty rozčleněno tak, že může existovat například individuum, které je S, P i M (náleží tedy do množiny, která je průnikem S, P a M), anebo může být třeba S a P, ale ne M, atd. Celkem je tu 2^3, tj. 8, různých základních podmnožin, jichž může být nějaké individuum prvkem.

Každou z premis kategorického sylogismu vyjádříme graficky podle toho, o jaký druh výroku jde z hlediska logického čtverce. Uplatňujeme přitom čtyři následující pravidla:

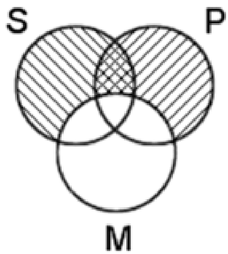
i. Každá premisa kategorického sylogismu zahrnuje právě dva predikáty a my při grafickém znázorňování nebereme ohled na grafické vyjádření třetího predikátu přítomného v sylogismu. Na příkladu vyznačení premisy „Všechna S jsou M" si všimněme, že nebereme ohled na množinu P:



„Všechna S jsou M."

Řečeno jinak, při šrafování například „Všechna S jsou M" šrafujeme celý půlměsíc v S (včetně části průniku S a M). (Existuje ovšem výjimka, kdy ohled na třetí predikát brát musíme – totiž když by snad mělo být individuum zaznačeno pomocí křížku tam, kde podle jiné premisy žádné individuum není a tak je daná část grafu již vyšrafována.)

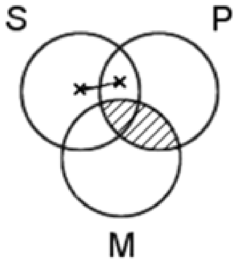
ii. Protože šrafování dvou obecných premis by splývalo, pro každou z nich používáme jiný směr šrafování, totiž /// a \\\. Zde je příklad:



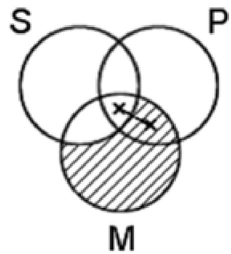
„Všechna P jsou M." (///)
„Všechna S jsou M." (\\\)

iii. Pokud máme zaznačit křížek do určité části půlměsíce či rybičky, jsou dvě možnosti, tj. dva obrazce, do nichž křížek zanést. Křížek však kreslíme do obou obrazců, načež tyto dva křížky spojíme čarou, abychom při vyhodnocování úsudku věděli, že v jednom obrazci se ono individuum ve skutečnosti nacházet nemusí. Pro příklad viz levý obrázek:

„Žádná M nejsou P.“ (///)
„Některá S nejsou M.“ (×)



„Některá M jsou P.“ (×)
„Všechna M jsou S.“ (///)



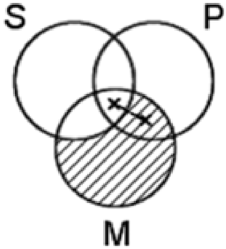
(Alternativní metodou značení je kreslení křížku na hraniční křivku, která dělí půlměsíc či rybičku na části, ale tato metoda značení není vždy výhodná.) Pravý obrázek nám ukazuje případ, kdy nižší premisa je na rozdíl od vyšší obecná, takže křížek může být přešrafován, a tedy přestane mít platnost, protože obecná premisa určila, že tam individuum přece jenom není. (Kdybychom přijali pravidlo, že obecná premisa musí být značena dříve, než částečná, mohli bychom se přešrafovávání vyhnout. V našem obrázku by tedy křížek byl pouze v srdíčku.)

iv. Závěr nikdy nešrafujeme.

Nyní si popíšeme vyhodnocení této grafické reprezentace úsudku. Úsudek je platný, pokud se to, co získáme grafickým znázorněním premis, zcela shoduje s tím, co bychom získali grafickým znázorněním závěru. Premisy tedy mají plně determinovat ten stav, který říká závěr. Například (uvozovky „ a “ budeme už vynechávat):

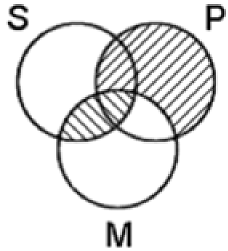
Některá M jsou P. (×)
Všechna M jsou S. (///)

Některá S jsou P.



Všechna P jsou M. (///)
Žádná M nejsou S. (\\\)

Žádná S nejsou P.

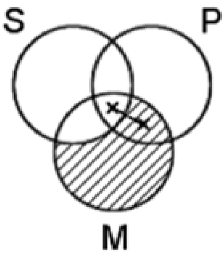


V příkladu nalevo determinovaly premisy kromě jiného to, že v průniku S a P je nějaké individuum; a právě toto vyslovuje i závěr – úsudek je tedy platný. V příkladu napravo je tomu podobně, premisy dohromady sdělují, že ve vyšrafovaných částech univerza nic není; do toho spadá i to, co říká závěr – úsudek je tedy platný. Vidíme tedy, že závěr platného úsudku vyslovuje to, co už je nějak obsaženo v premisách.

V případě neplatných úsudků se může stát typicky to, že závěr jde jaksi mimo to, co řekly premisy. Anebo se může stát to, že závěr si dovoluje tvrdit něco, na co není z hlediska toho, co premisy řekly, nárok. Zde jsou dva příklady:

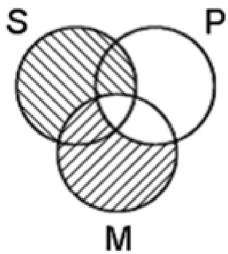
Některá M jsou P. (×)
Všechna M jsou S. (///)

Všechna S jsou P.



Všechna M jsou P. (///)
Všechna S jsou M. (\\\)

Některá S jsou P.



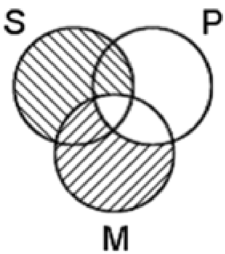
V příkladu nalevo premisy determinovaly, že existuje S, které je P; závěr ale tvrdí, že všechna S jsou P. V příkladu napravo premisy determinovaly, že všechna S jsou P; závěr ale tvrdí, že existuje nějaké S, které je P. (Níže najdeme další a někdy výmluvnější příklady, kdy se závěr míjí s tím, co determinovaly premisy.)

Neplatné sylogismy jsou v zásadě dvou druhů: a) takové sylogismy, které by byly platné, kdyby měly adekvátnější závěr; b) takové sylogismy, které nemohou mít z premis vyplývající závěr, jenž by byl kategorickým výrokem; speciální podskupinu tvoří takové sylogismy, jejichž platnost je podmíněna neprázdností příslušného termínu.

V případě nejistoty, zda je naše vyhodnocení úsudku správné, můžeme užít následující pomůcku: negujeme závěr a ten se pokusíme graficky zanést do diagramu; pokud lze závěr zaznačit (protože premisy ‚nechaly volné místo'), anebo je stav vyjádřený negovaným závěrem díky premisám dokonce již zaznačen, úsudek platný není (znamenalo by to totiž, že premisy mohou být pravdivé, ale závěr nikoli.) Zde jsou příklady:

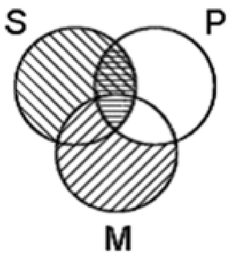
Všechna M jsou P. (///)
Všechna S jsou M. (\\\)

Všechna S jsou P.



Všechna M jsou P. (///)
Všechna S jsou M (\\\)

Některá S jsou P.



V příkladu nalevo negaci závěru, totiž „Některá S nejsou P", nelze zaznačit (křížek bychom museli kreslit tam, kde podle premis žádné individuum není), úsudek je tedy platný. V příkladu napravo negaci závěru, tj. „Žádná S nejsou P" lze zaznačit (≡), úsudek tedy platný není. Někdy bývá způsob vyhodnocování se šrafováním negace závěru podáván jako (jediná) metoda vyhodnocení sylogismů.

Kromě kategorických sylogismů lze pomocí Vennových diagramů ověřovat i úsudky, které nejsou kategorickými sylogismy. Například lze tak ověřovat úsudky s dvěma až třemi monadickými predikáty a třeba jedním singulárním výrokem, např.:

Každý člověk je smrtelný.
Sókratés je člověk.

Sókratés je smrtelný.

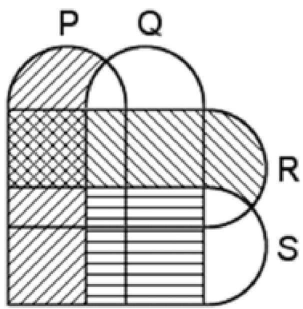
Ověření pomocí Vennových diagramů je ponecháno na čtenáři (v diagramu jsou jen dva kruhy a „×s“ zastupuje Sókrata).

V případě, že úsudek obsahuje více jak tři monadické predikáty, je zapotřebí takový Vennův diagram, který vyjádří nejen všechny zúčastněné predikáty, ale také všechny příslušné množinové vztahy. Způsob přizpůsobení dosavadních diagramů si ilustrujeme na příkladu vyhodnocení následující platné úsudkové formy:

$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ (///)
$\forall x\, (R(x) \rightarrow S(x))$ (\\\)
$\forall x\, (Q(x) \rightarrow \neg S(x))$ (≡)

$\forall x\, (P(x) \rightarrow \neg R(x))$

Zde je příslušný Vennův diagram:

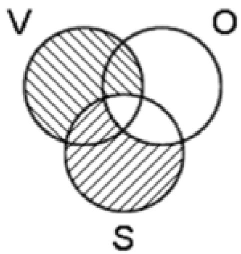


10.1 Příklady – ověřování platnosti sylogismů Vennovými diagramy

Metodou Vennových diagramů ověřte, zda je daný sylogismus platný:

1)

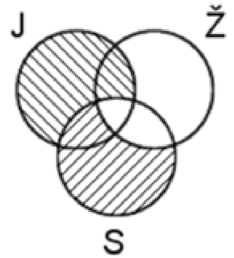
Všichni savci jsou obratlovci.	$\forall x\ (S(x) \rightarrow O(x))$	(///)
Všechny velryby jsou savci.	$\forall x\ (V(x) \rightarrow S(x))$	(\\\\\\)
Všechny velryby jsou obratlovci.	$\forall x\ (V(x) \rightarrow O(x))$	



Úsudek je platný, závěr vyplývá z premis (jedná se o případ modu *barbara*). Není možné, aby při pravdivosti premis existovala velryba, která by nebyla obratlovcem.

2)

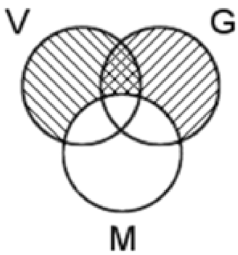
Všichni savci jsou živočichové.	$\forall x\ (S(x) \rightarrow Ž(x))$	(///)
Všichni jednorožci jsou savci.	$\forall x\ (J(x) \rightarrow S(x))$	(\\\\\\)
Někteří jednorožci jsou živočichové.	$\exists x\ (J(x) \rightarrow Ž(x))$	



Tento úsudek (případ modu *barbari*) není platný, protože pokud je množina jednorožců prázdná, závěr je nepravdivý, avšak obě premisy zároveň pravdivé. Závěr by vyplýval z premis jedině kdyby bylo zaručeno, že množina jednorožců je vždy neprázdná, čili kdyby byla přidána premisa „Existují jednorožci".

3)

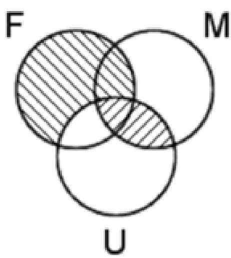
Všichni gymnazisté mají maturitu.	$\forall x\,(G(x) \rightarrow M(x))$	(///)
Všichni vysokoškoláci mají maturitu.	$\forall x\,(V(x) \rightarrow M(x))$	(\\\\\\)
Všichni vysokoškoláci jsou gymnazisté.	$\forall x\,(V(x) \rightarrow G(x))$	



Úsudek není platný. Závěr z premis nevyplývá – někteří vysokoškoláci přece mohou mít maturitu odjinud než z gymnázia.

4)

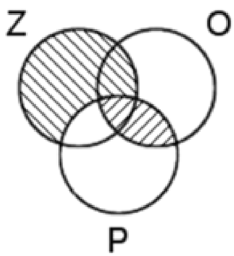
Žádný učený není mudrc.	$\forall x\,(U(x) \rightarrow \neg M(x))$	(///)
Každý filosof je učený.	$\forall x\,(F(x) \rightarrow U(x))$	(\\\\\\)
Žádný filosof není mudrc.	$\forall x\,(F(x) \rightarrow \neg M(x))$	



Úsudek je platný, závěr vyplývá z premis (případ modu *celarent*).

5)

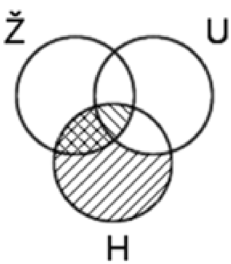
Žádný podezřelý není obviněn.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg O(x))$	(///)
Každý zatčený je podezřelý.	$\forall x\,(Z(x) \rightarrow P(x))$	(\\\\\\)
Někteří zatčení nejsou obviněni.	$\exists x\,(Z(x) \wedge \neg O(x))$	



Úsudek není platný (jde o případ modu *celaront*). Úsudek by byl platný, kdyby bylo zaručeno, že vždy budou existovat nějací zatčení, tj. kdyby byla přidána premisa „Existují zatčení“.

6)

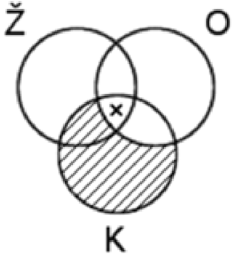
Každý hudebník je umělec.	$\forall x\,(H(x) \rightarrow U(x))$	(///)
Žádný žonglér není hudebník.	$\forall x\,(\check{Z}(x) \rightarrow \neg H(x))$	(\\\\\\)
Žádný žonglér není umělec.	$\forall x\,(\check{Z}(x) \rightarrow \neg U(x))$	



Úsudek není platný, závěr nevyplývá z premis – nějaký žonglér může být třeba malířem, což je přece umělec.

7)

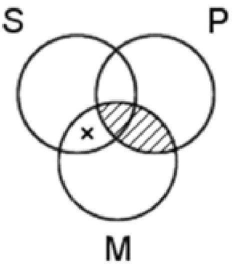
Vše krásné je oblíbené.	$\forall x\ (K(x) \rightarrow O(x))$	(///)
Některé ženy jsou krásné.	$\exists x\ (Ž(x) \wedge K(x))$	(×)
Některé ženy jsou oblíbené.	$\exists x\ (Ž(x) \wedge O(x))$	



Úsudek je platný, závěr vyplývá z premis (případ modu *darii*).

8)

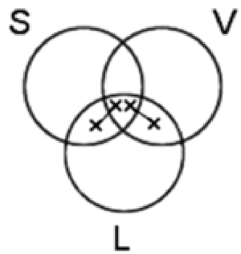
Žádní milenci nejsou platoničtí.	$\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg P(x))$	(///)
Někteří svůdci jsou zároveň milenci.	$\exists x\ (S(x) \wedge M(x))$	(×)
Někteří svůdci nejsou platoničtí.	$\exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$	



Úsudek je platný, závěr vyplývá z premis (případ modu *ferio*).

9)

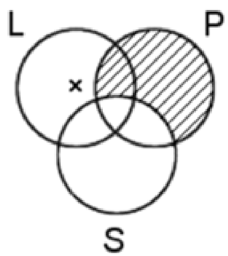
Někteří literáti jsou vysokoškoláci.	$\exists x\ (L(x) \wedge V(x))$	(×)
Někteří studenti jsou literáti.	$\exists x\ (S(x) \wedge L(x))$	(×)
Někteří studenti jsou vysokoškoláci.	$\exists x\ (S(x) \wedge V(x))$	



Úsudek není platný, závěr nevyplývá z premis (ze dvou částečných premis nic neplyne). Není totiž zaručeno, že by existovali nějací studenti, kteří by byli vysokoškoláci (srov. náhodnost výskytu nějakého individua v srdíčku Vennova diagramu vyjadřujícího tento úsudek).

10)

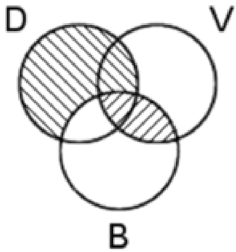
Všichni parašutisté jsou sportovci.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow S(x))$	(///)
Někteří lidé nejsou sportovci.	$\exists x\ (L(x) \wedge \neg S(x))$	(×)
Někteří lidé nejsou parašutisté.	$\exists x\ (L(x) \wedge \neg P(x))$	



Úsudek je platný, závěr vyplývá z premis (případ modu *baroco*).

11)

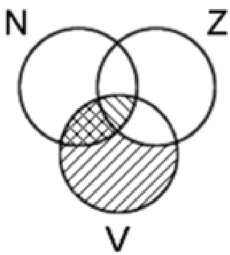
Žádná voda není barevná.	$\forall x\, (V(x) \rightarrow \neg B(x))$	(///)
Každá duha je barevná.	$\forall x\, (D(x) \rightarrow B(x))$	(\\\\\\)
Žádná duha není voda.	$\forall x\, (D(x) \rightarrow \neg V(x))$	



Úsudek je platný, závěr vyplývá z premis (případ modu *cesare*).

12)

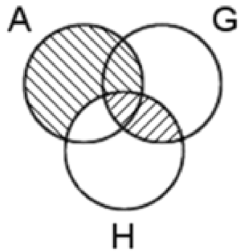
Všichni vrahové jsou zločinci.	$\forall x\, (V(x) \rightarrow Z(x))$	(///)
Žádné nemluvně není vrah.	$\forall x\, (N(x) \rightarrow \neg V(x))$	(\\\\\\)
Žádné nemluvně není zločinec.	$\forall x\, (N(x) \rightarrow \neg Z(x))$	



Úsudek není platný, závěr nevyplývá z premis – je možné, že nějaké nemluvně je zločinec.

13)

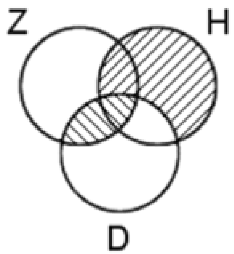
Žádný geolog není historik.	$\forall x\ (G(x) \rightarrow \neg H(x))$	(///)
Každý archeolog je historik.	$\forall x\ (A(x) \rightarrow H(x))$	(\\\\\\)
Někteří archeologové nejsou geology.	$\exists x\ (A(x) \wedge \neg G(x))$	



Úsudek není platný (případ modu *cesaro*). Byl by platný, kdyby bylo zaručeno, že vždy existují nějací archeologové, tj. kdyby byla přidána patřičná premisa.

14)

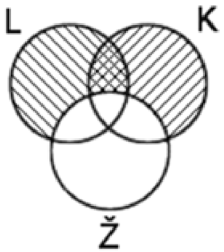
Každý hrdina je důstojný.	$\forall x\ (H(x) \rightarrow D(x))$	(///)
Žádný zbabělec není důstojný.	$\forall x\ (Z(x) \rightarrow \neg D(x))$	(\\\\\\)
Žádný zbabělec není hrdina.	$\forall x\ (Z(x) \rightarrow \neg H(x))$	



Úsudek je platný, závěr vyplývá z premis (případ modu *camestres*).

15)

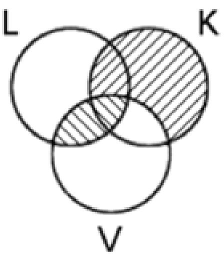
Všechny kyseliny jsou žíraviny.	$\forall x\ (K(x) \rightarrow Ž(x))$	(///)
Všechny louhy jsou žíraviny.	$\forall x\ (L(x) \rightarrow Ž(x))$	(\\\\\\)
Některé louhy jsou kyseliny.	$\exists x\ (L(x) \wedge K(x))$	



Úsudek není platný. Premisy nezaručují existenci louhů, které by byly kyselinami.

16)

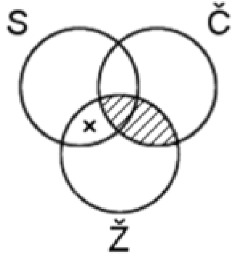
Co je krásné, to je věčné.	$\forall x\ (K(x) \rightarrow V(x))$	(///)
Žádná láska není věčná.	$\forall x\ (L(x) \rightarrow \neg V(x))$	(\\\\\\)
Některá láska není krásná.	$\exists x\ (L(x) \wedge \neg K(x))$	



Úsudek není platný (případ modu *camestros*). Úsudek by byl platný, pokud by bylo zaručeno, že vždy existuje něco, co je láska.

17)

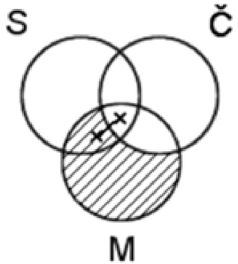
S čerty nejsou žerty.	$\forall x\ (Č(x)\rightarrow\neg Ž(x))$	(///)
S některými strašidly jsou žerty.	$\exists x\ (S(x)\wedge Ž(x))$	(×)
Některá strašidla nejsou čerty.	$\exists x\ (S(x)\wedge\neg Č(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *festino*).

18)

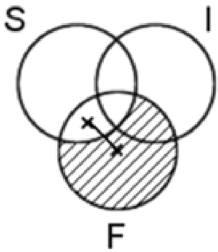
Každý muž je člověk.	$\forall x\ (M(x)\rightarrow Č(x))$	(///)
Někteří muži jsou silní.	$\exists x\ (M(x)\wedge S(x))$	(×)
Všechno silné je člověkem.	$\forall x\ (S(x)\rightarrow Č(x))$	



Úsudek není platný, závěr nevyplývá z premis – vyplývá jenom, že něco silného je člověkem.

19)

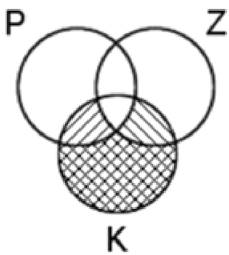
Někteří fotbalisté nejsou introvertní.	$\exists x\ (F(x) \wedge \neg I(x))$	(×)
Všichni fotbalisté jsou sportovci.	$\forall x\ (F(x) \rightarrow S(x))$	(///)
Někteří sportovci nejsou introvertní.	$\exists x\ (S(x) \wedge \neg I(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *bocardo*).

20)

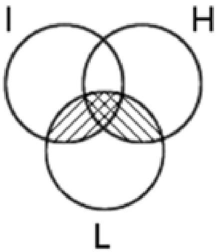
Všechna kouzla jsou zábavná.	$\forall x\ (K(x) \rightarrow Z(x))$	(///)
Všechna kouzla jsou podfuky.	$\forall x\ (K(x) \rightarrow P(x))$	(\\\\\\)
Některé podfuky jsou zábavné.	$\exists x\ (P(x) \wedge Z(x))$	



Úsudek není platný (případ modu *darapti*). Muselo by být zaručeno, že vždy existují nějaká kouzla.

21)

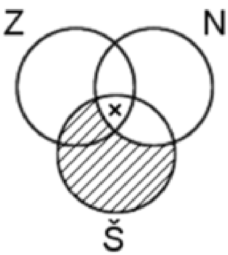
Žádný Laponec není Indián.	$\forall x\ (L(x) \rightarrow \neg I(x))$	(///)
Žádný herec není Laponec.	$\forall x\ (H(x) \rightarrow \neg L(x))$	(\\\\\\)
Žádný herec není Indián.	$\forall x\ (H(x) \rightarrow \neg I(x))$	



Úsudek není platný – může existovat herec, který je Indián.

22)

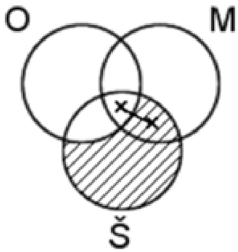
Všichni šílenci jsou nebezpeční.	$\forall x\ (Š(x) \rightarrow N(x))$	(///)
Někteří šílenci jsou zajímaví.	$\exists x\ (Š(x) \wedge Z(x))$	(×)
Něco, co je zajímavé, je nebezpečné.	$\exists x\ (Z(x) \wedge N(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *datisi*).

23)

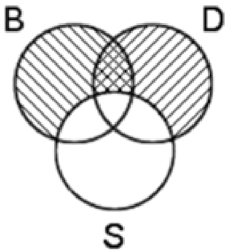
Některé šaty jsou módní.	$\exists x\ (\check{S}(x) \wedge M(x))$	(×)
Všechny šaty jsou oděvy.	$\forall x\ (\check{S}(x) \rightarrow O(x))$	(///)
Některé oděvy jsou módní.	$\exists x\ (O(x) \wedge M(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *disamis*).

24)

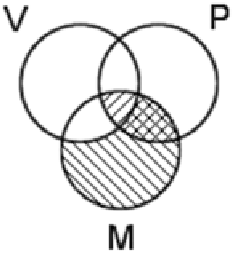
Každý daněk je savec.	$\forall x\ (D(x) \rightarrow S(x))$	(///)
Každý býložravec je savec.	$\forall x\ (B(x) \rightarrow S(x))$	(\\\\\\)
Každý býložravec je daněk.	$\forall x\ (B(x) \rightarrow D(x))$	



Úsudek není platný – je možné, že existují býložravci, kteří nejsou daňci.

25)

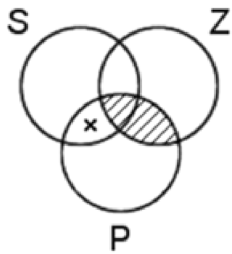
Žádný Marťan není pozemšťan.	$\forall x\,(M(x) \rightarrow \neg P(x))$	(///)
Každý Marťan je vesmířan.	$\forall x\,(M(x) \rightarrow V(x))$	(\\\\\\)
Někteří vesmířani nejsou pozemšťani.	$\exists x\,(V(x) \wedge \neg P(x))$	



Úsudek není platný (případ modu *felapton*). Muselo by totiž být zaručeno, že vždy existují Marťané, následně by byla neprázdná i množina vesmířanů.

26)

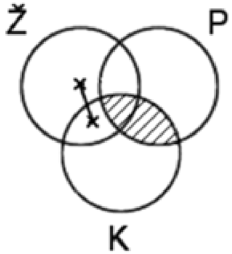
Žádné prvočíslo není záporné.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Z(x))$	(///)
Některá prvočísla jsou sudá.	$\exists x\,(P(x) \wedge S(x))$	(×)
Něco sudého není záporné.	$\exists x\,(S(x) \wedge \neg Z(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *ferison*).

27)

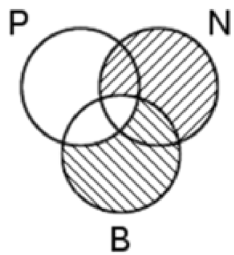
Žádný pták není kosmonaut.	$\forall x\,(P(x)\rightarrow\neg K(x))$	(///)
Někteří živočichové nejsou ptáci.	$\exists x\,(Ž(x)\wedge\neg P(x))$	(×)
Někteří živočichové jsou kosmonauti.	$\exists x\,(Ž(x)\wedge K(x))$	



Úsudek není platný – žádný živočich nemusí být kosmonautem.

28)

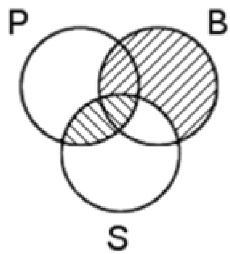
Všichni nadšenci jsou blázni.	$\forall x\,(N(x)\rightarrow B(x))$	(///)
Všichni blázni jsou pomatení.	$\forall x\,(B(x)\rightarrow P(x))$	(\\\\\\)
Někteří pomatení jsou nadšenci.	$\exists x\,(P(x)\wedge N(x))$	



Úsudek není platný (případ modu *bamalip*). Byl by platný, kdyby bylo zaručeno, že vždy existují nějací nadšenci.

29)

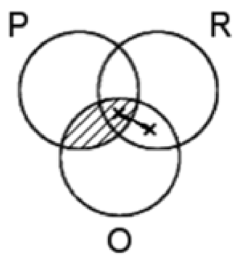
Každý básník je snílek.	$\forall x\,(B(x)\rightarrow S(x))$	(///)
Žádný snílek není praktik.	$\forall x\,(S(x)\rightarrow\neg P(x))$	(\\\\\\)
Žádný praktik není básník.	$\forall x\,(P(x)\rightarrow\neg B(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *calemes*).

30)

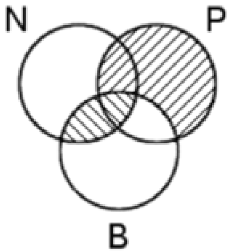
Někteří optimisté jsou rozjaření.	$\exists x\,(O(x)\wedge R(x))$	(×)
Žádný optimista není pesimista.	$\forall x\,(O(x)\rightarrow\neg P(x))$	(///)
Žádný pesimista není rozjařený.	$\forall x\,(P(x)\rightarrow\neg R(x))$	



Úsudek není platný, závěr nevyplývá z premis – vyplývá věta, že někteří rozjaření nejsou pesimisté.

31)

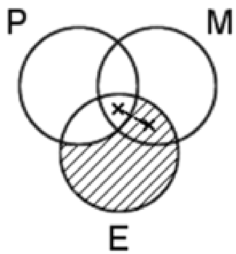
Každý psychopat je blázen.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow B(x))$	(///)
Žádný blázen není normální.	$\forall x\ (B(x) \rightarrow \neg N(x))$	(\\\\\\)
Někteří normální nejsou psychopati.	$\exists x\ (N(x) \wedge \neg P(x))$	



Úsudek není platný (případ modu *calemos*). Byl by platný, kdyby bylo zaručeno, že vždy existují nějací normální.

32)

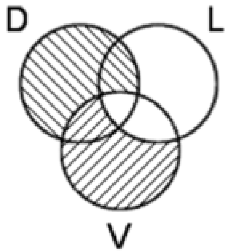
Některé masáže jsou erotické.	$\exists x\ (M(x) \wedge E(x))$	(×)
Co je erotické, je příjemné.	$\forall x\ (E(x) \rightarrow P(x))$	(///)
Něco, co je příjemné, jsou masáže.	$\exists x\ (P(x) \wedge M(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *dimatis*).

33)

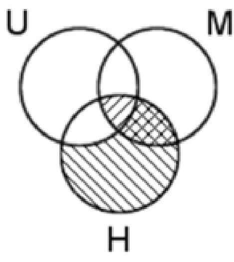
Co je vzrušující, je lákavé.	$\forall x\,(V(x) \rightarrow L(x))$	(///)
Všechno dobrodružné je vzrušující.	$\forall x\,(D(x) \rightarrow V(x))$	(\\\\\\)
Co je dobrodružné, je lákavé.	$\forall x\,(D(x) \rightarrow L(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *barbara*).

34)

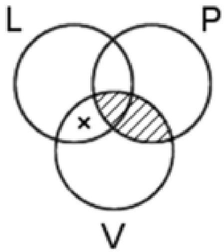
Žádný metafyzik není hudebník.	$\forall x\,(M(x) \rightarrow \neg H(x))$	(///)
Každý hudebník je umělec.	$\forall x\,(H(x) \rightarrow U(x))$	(\\\\\\)
Někteří umělci nejsou metafyziky.	$\exists x\,(U(x) \wedge \neg M(x))$	



Úsudek není platný (případ modu *fesapo*). Byl by platný, kdyby bylo zaručeno, že vždy existují nějací hudebníci (pak by existovali i umělci).

35)

Žádný pták není veverka.	$\forall x\,(P(x)\rightarrow\neg V(x))$	(///)
Některé veverky jsou létavé.	$\exists x\,(V(x)\wedge L(x))$	(×)
Některří létaví nejsou ptáky.	$\exists x\,(L(x)\wedge\neg P(x))$	



Úsudek je platný (případ modu *fresison*).

10.2 Cvičení – ověřování platnosti sylogismů Vennovými diagramy

Pomocí Vennových diagramů ověřte platnost následujících sylogismů:

1)

Všechny sýkorky jsou pěvci.
Všechny koňadry jsou sýkorky.

Všechny koňadry jsou pěvci.

2)

Každý muž je člověk.
Každý sněžný muž je muž.

Existuje sněžný muž, který je člověkem.

3)

Všichni (mí) kamarádi jsou vysokoškoláci.
Všichni lékaři jsou vysokoškoláci.

Někteří (mí) kamarádi jsou lékaři.

4)

Žádná šelma není beránek.
Každý vlk je šelma.

Žádný vlk není beránek.

5)

Žádný maniak není podvodník.
Každý sukničkář je maniak.

Někteří sukničkáři nejsou podvodníci.

6)

Všechno ochočené je přítulné.
Žádný manžel není ochočený.

Žádný manžel není přítulný.

7)

Všichni skladatelé jsou hudebníci.
Někteří profesionálové jsou skladatelé.

Někteří profesionálové jsou hudebníci.

8)

Nikdo mazaný není prostomyslný.
Někteří výrostci jsou mazaní.

Někteří výrostci nejsou prostomyslní.

9)

Někteří piloti jsou alkoholici.
Někteří strojvůdci jsou alkoholici.

Někteří strojvůdci jsou piloti.

10)

Každý platonik je metafyzik.
Někteří sokratici nejsou metafyzici.

Někteří sokratici nejsou platonici.

11)

Žádní psovití nejsou kočkovití.
Všichni tygři jsou kočkovití.

Žádní tygři nejsou psovití.

12)

Každý pozemšťan je živočich.
Žádný mimozemšťan není pozemšťan.

Žádný mimozemšťan není živočich.

13)

Žádný pacifista není militantní.
Každý terorista je militantní.

Někteří teroristé nejsou pacifisté.

14)

Vše hodnotné je důležité.
Nic dočasné není důležité.

Nic dočasné není hodnotné.

15)

Každý zloděj krade.
Všichni lidé kradou.

Někteří lidé jsou zloději.

16)

Všechno sladké je chutné.
Nic přesoleného není chutné.

Něco přesolené není sladké.

17)

Nic lidské není věčné.
Některé problémy jsou věčné.

Některé problémy nejsou lidské.

18)

Všichni lakomci jsou sobečtí.
Někteří lakomci jsou spořiví.

Všichni spořiví jsou sobečtí.

19)

Někteří politici nejsou populární.
Všichni politici jsou občané.

Někteří občané nejsou populární.

20)

Všechny máty jsou léčivé.
Všechny máty jsou rostliny.

Některé rostliny jsou léčivé.

21)

Žádný živočich není nesmrtelný.
Žádný kámen není živočich.

Žádný kámen není nesmrtelný.

22)

Každá hvězda je stálice.
Některé hvězdy jsou vyhaslé.

Něco, co je vyhaslé, je stálice.

23)

Některé vědy jsou abstraktní.
Všechny vědy jsou zajímavé.

Něco zajímavé je abstraktní.

24)

Každý lyžař je sportovec.
Každý cyklista je sportovec.

Každý cyklista je lyžař.

25)

Žádný mravenečník není mravenec.
Každý mravenečník je hmyzožravec.

Někteří hmyzožravci nejsou mravenci.

26)

Žádná náhoda není zákonitá.
Některé náhody jsou výhry.

Některé výhry nejsou zákonité.

27)

Žádný hrubián není džentlmen.
Někteří lidé nejsou hrubiáni.

Někteří lidé jsou džentlmeni.

28)

Všechny koně jsou sudokopytníci.
Všichni sudokopytníci jsou obratlovci.

Někteří obratlovci jsou koně.

29)

Každá ropucha je žába.
Žádná žába není princezna.

Žádná princezna není ropucha.

30)

Někteří spisovatelé jsou muzikanti.
Žádný spisovatel není zámečník.

Žádný zámečník není muzikant.

31)

Všichni dinosauři vymřeli.
Žádní vymřelí nejsou veselí.

Někteří veselí nejsou dinosauři.

32)

Někteří oblíbenci jsou vysokoškoláci.
Každý vysokoškolák je inteligent.

Někteří inteligenti jsou oblíbenci.

33)

Co je rizikové, stresuje.
Každý obchod je rizikový.

Každý obchod stresuje.

34)

Žádná kára není pika.
Každá pika je karta.

Některé karty nejsou káry.

35)

Žádná ryba není rak.
Někteří raci jsou sladkovodní.

Existuje něco sladkovodního, co není ryba.

36)

Někteří básníci jsou žurnalisty.
Někteří básníci jsou písničkáři.

Někteří písničkáři jsou žurnalisty.

37)

Žádná půjčka není příjemná.
Některé půjčky jsou riskantní.

Co je riskantní, je příjemné.

38)

Všichni malíři jsou umělci.
Někteří učitelé nejsou umělci.

Někteří učitelé nejsou malíři.

39)

Každý vklad je s úrokem.
Žádný úvěr není bez úroku.

Některý úvěr je vkladem.

40)

Někteří filosofové jsou materialisté.
Někteří lidé nejsou materialisté.

Někteří filosofové nejsou lidmi.

10.2 Řešení – ověřování platnosti sylogismů Vennovými diagramy

(Úsudky 1–35 jsou varianty úsudků z příkladů v sekci 10.1.)

1) Úsudek je platný (případ modu *barbara*).
2) Úsudek není platný (případ modu *barbari*); aby byl platný, muselo by být zaručeno, že vždy existují sněžní muži.
3) Úsudek není platný – nemusíme mít žádného kamaráda lékaře.
4) Úsudek je platný (případ modu *celarent*).
5) Úsudek není platný (případ modu *celaront*); aby byl platný, muselo by být zaručeno, že vždy existují nějací sukničkáři.
6) Úsudek není platný – nějaký manžel může být přítulný.
7) Úsudek je platný (případ modu *darii*).
8) Úsudek je platný (případ modu *ferio*).
9) Úsudek není platný – nemusí existovat nějaký strojvůdce, který by byl zároveň pilotem.
10) Úsudek je platný (případ modu *cesare*).
11) Úsudek je platný (případ modu *cesare*).

12) Úsudek není platný – klidně je možné, že nějaký mimozemšťan je živočich.
13) Úsudek není platný (případ modu *cesaro*); aby byl platný, muselo by být zaručeno, že vždy existují nějací teroristé.
14) Úsudek je platný (případ modu *camestres*).
15) Úsudek není platný – nemusí existovat žádný člověk, který by kradl.
16) Úsudek není platný (případ modu *camestros*); aby byl platný, muselo by být zaručeno, že vždy existuje něco přesoleného.
17) Úsudek je platný (případ modu *festino*).
18) Úsudek není platný – klidně můžou existovat spořiví lidé, kteří nejsou sobečtí.
19) Úsudek je platný (případ modu *bocardo*).
20) Úsudek není platný (případ modu *darapti*); aby byl platný, muselo by být vždy zaručeno, že existuje máta.
21) Úsudek není platný – klidně může existovat kámen, který je nesmrtelný.
22) Úsudek je platný (případ modu *datisi*).
23) Úsudek je platný (případ modu *disamis*).
24) Úsudek není platný – je možné, že existuje cyklista, který je sice sportovcem, nicméně není lyžařem.
25) Úsudek není platný (případ modu *felapton*); aby byl platný, muselo by být vždy zaručeno, že existuje něco, co je mravenečník, následně by pak existovalo něco, co je hmyzožravcem.
26) Úsudek je platný (případ modu *ferison*).
27) Úsudek není platný – to, že nějací lidé jsou džentlmeni, není nutné.
28) Úsudek není platný (případ modu *bamalip*); aby byl platný, muselo by být zaručeno, že vždy existují nějací koně.
29) Úsudek je platný (případ modu *calemes*).
30) Úsudek není platný.
31) Úsudek není platný (případ modu *calemos*); muselo by totiž být zaručeno, že vždy existují nějací veselící se.
32) Úsudek je platný (případ modu *dimatis*).
33) Úsudek je platný (případ modu *barbara*).
34) Úsudek není platný (případ modu *fesapo*); muselo by totiž být zaručeno, že vždy existují nějaké piky, následně by existovaly nějaké karty.
35) Úsudek je platný (případ modu *fresison*).
36) Úsudek není platný – nemusí existovat žádný písničkář, který by byl zároveň žurnalistou.
37) Úsudek není platný.

38) Úsudek je platný (případ modu *baroco*).
39) Úsudek není platný.
40) Úsudek není platný – premisami není determinováno ani to, že někteří filosofové jsou lidmi, ani to, že někteří filosofové nejsou lidmi.

10.3 Cvičení – určování, který výrok vyplývá z premis (sylogismy)

Z uvedených možností a)–d) určete právě ten jeden výrok, který z daných premis vyplývá a je tak závěrem platného sylogismu:

1)

Všechny pravoúhelníky jsou čtyřstranné.
Všechny čtverce jsou pravoúhelníky.

---

a) Všechny čtverce jsou čtyřstranné.
b) Některé čtverce jsou čtyřstranné.
c) Žádné čtverce nejsou čtyřstranné.
d) Některé čtverce nejsou čtyřstranné.

2)

Žádné elipsy nemají strany.
Všechny kruhy jsou elipsy.

---

a) Všechny kruhy mají strany.
b) Některé kruhy mají strany.
c) Žádné kruhy nemají strany.
d) Některé kruhy nemají strany.

3)

Vše protivné je nepříjemné.
Některé tchýně jsou protivné.

---

a) Všechny tchýně jsou nepříjemné.
b) Některé tchýně jsou nepříjemné.
c) Žádné tchýně nejsou nepříjemné.
d) Některé tchýně nejsou nepříjemné.

4)

Žádný sympaťák není pobuda.
Někteří herci jsou sympaťáci.

---

a) Všichni herci jsou pobudové.
b) Někteří herci jsou pobudové.
c) Žádní herci nejsou pobudové.
d) Někteří herci nejsou pobudové.

5)

Všichni vojáci jsou v armádě.
Někteří piloti nejsou v armádě.

---

a) Všichni piloti jsou vojáci.
b) Někteří piloti jsou vojáci.
c) Žádní piloti nejsou vojáci.
d) Někteří piloti nejsou vojáci.

6)

Nic přehnané není odůvodněné.
Všechny nároky jsou odůvodněné.

---

a) Všechny nároky jsou přehnané.
b) Některé nároky jsou přehnané.
c) Žádné nároky nejsou přehnané.
d) Některé nároky nejsou přehnané.

7)

Každé těleso je hmotné.
Žádná idea není hmotná.

---

a) Každá idea je těleso.
b) Některá idea je těleso.
c) Žádná idea není těleso.
d) Některá idea není těleso.

8)

Žádní polárníci nejsou zimomřiví.
Někteří výzkumníci jsou zimomřiví.

---

a) Všichni výzkumníci jsou polárníci.
b) Někteří výzkumníci jsou polárníci.
c) Žádní výzkumníci nejsou polárníci.
d) Někteří výzkumníci nejsou polárníci.

9)

Někteří šachisté nejsou šampióni.
Všichni šachisté jsou hráči.

---

a) Všichni hráči jsou šampióni.
b) Někteří hráči jsou šampióni.
c) Žádní hráči nejsou šampióni.
d) Někteří hráči nejsou šampióni.

10)

Všechny obdélníky jsou pravoúhlé.
Některé obdélníky jsou rovnostranné.

---

a) Vše rovnostranné je pravoúhlé.
b) Něco rovnostranné je pravoúhlé.
c) Nic rovnostranné není pravoúhlé.
d) Něco rovnostranné není pravoúhlé.

11)

Někteří právníci jsou soudci.
Všichni právníci jsou vystudovaní.

---

a) Všichni vystudovaní jsou soudci.
b) Někteří vystudovaní jsou soudci.
c) Žádní vystudovaní jsou soudci.
d) Někteří vystudovaní nejsou soudci.

12)

Žádní modernisté nejsou postmodernisté.
Někteří modernisté jsou staromilci.

---

a) Všichni staromilci jsou postmodernisté.
b) Někteří staromilci jsou postmodernisté.
c) Žádní staromilci nejsou postmodernisté.
d) Někteří staromilci nejsou postmodernisté.

13)

Každý počítač je stroj.
Žádný stroj nemyslí.

---

a) Vše, co myslí, je počítač.
b) Něco, co myslí, je počítač.
c) Nic, co myslí, není počítač.
d) Něco, co myslí, není počítač.

14)

Některé rostliny jsou okrasné.
Vše okrasné je hezké.

---

a) Všechno hezké jsou rostliny.
b) Něco, co je hezké, jsou rostliny.
c) Nic hezké nejsou rostliny.
d) Něco, co je hezké, nejsou rostliny.

15)

Žádná práce není bez námahy.
Něco bez námahy je snadné.

---

a) Všechno snadné je práce.
b) Něco snadného je práce.
c) Nic snadného není práce.
d) Něco snadného není práce.

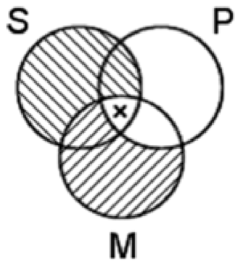
10.3 Řešení – určování, který výrok vyplývá z premis (sylogismy)

1) a) (jde o sylogismus modu barbara).
2) c) (jde o sylogismus modu celarent).
3) b) (jde o sylogismus modu darii).
4) d) (jde o sylogismus modu ferio).
5) d) (jde o sylogismus modu baroco).
6) c) (jde o sylogismus modu cesare).
7) c) (jde o sylogismus modu camestres).
8) d) (jde o sylogismus modu festino).
9) d) (jde o sylogismus modu bocardo).
10) b) (jde o sylogismus modu datisi).
11) b) (jde o sylogismus modu disamis).
12) d) (jde o sylogismus modu ferison).
13) c) (jde o sylogismus modu calemes).
14) b) (jde o sylogismus modu dimatis).
15) d) (jde o sylogismus modu fresison).

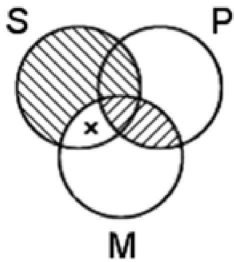
10.4 Cvičení – zjištění, který výrok vyplývá z premis (sylogismy s doplněním neprázdnosti)

V níže uvedených Vennových diagramech jsou zaznačeny dvě obecné premisy nějakých kategorických sylogismů. Křížek navíc značí neprázdnost příslušného termínu. Určete ten závěr, jenž je vždy tvaru QSP (kde Q je kvantifikátor a S a P predikáty), který z těchto premis vyplývá a formulujte ho obecně slovně (tj. „Všechna/Některá S jsou/nejsou P“). Tím, že je zajištěna neprázdnost, můžeme pracovat i s oslabenými mody sylogismů, jež ke své platnosti zajištění neprázdnost potřebují.

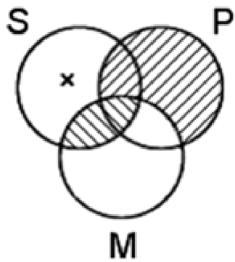
1)



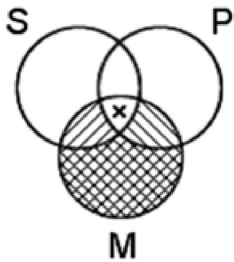
2)



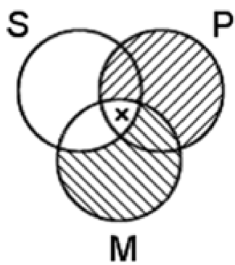
3)



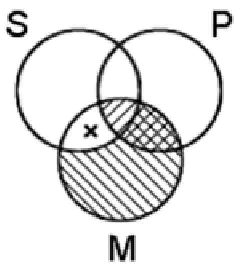
4)



5)



6)



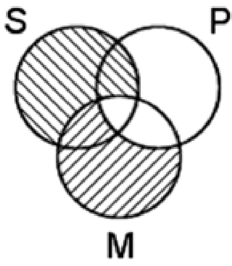
10.4 Řešení – zjištění, který výrok vyplývá z premis (sylogismy s doplněním neprázdnosti)

1) „Některá S jsou P“ (jde o případ modu barbari).
2) „Některá S nejsou P“ (jde o případ modu celaront nebo cesaro).
3) „Některá S nejsou P“ (jde o případ modu camestros nebo calemos).
4) „Některá S jsou P“ (jde o případ modu darapti).
5) „Některá S jsou P“ (jde o případ modu bamalip).
6) „Některá S nejsou P“ (jde o případ modu felapton nebo fesapo).

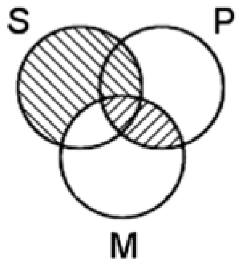
10.5 Cvičení – zjištění, který výrok vyplývá z premis (sylogismy)

V níže uvedených Vennových diagramech jsou zaznačeny premisy kategorických sylogismů (a to těch, u nichž nemusí být doplněna neprázdnost termínů). Určete závěr, jenž je vždy tvaru QSP (kde *Q* je kvantifikátor a S a P predikáty), který z těchto premis vyplývá, a formulujte ho obecně slovně (tj. „Všechna/Některá S jsou/nejsou P“):

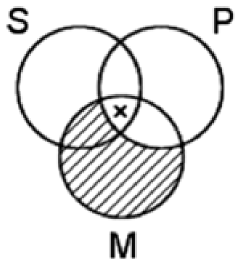
1)



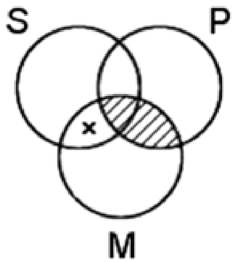
2)



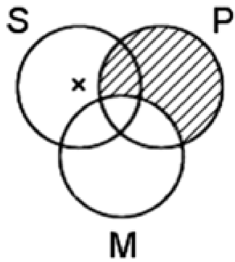
3)



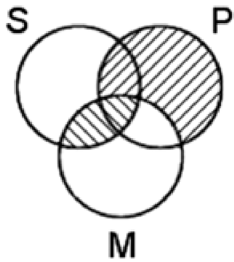
4)



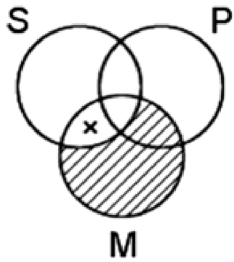
5)



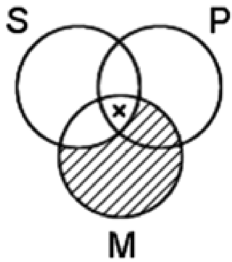
6)



7)



8)



10.5 Řešení – zjištění, který výrok vyplývá z premis (sylogismy)

1)	„Všechna S jsou P“	(jde o případ modu barbara).
2)	„Žádná S nejsou P“	(jde o případ modu celarent nebo cesare).
3)	„Některá S jsou P“	(jde o případ modu darii nebo datisi).
4)	„Některá S nejsou P“	(jde o případ modu ferio, ferison, festino nebo fresison).
5)	„Některá S nejsou P“	(jde o případ modu baroco).
6)	„Žádná S nejsou P“	(jde o případ modu camestres nebo calemes).
7)	„Některá S nejsou P“	(jde o případ modu bocardo).
8)	„Některá S jsou P“	(jde o případ modu disamis nebo dimatis).

10.6 Cvičení – ověřování platnosti úsudků, které nejsou sylogismy, Vennovými diagramy

Ověřte platnost následujících úsudků pomocí Vennových diagramů:

1)

Všichni lidé jsou smrtelní.
Všichni filosofové jsou lidé.
Sókratés je filosof.

Sókratés je smrtelný.

2)

Některé zuby jsou bílé.
Všechno bílé je krásné.

Něco bílého nejsou zuby.

3)

Všichni státníci jsou politiky.
Někteří státníci jsou inteligentní.
Někteří politici nejsou státníci.

Někteří politici nejsou inteligentní.

4)

Žádný materialista není objektivní idealista.
Žádný subjektivní idealista není materialista.

Někteří nejsou objektivními idealisty a zároveň nejsou subjektivními idealisty.

(Víceslovné označení „být objektivní idealista“ můžeme pro zjednodušení považovat za monadický predikát; podobně pro „být subjektivní idealista“.)

5)

Žádný narkoman není policista.
Každý dealer je narkoman.
Adam je dealer.

Adam není policista.

6)

Všichni učitelé jsou vychovatelé.
Všichni učitelé jsou vysokoškoláci.
Michal je učitel.

Někteří vychovatelé jsou vysokoškoláci.

10.6 Řešení – ověřování platnosti úsudků, které nejsou sylogismy, Vennovými diagramy

1) Úsudek je platný.
2) Úsudek není platný, závěr nevyplývá z premis – vyplývá věta „Některé zuby jsou krásné“.
3) Úsudek není platný.
4) Úsudek není platný. Úsudek by byl platný, kdyby bylo zaručeno, že vždy existují materialisté.
5) Úsudek je platný.
6) Úsudek je platný – tím, kdo je zároveň vychovatel a vysokoškolák, je přinejmenším Michal.

11. Vyplývání

Už výše v sekci 3.2.3 jsme si představili nejen intuitivní pojem vyplývání, ale i jeho rigorózní korelát, který jsme zároveň porovnali s pojmem logického důsledku. Nyní si připomeneme několik faktů o vyplývání z rámce VL, a pak si naše poznatky o vyplývání rozšíříme. Ukážeme si, jakým způsobem a z jakých důvodů neklasické logiky pojem vyplývání modifikují, resp. mění jeho extenzi.

Abychom pojem vyplývání v logice explikovali, odhlížíme od všeho, co je pro vyplývání nepodstatné, a proto namísto vět přirozených jazyků zkoumáme vztah vyplývání mezi formulemi určitého formálního jazyka. Překlad mezi přirozeným a formálním jazykem je však notnou měrou založen jednak na idealizaci (je odhlíženo od víceznačnosti jazykových vyjádření), jednak na abstrakci (je vypuštěno vše, co není nezbytné k vystižení vyplývání). K tématu překladu se vrátíme za chvíli.

Už v úvodu jsme si řekli, že intuitivní pojem vyplývání se spoléhá na nepříliš jasný pojem okolností, resp. nutnosti:

Vyplývání (intutivní pojem)

Věta V *vyplývá* z vět V_1, V_2, ..., V_n právě tehdy, když V je pravdivá za všech okolností (tedy nutně), za nichž jsou pravdivé rovněž věty V_1, V_2, ..., V_n.

Víme, že v rámci VL lze exaktně, tj. rigorózně přesně, vyjádřit pojem okolností, jež způsobují pravdivost, a to prostřednictvím pojmu valuace:

Výrokově-logické vyplývání

Výrokově-logická formule A *výrokově-logicky vyplývá* z výrokově-logických formulí A_1, A_2, ..., A_n právě tehdy, když A je pravdivá při každé valuaci, při níž jsou pravdivé všechny výrokově-logické formule A_1, A_2, ..., A_n.

Také víme, že v rámci PL lze exaktně vyjádřit pojem okolností, jež způsobují pravdivost, jinak než ve VL, a to prostřednictvím pojmu interpretace:

Vyplývání

Formule A *vyplývá* z formulí A_1, A_2, ..., A_n právě tehdy, když A je pravdivá v každé interpretaci, při níž jsou pravdivé všechny formule A_1, A_2, ..., A_n.

V obou případech je tedy ve hře poněkud odlišný pojem pravdivosti – jednou jsou relevantním faktorem valuace, podruhé interpretace. Už jsme řekli, že s vyplýváním si vystačíme i v bohatších logických systémech, než PL; pojem interpretace byl totiž koncipován dostatečně obecně.

Vyplývání (vč. VL-vyplývání) se týká určitých formulí určitého formálního jazyka, tedy určité logiky (VL, PL, modální logiky, ...). Vztah vyplývání mezi formulemi je v těchto logikách jednoznačně dán. Nezávisle na tom existuje intuitivní a ne vždy zcela jednoznačně určitelné vyplývání mezi větami přirozeného jazyka. Při překladu, tedy *logické analýze přirozeného jazyka* prostředky určité logiky, dochází k explikaci intuitivního pojmu vyplývání tím či oním způsobem. Vlastně tím ztotožňujeme určitou nejednoznačnou relaci vyplývání, jež se projevuje v přirozeném jazyce, s určitou jednoznačnou relací ve VL, PL či jiném logickém systému.

Víme, že při překladu se nám mohou ze zřetele ztratit určité instance této relace. Ztotožníme-li například intuitivní vyplývání s VL-vyplýváním, instance jako třeba ⟨{„Každý člověk je smrtelný.“, „Sókratés je člověk.“}, „Sókratés je člověk.“⟩ bude vypuštěna z vyplývání, poněvadž této konkrétní dvojici ⟨premisy, závěr⟩ odpovídá dvojice $\langle\{p,q\},r\rangle$, která není instancí relace VL-vyplývání. Vidíme tedy, že překlad z přirozeného jazyka do formálního, tedy vlastně explikace významů výrazů přirozeného jazyka prostředky formální logiky, má netriviální důsledky.

Abstrakce od věcí nepodstatných pro vyplývání zase vede k tomu, že výrazy jazyka jsou rozděleny na výrazy z hlediska vyplývání relevantní a nerelevantní. Prvé skupině výrazů se říká *logické výrazy*, druhé skupině *mimologické výrazy*. Například slůvka „a“, „nebo“, anebo „každý“ patří do skupiny logických výrazů. To jsou slova, která mají v logických systémech koreláty, totiž jejich logické explikáty jako $\wedge$, $\vee$, $\forall$ (těmto všem se někdy říká *logické pojmy*).

Mimologické výrazy patří do skupiny slov z hlediska vyplývání nepodstatných, jediné, co nás na nich zajímá, je jejich vzájemná odlišnost a popřípadě též jejich skladebnost, resp. schopnost skladebnosti. VL třeba odlišuje věty jednoduché a složené, přičemž ty jednoduché od sebe odlišuje pomocí znaků „p_1“, „p_2“, …, „p_n“; abstrahuje při tom jak od jejich významů, tak od jejich pravdivosti. PL činí podobné, u predikátů ovšem kromě vzájemné odlišnosti rozpoznává ještě jejich aritu (a obor aplikability).

To, co je získáváno z nějaké věty přirozeného jazyka při tomto překladu, je jen její *logická forma*. Ta vznikne tím, že logické výrazy jsou nahrazeny jejich exaktními koreláty a mimologická slova jsou nahrazena de facto metajazykovými proměnnými (u zájmen jsou to dokonce pravé proměnné). Zde je ilustrativní příklad. Výrazy v prostředních řádcích jsou průběžně vznikající produkty abstrakce-překladu, poslední řádek obsahuje výslednou formuli PL:

„Vše,	je-li	to	živé,	hýbe se	to.“
„Vše,	je-li	to	…,	…	to.“
$\forall x$	$\rightarrow$	x	Ž	H	x
$\forall x$	(Ž	(x)	$\rightarrow$	H	(x))

Idea logické formy se opírá o myšlenku, že to logicky podstatné na zkoumané větě je shodné s tím, co je logicky podstatné například také na větě „Vše, je-li kousavé, tak je to štěně“. Od obsahu slov „živé“ či „kousavé“ totiž můžeme abstrahovat. Můžeme místo nich dát jakákoli jiná mimologická slova a z hlediska logiky budeme uvažovat stále tutéž logickou strukturu, jež se podílí na vyplývání. V následujících odstavcích si ukážeme, jak je toto klasické pojetí logické formy poněkud modifikováno.

Nejprve si ukážeme případy, kdy abstrakce od významu, resp. od *intenze*, jazykových predikátů, tedy to, že jsou pojednávány jako logicky vzato neutrální, vede k nesprávnému určení platnosti úsudků. Jim odpovídající formální úsudek totiž nebude platný, ač jejich jazykový korelát ano (lze najít i opačné případy). Zde je konkrétní příklad:

A je vyšší než B.	V(a,b)
B je nižší než A.	N(b,a)

PL totiž chápe dané věty, a tedy i příslušné predikáty, jako tzv. *intenzionálně nezávislé*, mohou mít tedy libovolné *extenze* (rozsahy). Například je to interpretace $\Im(V)=\{\langle\alpha,\beta\rangle\}$, $\Im(N)=\{\cancel{\langle\beta,\alpha\rangle}\}$, která ukazuje, že daný formální úsudek (úsudková forma) je neplatný. Jazykový úsudek ale platný je: význam predikátu „(být) vyšší než (někdo)“ je vztažen k významu predikátu „(být) nižší než (někdo)“.

Pojem *analytického vyplývání* se týká právě těchto případů, kdy něco vyplývá z něčeho při fixovaných významových vztazích daného přirozeného jazyka. Formální vyjádření těchto vztahů nazval Rudolf Carnap *významové postuláty* (angl. „meaning postulates“; objev náleží Johnu Kemenymu). V našem příkladu je významovým postulátem $\forall x \forall y\ (V(x,y) \leftrightarrow N(y,x))$. Dodržení významového postulátu by tedy vedlo k interpretaci respektující intuitivní význam, totiž např. $\mathfrak{I}'(V)=\{\langle\alpha,\beta\rangle\}$, $\mathfrak{I}'(N)=\{\langle\beta,\alpha\rangle\}$. (Další takové příklady úsudků sestavíme třeba s dvojicemi obratů jako např. „starý mládenec“–„neženatý muž“, srov. úsudek „Všichni staří mládenci jsou přitažliví. Tudíž všichni neženatí muži jsou přitažliví“.)

Pamatujme si tedy, že ačkoli nějaká věta vyplývá z jiných vět analyticky, nevyplývá ještě logicky. Při (logickém) vyplývání totiž abstrahujeme od významu specificky českých slov jako například „vyšší“ a „nižší“, resp. jejich významových vazeb, a netraktujeme je jako nějaká logická slova.

Výše uvedená neschopnost analyzovat takovéto úsudky, v nichž jsou evokovány intenze, jež jsou na sebe navázány, není jediná daň za abstrakci od *intenzí* (tedy od toho, co významově predikáty znamenají, totiž od vlastností a vztahů). Klasická PL se omezila jen na práci s *extenzemi* predikátů (tj. s extenzemi vlastností a vztahů). Analogicky pro jiné druhy výrazů. Toto omezení na extenze je vidět z toho, že predikátové symboly interpretujeme jakožto znamenající rovnou ty či jiné množiny individuí. Pro případ vět: intenzemi vět jsou propozice, kdežto jejich extenzemi jsou pravdivostní hodnoty.

V důsledku diskutovaného omezení na extenze výrazů neumí klasická logika zachytit platnost nemalé skupiny úsudků, v nichž intenze figurují. Zde jsou tři příklady, začneme následujícím sylogismem:

Síra je žlutá.
Žlutá je barva.

Síra je barva.

Pro správné vystižení neplatnosti tohoto úsudku je zapotřebí odlišit žlutost jako vlastnost aplikovanou na individua, jež jsou sírou, a žlutost jako entitu, která se řadí mezi barvy. Jinými slovy, výraz „žlutá“ se v úsudku vyskytuje ve dvou rozdílných supozicích, referuje k různým věcem, a konkluze pak vznikla na základě ekvivokace. Přitom se však zdá nezbytné postulovat vlastnosti, což je ale proti duchu PL1.

Podobný závazek k vlastnostem by mělo plausibilní vysvětlení následujícího úsudku, který ve svém závěru přes vlastnosti explicitně kvantifikuje:

Bedřich má rád svou ženu.	$\exists y\,(\check{Z}(y,b)\wedge R(b,y))$
Karel ji má rád také.	$R(k,?)$
Bedřich a Karel mají společnou vlastnost.	$\exists ?\,(\mathrm{M\acute{i}t}(b,?)\wedge \mathrm{M\acute{i}t}(k,?))$

S určitým zjednodušením bychom mohli k formalizaci daného úsudku využít logiku tříd obohacenou o λ-operátor, tedy PL vyššího řádu (srov. níže kapitolu 18.). Vlastnost ‚mít rád svou ženu' bychom pak modelovali jako $\lambda x\ \exists y\ (\check{Z}(y,x) \wedge R(x,y))$, tedy jako určitou třídu. Načež první premisa by byla vlastně výsledkem aplikace této třídy na b. Podstatnější je, že v závěru by se vyskytovala proměnná pro třídy, v jejímž oboru by mohla být právě $\lambda x\ \exists y\ (\check{Z}(y,x) \wedge R(x,y))$, což ale v klasické PL bez λ-operátoru není možné. Další obtíž tkví v tom, že v daném úsudku může být ve skutečnosti řeč o vlastnosti reprezentovatelné pomocí $\lambda x\ \exists y\ (\check{Z}(y,\mathrm{b}) \wedge R(x,y))$, tj. že Bedřich má rád Karlovu ženu.

Třetí příklad obsahuje bohatě diskutované věty o *propozičních postojích* (angl. „propositional attitudes“):

Anna se domnívá, že v Paříži prší.	$D(a,?)$
V Paříži neprší.	$\neg P$
Anna se domnívá něco nepravdivého.	$\exists ?\ (D(a,?) \wedge \neg \mathrm{Pravdivý}(?))$

V případě tohoto úsudku vyvolává pochyby už analýza druhé premisy pomocí nulárního (vzácně nazýváno: medadického) predikátového symbolu P. Námi však bude diskutována až potíž, že na místech označených „?“ nemůže stát výraz, jehož přímou sémantickou hodnotou je pravdivostní hodnota. Musí tam stát propozice, tedy intenze vnořené věty „v Paříži prší“; v závěru je pak zapotřebí proměnná pro propozice. Agent totiž nemá postoj k pravdivostní hodnotě té věty, jež mu ani nemusí být známa, ale k jí vyjadřované propozici.

Jak si povšiml již Frege, v druhé premise vystupuje věta „v Paříži prší“ jakožto referující přímo na svou pravdivostní hodnotu. Příslušný větný *kontext* nazval *přímý* (něm. „gerade“, angl. „direct“, ale používá se i průhledný, angl. „transparent“), kdežto kontext výskytu věty v první premise *nepřímý* (něm. „ungerade“, angl. „oblique“, ev. neprůhledný, angl. „opaque“). V současnosti se běžně používá označení *extenzionální* / *intenzionální kontext*. (Fregeho teorie o smyslu a významu, „Sinn“ a „Bedeutung“, což jsou de facto intenze a extenze, je stručně diskutována v kapitole 16. Identita.)

Často proponovaným řešením těchto potíží ve druhé polovině 20. st. je přijmutí intenzí jakožto přímých sémantických hodnot výrazů, tedy *intenzionální sémantika.* Samotné intenze nakonec bývají reprezentovány různě, obvykle se však přitom zachovává, že výraz má kromě intenze ještě i extenzi, takže sémantika je složitá buď z důvodu, že v daném kontextu má výraz tu či onu sémantickou hodnotu, anebo má v každém kontextu na různé úrovni významu hodnoty obě.

Tzv. *hyperintenzionální sémantika* si pak všímá toho, že ani běžně užívaný model intenzí, jakožto funkcí z možných světů nedokáže vysvětlit nuance, jež jdou strukturálně za tyto intenze. Jinými slovy, modelovat význam například všech matematických vět jakožto jednu jedinou funkci z možných světů do pravdivostní hodnoty Pravda je příliš hrubé. Tento model totiž neodstíní sémantický rozdíl třeba mezi „1+1=2“ a Fermatovým teorémem „$\forall x \forall y \forall z \forall n ((x^n+y^n=z^n)\rightarrow(n<3))$“. Agent může mít postoj k sémantickému obsahu jedné věty, aniž by měl postoj k sémantickému obsahu druhé věty. Následující úsudek je tedy intuitivně vzato neplatný, ač podle konvencionální intenzionální logiky užívající pojem možného světa platný je:

Xenie ví, že 1+1=2.

Xenie ví, že $\forall x \forall y \forall z \forall n ((x^n+y^n=z^n)\rightarrow(n<3))$

Postulováním hyperintenzí, jež jsou s to adekvátně vystihnout odlišnosti významu logicky ekvivalentních výrazů, komplikuje hyperintenzionální sémantika a logika interpretaci (formálních) výrazů ještě více, než intenzionální sémantika a logika. Jenže vyhnout se takovýmto úsudkům by znamenalo vyhnout se exaktnímu určení platnosti jazykových úsudků v dostatečné šíři.

Neklasických logických systémů je celá řada, zde je nebudeme všechny představovat, ani vyjmenovávat (srov. alespoň „Úvod do logiky: klasická výroková logika“). Prakticky všechny tyto logiky vznikly ve snaze lépe vystihnout intuitivní pojem vyplývání. V následujícím výkladu zmíníme okruhy známých logik a logických systémů, jež se snaží rozšířit oblast kontrolovatelných jazykových úsudků podobnými postupy.

Pro první okruh si připomeňme početnou skupinu neklasických logik, které jsou relativně konzervativním rozšířením klasické VL nebo PL, neboť se vydaly cestou dílčího obohacení množiny logických výrazů. Už z prvního dílu této knihy víme, že například *modální logika* je VL nebo PL obohacená o exaktní korelát slov jako „nutně“ nebo „možná“, *epistemická logika* o exaktní korelát slov jako „ví“ či „domnívá se“, *deontická logika* zase o „povinné“ apod. (Obor modálních či epistemických logik je ovšem rozlehlý a zasahuje i mimo naznačené oblasti.) Další neklasické logiky zase rozšiřují oblast formalizovatelných výrazů, například *erotetická logika* přináší rozšíření o otázky. Specificky na podkladu modální PL je stavěna *temporální logika*, jež umí modelovat slovesné časy a časová označení jako např. „předtím“, „1. 1. 1977“ (srov. tak běžné úsudky jako „Záruka končí 31. 12. 2014. Dnes je 1. 2. 2015. Tudíž záruka již skončila.“).

Další neklasické logiky se vydaly cestou hlubší revize principů klasické logiky. Například *trojhodnotová logika* připouští oznamovací věty, jejichž pravdivostní hodnota není jasná (např. věty o budoucnosti „Zítra bude námořní bitva", nerozhodnutelné věty jako „Král Francie je holohlavý", „3÷0 je sudé číslo"). Další *vícehodnotové logiky*, zvláště pak *fuzzy logika*, se vydaly i směrem k obohacení o logické modely slov jako „hodně", „středně málo". Vlastně tím značně revidují Princip dvouhodnotovosti (bivalence), tedy omezení se na (nejvýše) dvě pravdivostní hodnoty.

Nakonec zmíníme už jen jeden okruh neklasických logik. V nich dochází primárně ke korekcím vlastností klasického pojmu vyplývání. Už v předchozí knize jsme zmiňovali *relevanční logiku* snažící se revidovat vztah mezi vyplýváním a (materiální) implikací. Na úrovni důkazových technik pak nacházíme obdobu v *substrukturálních logikách*. Ideově příbuzné snahy přináší *nemonotónní logiky*. Ty se rozcházejí s klasickým požadavkem monotónnosti vyplývání (definici viz záhy níže), protože zohledňují *nemonotónní usuzování* (angl. „non-monotonic reasoning"). Zde je motivační příklad:

Typičtí ptáci létají.
Tweety je pták.

Tweety létá.

Tento úsudek je běžně chápán jako platný. Je-li vyplývání monotónní, tak obohatíme-li množinu premis o další premisu, závěr bude stále vyplývat. Jenže jakmile do našeho příkladu přidáme premisu „Tweety je tučňák", závěr zjevně vyplývat přestane.

Připomeňme si zde trojici známých vlastností klasického pojmu vyplývání, mezi nimiž je monotónnost. Nechť $\mathrm{Cn}(\Gamma)$ je množina sémantických důsledků množiny formulí Γ, čili $\mathrm{Cn}(\Gamma)$ je množina všech formulí, jež vyplývají z Γ:

i. *monotónnost* vyplývání: jestliže $\Gamma \subseteq \Delta$, tak $\mathrm{Cn}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Cn}(\Delta)$, čili vyplývá-li A z $A_1, A_2, ..., A_n$, tak A vyplývá i z množiny obsahující $A_1, A_2, ..., A_n$ a nějakou další formuli B
ii. *reflexívnost* vyplývání: $\Gamma \subseteq \mathrm{Cn}(\Gamma)$, čili jestliže A je jednou z $A_1, A_2, ..., A_n$, tak A vyplývá z $A_1, A_2, ..., A_n$
iii. *tranzitivita* vyplývání: $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Cn}(\Gamma)$, čili důsledky důsledků Γ jsou také důsledky Γ, tj. jestliže $A_1, A_2, ..., A_n \vDash A$ a $B_1, B_2, ..., B_n, A \vDash A'$, tak $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n, A \vDash A'$.

Další příklady úsudků, které jsou pro klasickou logiku obtížné a motivují její případné revize (např. *parakonzistentní logiku*), tvoří některé *sémantické paradoxy*. Ty využívají věty, jejichž pravdivostní hodnota je v daném kontextu těžko určitelná (např. „Tato věta je nepravdivá“). V nedávné době byl například znovuobjeven a modernizován *paradox platnosti* (angl. „paradox of validity“):

1+1=2.

Tento úsudek není platný.

Z tzv. Jourdainova lhářského paradoxu zase můžeme sestavit tento podivný úsudek:

Závěr toho úsudku je nepravdivý.

Premisa toho úsudku je pravdivá.

Z implikace v tzv. Löbově paradoxu můžeme sestavit následující zlomyslný úsudek:

Tento úsudek je platný.

Každý úsudek je platný.

11.1 Cvičení – vyplývání

1) Uveďte definici (logického) vyplývání.

2) Vysvětlete rozdíl mezi vyplýváním v intuitivním smyslu, výrokově-logickým vyplýváním a (logickým) vyplýváním.

3) Zdůvodněte, proč analytické vyplývání není (logickým) vyplýváním.

4) Vysvětlete, proč jsou navrhovány neklasické logiky. Uveďte ilustrativní příklady.

12. Interpretace formulí

Při interpretaci formulí PL vycházíme z definice interpretace v sekci 3.2 „Sémantika PL“. Pro názornost budeme interpretovat většinou formule, které odpovídají větám přirozeného jazyka.

Pokud budeme interpretovat term, který je vlastně proměnná, tak namísto „$\mathfrak{I}(x)[e]$“ budeme psát jednodušeji „$e(x)$“, v případě konstant zase jednoduše „$\mathfrak{I}(\mathrm{c})$“. Pokud budeme zkoumat uzavřenou formuli, budeme rovnou uvádět její pravdivost/nepravdivost, tj. $\mathfrak{I}(A)$, nikoli pravdivost/nepravdivost při ohodnocení, tj. nikoli $\mathfrak{I}(A)[e]$.

Škrtnutím znaku alfabety jako např. „$\cancel{\alpha}$“ (ev. dvojice $\cancel{\langle\alpha,\beta\rangle}$) níže značíme, že dané individuum (ev. dvojice individuí) nenáleží do interpretace určitého predikátového symbolu. Pokud to nebude určeno jinak, nechť vždy U={α,β,γ}.

12.1 Příklady – interpretace jednoduchých formulí s monadickými predikáty

Následující věty přirozeného jazyka formalizujte prostředky PL a získané formule interpretujte tak, aby byly a) pravdivé, b) nepravdivé. Rozdílné interpretace téže formule odlišme apostrofem, např. $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I}''$. Podstata úkolu tkví v tom, že vhodně interpretujeme konstanty (jsou-li jaké) a hlavně predikátové symboly. Pokud není stanoveno jinak, nechť U={α,β,γ} a $e(x)$=γ.

1)

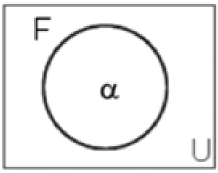
Aristotelés je filosof.
F(a)

Nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\}$ a $\Im(a)=\alpha$.

a) Formule je pravdivá, pokud individuum Aristotelés, tj. α, patří do množiny filosofů, čili když $\Im(a)\in\Im(F)$. Schematicky:

$$\Im(F)=\{\alpha,\ldots\}.$$

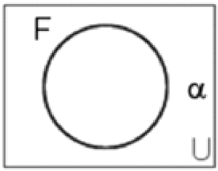
Graficky:



b) Formule je nepravdivá, pokud Aristotelés nepatří do množiny filosofů, tj. $\Im'(a)\notin\Im'(F)$, čili patří do doplňku množiny filosofů, tj. $\Im'(b)\in\Im'(F^C)$. Schematicky:

$$\Im'(F)=\{\cancel{\alpha},\ldots\}.$$

Graficky:



Kde přesně se nacházejí ostatní individua z U není v obrázku určeno. Analogicky níže.

2)

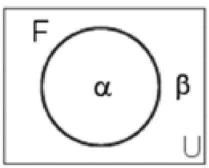
Aristotelés je filosof, ale Bedřich nikoli.

$F(a) \wedge \neg F(b)$

Nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma,...\}$ a $\Im(a)=S(a)=\alpha$, $\Im(b)=S(b)=\beta$.

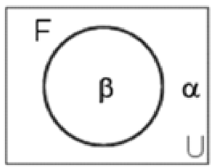
a) Formule je pravdivá, pokud Aristotelés do množiny filosofů patří, kdežto Bedřich nikoli. Čili když $\Im(a)\in\Im(F)$, kdežto $\Im(b)\notin\Im(F)$, neboli $\Im(b)\in\Im(F^C)$:

$\Im(F)=\{\alpha,\cancel{\beta}\}$
$\Im(F(a))=1$



b) Formule je nepravdivá, pokud buď Aristotelés nepatří do množiny filosofů, nebo Bedřich do ní patří. Zde si navrhneme interpretaci, podle níž neplatí ani jedno z toho. Takže Bedřich náleží do F, tj. $\Im'(b)\in\Im'(F)$, kdežto Adam nikoli, čili $\Im'(a)\notin\Im'(F)$, neboli $\Im'(a)\in\Im'(F^C)$:

$\Im'(F)=\{\cancel{\alpha},\beta\}$
$\Im'(F(a))=0$



3)

Někdo není filosof. (= Někteří nejsou filosofy.)

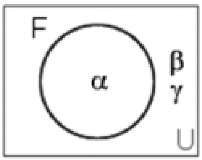
$\exists x \neg F(x)$

a) Formule je pravdivá, pokud alespoň jedno individuum nenáleží do množiny filosofů, čili když $\Im(F)$ je vlastní podmnožinou U, tj. $\Im(F) \subset U$. Například:

$$\Im(F)=\{\alpha\}, \text{ čili } \Im(F) \neq U \text{ (tj. } \Im(F) \subset U)$$

(Jiný příklad interpretace: $\Im''(F)=\emptyset$.) Interpretace celé formule je vypočítána vzhledem k pozměněným ohodnocením e', dvakrát přitom bude přiřazena kvantifikované formuli $\neg F(x)$ pravdivostní hodnota 1, což v důsledku vede k tomu, že $\Im(\exists x \neg F(x))=1$.

$\exists x \neg F(x)$
  0 1 α
  1 0 β
  1 0 γ
1

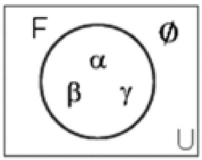


b) Formule je nepravdivá výlučně při využití krajní možnosti, jíž je, že všechna individua z U náleží do množiny filosofů:

$$\Im'(F)=U$$

V důsledku toho bude při jakémkoli ohodnocení e' vždy $\Im'(F(x))[e']=1$, následně pak vždy $\Im'(\neg F(x))[e']=0$, v důsledku čehož $\Im'(\exists x \neg F(x))=0$.

$\exists x \neg F(x)$
  0 1 α
  0 1 β
  0 1 γ
0



4)

Každý je filosof. (= Všichni jsou filosofy.)

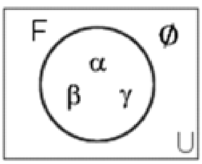
$\forall x\ F(x)$

a) Formule je pravdivá, pouze pokud všechna individua z U patří do množiny filosofů, tedy když $\Im(F)$ je nevlastní podmnožinou U:

$\Im(F)=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, čili $\Im(F)=U$.

Podformule $F(x)$ je otevřená a tak je $\Im(F(x))[e]$ podmíněna ohodnocením e, přičemž při daném ohodnocení $\Im(F(x))[e]=1$. Ovšem protože celá formule je uzavřená, zjišťujeme rovněž pravdivostní hodnoty při všech ostatních ohodnoceních e' pro kvantifikátorem vázanou proměnou x. Protože však při všech z nich $\Im(F(x))[e']=1$, tak $\Im(\forall x F(x))=1$.

$\forall x\ F(x)$
 1 α
 1 β
 1 γ
1

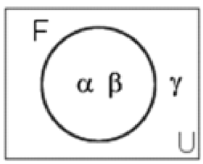


b) Formule je nepravdivá, pokud alespoň jedno individuum z U nepatří do množiny $\Im'(F)$, tedy $\Im'(F)$ je vlastní podmnožinou U, tj. $\Im'(F)\subset U$. Například:

$\Im'(F)=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, čili $\Im'(F)\neq U$.

Interpretace podformule $F(x)$ je nepravdivá už při daném ohodnocení (připomeňme si, že $e(x)=\gamma$), $\Im'(F(x))[e]=0$. Z tohoto si už dovodíme, že celá uzavřená formule je také nepravdivá, $\Im'(\forall x F(x))=0$.

$\forall x\ F(x)$
 1 α
 1 β
 0 γ
0



a') Jiná interpretace, při níž by tato formule byla také pravdivá, neexistuje.

b') Formule je nepravdivá i v dalších případech. Například při krajní možnosti, kdy interpretací F je ∅, tj. $\Im''(F)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\cancel{\gamma}\}$.

12.2 Cvičení – interpretace jednoduchých formulí s monadickými predikáty

Pro dané formule navrhněte požadovaný druh interpretace – interpretujte tedy zejména predikátový symbol dané formule. Nechť U={α,β,γ}.

1)
Navrhněte takovou interpretaci formule ¬F(b) (jež je formalizací např. výroku „Bedřich není filosof"), při níž je tato formule pravdivá.
2)
Navrhněte takovou interpretaci formule $\exists x\ \neg F(x)$ (jež je formalizací např. výroku „Někdo není filosof"), při níž je tato formule pravdivá.
3)
Navrhněte takovou interpretaci formule $\forall x\ F(x)$ (jež je formalizací např. výroku „Všichni jsou filosofy"), při níž je tato formule nepravdivá.
4)
Navrhněte takovou interpretaci formule $\exists x\ F(x)$ (jež je formalizací např. výroku „Někdo je filosof"), při níž je tato formule nepravdivá.
5)
Navrhněte takovou interpretaci formule $\forall x\ \neg F(x)$ (jež je formalizací např. výroku „Nikdo není filosof"), při níž je pravdivá.

12.2 Řešení – interpretace jednoduchých formulí s monadickými predikáty

1) Například $\Im(F)=\{\alpha,\cancel{\beta}\}$ při $\Im(b)=\beta$.
2) Například $\Im(F)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\cancel{\gamma}\}=\emptyset$; jiný příklad: $\Im'(F)=\{\cancel{\alpha},\beta\}$.

3) Například $\Im(F)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\cancel{\gamma}\}=\emptyset$; jiný příklad: $\Im'(F)=\{\cancel{\alpha},\beta\}$.
4) Jedině $\Im(F)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\cancel{\gamma}\}=\emptyset$.
5) Jedině $\Im(F)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\cancel{\gamma}\}=\emptyset$.

12.3 Příklady – interpretace formulí logického čtverce

Výroky spadající pod logický čtverec formalizujte prostředky PL a získané formule interpretujte tak, aby byly a) pravdivé, b) nepravdivé. Uvažujme stále $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ (třeba N. Armstrong, F. Borman, J. Gagarin).

Připomeňme si, že šrafy či křížky v obrázku vyznačují podmínku pravdivosti dané formule; při interpretaci formule jakožto pravdivé / nepravdivé se snažíme o shodu / neshodu s touto podmínkou pravdivosti.

1)

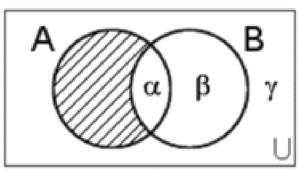
Každý astronaut je bezchybný.
$\forall x\,(A(x)\rightarrow B(x))$

a) Formule říká, že každé individuum, je-li v množině A, tak je i v množině B. Takže formule je pravdivá, pokud ani jeden prvek množiny A nebude takový, že by nepatřil do množiny B. Například:

$\Im(A)=\{\alpha\}$
$\Im(B)=\{\alpha,\beta\}$, čili $\Im(A)\subseteq\Im(B)$

V důsledku této interpretace predikátových symbolů, bude-li při nějakém ohodnocení e platit $\Im(A(x))[e]=1$, tak i $\Im(B(x))[e]=1$. Pokud však bude $\Im(A(x))[e]=0$, tak $\Im(B(x))[e]=1$ nebo $\Im(B(x))[e]=0$. Takže při každém ohodnocení e platí $\Im(A(x)\rightarrow B(x))[e]=1$. Proto pak $\Im(\forall x(A(x)\rightarrow B(x)))=1$.

$\forall x$	$(A(x)$	$\rightarrow$	$B(x))$
	1 α	1	1 α
	0 β	1	1 β
	0 γ	1	0 γ
1			



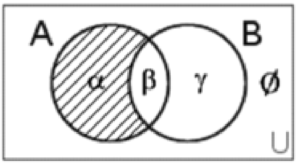
Šrafy v obrázku vyznačují podmínku pravdivosti dané formule a naše interpretace tedy správně neumístila žádné individuum do vyšrafované části.

b) Aby formule byla nepravdivá, alespoň v jednom řádku příslušné tabulky hodnot (‚sloupečků') musí být $1 \rightarrow 0$:

$\mathfrak{I}''(A)=\{\alpha,\beta\}$
$\mathfrak{I}''(B)=\{\beta,\gamma\}$

Pro alespoň jednu ohodnocení x, jmenovitě $e(x)=\alpha$, platí, že $\mathfrak{I}''(A(x))[e]=1$ a $\mathfrak{I}''(B(x))=0$, načež $\mathfrak{I}''(A(x)\rightarrow B(x))=0$. Proto $\mathfrak{I}''(\forall x(A(x)\rightarrow B(x)))=0$.

$\forall x$	$(A(x)$	$\rightarrow$	$B(x))$
	$1\ \alpha$	0	$0\ \alpha$
	$1\ \beta$	1	$1\ \beta$
	$0\ \gamma$	1	$1\ \gamma$
0			



Interpretace je tedy v rozporu s podmínkou pravdivosti, neboť klade nějaké individuum tam, kde při pravdivosti formule žádné individuum být nesmí (daná oblast je šrafována).

2)

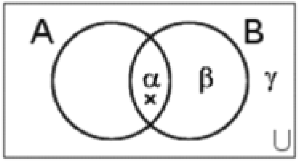
Někteří astronauti jsou bujaří.
$\exists x\ (A(x)\wedge B(x))$

a) Formule říká, že alespoň jedno individuum je v množině A i v množině B. Stačí proto, aby alespoň v jednom řádku byla 1 (čili $1\wedge 1$), aby celá formule byla 1. Například tedy:

$\mathfrak{I}(A)=\{\alpha\}$
$\mathfrak{I}(B)=\{\alpha,\beta\}$, čili $\mathfrak{I}(A)\cap\mathfrak{I}(B)\neq\emptyset$

Pro alespoň jedno ohodnocení x, totiž $e(x)=\alpha$, platí $\mathfrak{I}(A(x))[e]=1$ a $\mathfrak{I}(B(x))[e]=1$, takže pak $\mathfrak{I}(A(x)\wedge B(x))[e]=1$. Proto $\mathfrak{I}(\exists x(A(x)\wedge B(x)))=1$.

$\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$
$\quad 1\,\alpha \quad 1 \quad 1\,\alpha$
$\quad 0\,\beta \quad 1 \quad 1\,\beta$
$\quad 0\,\gamma \quad 1 \quad 0\,\gamma$
1

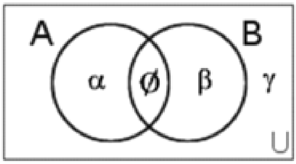


b) Aby formule byla nepravdivá, tak musí být každý řádek roven 0, nebude tedy existovat žádný společný prvek množin A a B:

$\Im''(A)=\{\alpha\}$
$\Im''(B)=\{\beta\}$, čili $\Im''(A)\cap\Im''(B)=\emptyset$

Protože pak při všech ohodnoceních e platí, že $\Im''(A(x)\wedge B(x))[e]=0$, tak $\Im''(\exists x(A(x)\wedge B(x)))=0$.

$\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$
$\quad 1\,\alpha \quad 0 \quad 0\,\alpha$
$\quad 0\,\beta \quad 0 \quad 1\,\beta$
$\quad 0\,\gamma \quad 0 \quad 0\,\gamma$
0



3)

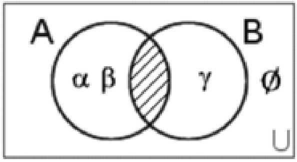
Žádný astronaut není bojácný.
$\forall x\ (A(x)\rightarrow\neg B(x))$

a) Formule říká, že ani jedno x, které je prvkem množiny A, není v množině B. Takže formule je pravdivá, pokud ani jeden řádek nebude 0:

$\Im(A)=\{\alpha,\beta\}$
$\Im(B)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\gamma\}$, čili $\Im(A)\cap\Im(B)=\emptyset$

Takto pokud $\Im(A(x))[e]=1$, tak $\Im(B(x))[e]=0$ a tedy $\Im(\neg B(x))[e]=1$. Pokud $\Im(A(x))[e]=0$, tak $\Im(B(x))[e]=1$ a tedy $\Im(\neg B(x))[e]=0$. Takže při jakémkoli ohodnocení e platí $\Im(A(x)\rightarrow B(x))[e]=1$. Proto $\Im(\forall x(A(x)\rightarrow\neg B(x)))=1$.

$\forall x\, (A(x) \rightarrow \neg\, B\, (x))$
$1\,\alpha \quad 1 \quad 1 \;\; 0\,\alpha$
$1\,\beta \quad 1 \quad 1 \;\; 0\,\beta$
$0\,\gamma \quad 1 \quad 0 \;\; 1\,\gamma$
1

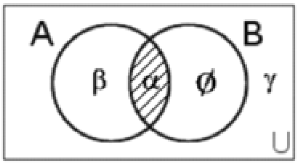


b) Formule je nepravdivá, pokud alespoň jeden řádek bude 0, což je tehdy, když alespoň jeden prvek množiny A bude zároveň prvkem množiny B:

$\Im''(A)=\{\alpha,\beta\}$
$\Im''(B)=\{\alpha\}$, čili $\Im''(A)\cap\Im''(B)\neq\emptyset$

Jestliže ohodnocení *e* přiřadí proměnné *x* individuum α, tak bude $\Im''(A(x))[e]=1$ a $\Im''(B(x))[e]=1$ a tedy $\Im''(\neg B(x))[e]=0$. Takže platí, že $\Im''(\forall x(A(x)\rightarrow\neg B(x)))=0$.

$\forall x\, (A(x) \rightarrow \neg\, B\, (x))$
$1\,\alpha \quad 0 \quad 0 \;\; 1\,\alpha$
$1\,\beta \quad 1 \quad 1 \;\; 0\,\beta$
$0\,\gamma \quad 1 \quad 1 \;\; 0\,\gamma$
0



4)

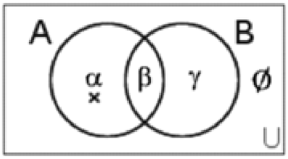
Někteří astronauti nejsou blíženci.
$\exists x\, (A(x)\wedge\neg B(x))$

a) Formule je pravdivá, když alespoň jedno individuum je v A, ale přitom není v B:

$\Im(A)=\{\alpha,\beta\}$
$\Im(B)=\{\beta,\gamma\}$, čili $\Im(A)\cup\Im(B)\neq\Im(B)$, tj. mj. $\Im(A)\neq\emptyset$

Takto pro α coby ohodnocení *x* bude $\Im(A(x))[e]=1$ a $\Im(B(x))[e]=0$, takže $\Im(\neg B(x))[e]=1$. Takže alespoň při jednom ohodnocení *e* bude $\Im(A(x)\wedge\neg B(x))$ $[e]=1$, proto $\Im(\exists x(A(x)\wedge\neg B(x)))=1$.

$\exists x\ (A(x) \wedge \neg\ B\ (x))$
$\quad 1\,\alpha \quad 1\ 1\ 0\ \ \alpha$
$\quad 1\,\beta \quad 0\ 0\ 1\ \ \beta$
$\quad 0\,\gamma \quad 0\ 0\ 1\ \ \gamma$
1

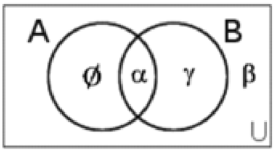


b) Formule je nepravdivá, pokud každý prvek množiny A bude prvkem množiny B. Pokud totiž žádný řádek nebude roven 1, bude celá formule 0:

$\Im''(A)=\{\alpha\}$
$\Im''(B)=\{\alpha,\gamma\}$, čili $\Im''(A)\cup\Im''(B)=\Im''(B)$

Takto pro určitou hodnotu x bude platit buďto $\Im''(A(x))[e]=1$ a $\Im''(\neg B(x))[e]=0$, anebo $\Im''(A(x))[e]=0$ a $\Im''(\neg B(x))[e]=1$ nebo $\Im''(\neg B(x))[e]=0$. Takže při všech ohodnoceních bude $\Im''(A(x)\wedge\neg B(x))[e]=0$. Proto $\Im''(\exists x\ (A(x)\wedge\neg B(x)))=0$.

$\exists x\ (A(x) \wedge \neg\ B(x))$
$\quad 1\,\alpha \quad 0\ 0\ 1\ \ \alpha$
$\quad 0\,\beta \quad 0\ 1\ 0\ \ \beta$
$\quad 0\,\gamma \quad 0\ 0\ 1\ \ \gamma$
0



12.4 Cvičení – interpretace formulí logického čtverce

Níže uvedené výroky logického čtverce a jejich přímé negace formalizujte prostředky PL. Získané formule interpretujte tak, aby byly a) pravdivé, b) nepravdivé. Uvažujme jen $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$:

1)
Všechna A jsou B.

2)
Některá A jsou B.

3)
Žádná A nejsou B.

4)
Některá A nejsou B.
5)
Není pravda, že některá A nejsou B.
6)
Není pravda, že žádná A nejsou B.
7)
Není pravda, že některá A jsou B.
8)
Není pravda, že všechna A jsou B.

12.4 Řešení – interpretace formulí logického čtverce

Své výsledky 1)–4) konfrontujte s příklady 12.3. Pro 5)–8) platí stejné možnosti interpretace predikátových symbolů jako popořadě pro 1)–4).

12.5 Příklady – interpretace formulí s binárními predikáty

Věty přirozeného jazyka formalizujte prostředky PL a získané formule interpretujte tak, aby byly a) pravdivé, b) nepravdivé. Pokud není uvedeno jinak, nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma,\mu,\pi\}$; dále $e(x)=\beta$, $e(y)=\alpha$, $\Im(\mathrm{m})=\mu$, $\Im(\mathrm{p})=\pi$.

1)

Magda má ráda Petra.
R(m,p)

a) Formule je pravdivá, pokud dvojice ⟨Magda,Petr⟩ patří do množiny dvojic individuí, která jsou ve vztahu R:

$\mathfrak{I}(R)=\{\langle\mu,\pi\rangle,\ldots\}$

R (m,p)
1 μ π

b) Formule je nepravdivá, pokud dvojice ⟨Magda,Petr⟩ nepatří do množiny dvojic individuí ve vztahu R:

$\mathfrak{I}(R)=\{\cancel{\langle\mu,\pi\rangle},\ldots\}$

R (m,p)
0 μ π

2)

Magda má ráda někoho.
$\exists x\, R(m,x)$

a) Formule je pravdivá, pokud mezi páry individuí, která se mají ráda (jsou tedy vztažena relací R) je alespoň jeden pár takový, že jejím prvním členem je Magda. Například:

$\mathfrak{I}(R)=\{\langle\mu,\alpha\rangle\}$, čili $\mathfrak{I}(R)\neq\emptyset$

$\exists x$ R (m,x)
1 μ α
0 μ β
0 μ γ
0 μ μ
0 μ π
1

b) Formule je nepravdivá, pokud μ není ve vztahu R ani k jednomu individuu, jež je hodnotou *x*. Tedy například když:

$\mathfrak{I}(R)=\{\cancel{\langle\mu,\alpha\rangle},\cancel{\langle\mu,\beta\rangle},\cancel{\langle\mu,\gamma\rangle},\cancel{\langle\mu,\mu\rangle},\cancel{\langle\mu,\pi\rangle},\langle\alpha,\beta\rangle\}$

$\exists x$ R (m,x)
0 μ α
0 μ β
0 μ γ
0 μ μ
0 μ π
0

3)

Někdo má rád někoho.
$\exists x \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$

Nechť U={α,β,γ}.

a) Formule je pravdivá, pokud existuje alespoň jeden pár individuí, která jsou spolu v relaci R. Například:

$\Im(\mathrm{R})=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\beta\rangle\}$,
čili $\Im(\mathrm{R})\neq\emptyset$

$\exists x \exists y\ \mathrm{R}\ (x,y)$

0	α	α
1	α	β
0	α	γ
0	β	α
1	β	β
0	β	γ
0	γ	α
0	γ	β
0	γ	γ

1

b) Formule je nepravdivá, pokud není ani jeden pár individuí, která jsou spolu v relaci R. Tedy jedině když:

$\Im(\mathrm{R})=\{\cancel{\langle\alpha,\alpha\rangle},\cancel{\langle\alpha,\beta\rangle},\cancel{\langle\alpha,\gamma\rangle},\cancel{\langle\beta,\alpha\rangle},$
$\cancel{\langle\beta,\beta\rangle},\cancel{\langle\beta,\gamma\rangle},\cancel{\langle\gamma,\alpha\rangle},\cancel{\langle\gamma,\beta\rangle},\cancel{\langle\gamma,\gamma\rangle}\}$,
čili $\Im(\mathrm{R})=\emptyset$

$\exists x \exists y\ \mathrm{R}\ (x,y)$

0	α	α
0	α	β
0	α	γ
0	β	α
0	β	β
0	β	γ
0	γ	α
0	γ	β
0	γ	γ

0

4)

Někdo má rád každého.
$\exists x \forall y\ R(x,y)$

Nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

a) Formule je pravdivá, pokud alespoň jedno individuum je takové, že je v relaci R ke každému individuu. Například:

$\Im(R)=\{\langle\beta,\alpha\rangle,\langle\beta,\beta\rangle,\langle\beta,\gamma\rangle\}$

$\exists x \forall y$	R	(x,y)
	0	$\alpha\ \alpha$
	0	$\alpha\ \beta$
	0	$\alpha\ \gamma$
	1	$\beta\ \alpha$
	1	$\beta\ \beta$
	1	$\beta\ \gamma$
	0	$\gamma\ \alpha$
	0	$\gamma\ \beta$
	0	$\gamma\ \gamma$
1		

b) Formule je nepravdivá, pokud neexistuje ani jedno individuum, které je v relaci R ke každému individuu. Například:

$\Im(R)=\{\langle\beta,\alpha\rangle,\langle\beta,\gamma\rangle\}$

$\exists x \forall y$	R	(x,y)
	0	$\alpha\ \alpha$
	0	$\alpha\ \beta$
	0	$\alpha\ \gamma$
	1	$\beta\ \alpha$
	0	$\beta\ \beta$
	1	$\beta\ \gamma$
	0	$\gamma\ \alpha$
	0	$\gamma\ \beta$
	0	$\gamma\ \gamma$
0		

5)

Každý má rád někoho.
$\forall x \exists y\ R(x,y)$

Nechť U={α,β,γ}.

a) Formule je pravdivá, pokud pro všechna jednotlivá individua platí, že je v relaci R k alespoň jednomu individuu. Například:

$\Im(R)=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\gamma\rangle,\langle\gamma,\beta\rangle\}$

$\forall x \exists y\ R\ (x,y)$

0	α	α
1	α	β
0	α	γ
0	β	α
0	β	β
1	β	γ
0	γ	α
1	γ	β
0	γ	γ

1

b) Formule je nepravdivá, pokud neplatí, že každé individuum je v relaci R k alespoň jednomu individuu. Například:

$\Im(R)=\{\cancel{\langle\alpha,\beta\rangle},\langle\beta,\gamma\rangle,\langle\gamma,\beta\rangle\}$

$\forall x \exists y\ R\ (x,y)$

0	α	α
0	α	β
0	α	γ
0	β	α
0	β	β
1	β	γ
0	γ	α
1	γ	β
0	γ	γ

0

12.6 Cvičení – interpretace formulí s binárním predikátem

Níže uvedené výroky formalizujte prostředky PL. Získané formule interpretujte tak, aby byly a) pravdivé, b) nepravdivé. Uvažujme jen U={α,β,γ}, $e(x)=\beta$, $e(y)=\alpha$, $\Im(a)=\alpha$.

1)
Někdo má rád Annu.

2)
Nikdo nemá rád nikoho.

3)
Každý má rád každého.

4)
Někdo má rád každého.

5)
Každý má rád někoho.

12.6 Řešení – interpretace formulí s binárním predikátem

Řešení úkolů 4)–5) srov. s řešeními v příkladech 12.5.

1) $\exists x$ R(x,a)

a) Formule je pravdivá, pokud Anna je tím, k němuž je alespoň jedno individuum v relaci R, tedy má Annu rádo. Například:

$\Im(R)=\{\langle\gamma,\alpha\rangle\}$

$\exists x$ R (x,a)		
0	α	α
0	β	α
1	γ	α
1		

b) Formule je pravdivá, pokud neexistuje individuum, které by mělo Annu rádo. Tedy jedině když:

$\Im(R)=\emptyset$

$\exists x$ R (x,a)		
0	α	α
0	β	α
0	γ	α
0		

2) $\forall x \forall y\ \neg R(x,y)$

a) Formule je pravdivá, pouze pokud pro všechna *x* a pro všechna *y* platí, že k sobě nejsou vztaženy relací R:

$\Im(R)=\emptyset$

$\forall x \forall y$	$\neg$	R	(x,y)
	1	0	$\alpha\ \alpha$
	1	0	$\alpha\ \beta$
	1	0	$\alpha\ \gamma$
	1	0	$\beta\ \alpha$
	1	0	$\beta\ \beta$
	1	0	$\beta\ \gamma$
	1	0	$\gamma\ \alpha$
	1	0	$\gamma\ \beta$
	1	0	$\gamma\ \gamma$
1			

b) Formule je nepravdivá, pokud alespoň jedna dvojice individuí je k sobě vztažena relací R. Například:

$\Im(R)=\{\langle\alpha,\beta\rangle\}$, čili $\Im(R)\subseteq U^2$

$\forall x \forall y$	$\neg$	R	(x,y)
	1	0	$\alpha\ \alpha$
	0	1	$\alpha\ \beta$
	1	0	$\alpha\ \gamma$
	1	0	$\beta\ \alpha$
	1	0	$\beta\ \beta$
	1	0	$\beta\ \gamma$
	1	0	$\gamma\ \alpha$
	1	0	$\gamma\ \beta$
	1	0	$\gamma\ \gamma$
0			

3) Řešení je stejné jako pro příklad 2), ovšem s tím, že interpretace v 2.b) je pro případ pravdivosti a interpretace v 2.a) je pro případ nepravdivosti.

12.7 Příklady – interpretace rozmanitých formulí

1)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\Im(P)=\{\beta\}$,

navrhněte takové ohodnocení, při níž bude pravdivá formule:

$P(x)$.

$P(x)$ je otevřenou formulí, neboť jediný výskyt její jediné proměnné je volný. Bude proto při dané interpretaci predikátového symbolu P pravdivá jen tehdy, když $e(x)=\beta$. Při všech jiných ohodnoceních bude nepravdivá.

2)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\Im(P)=\{\beta,\gamma\}$,
$\Im(b)=\beta$,

zjistěte pravdivost následující formule:

$P(x)\wedge P(b)$.

Nejprve je třeba stanovit ohodnocení pro x. Jestliže $e(x)=\beta$ nebo $e(x)=\gamma$, tak při takovém ohodnocení e bude daná formule v této interpretaci $\Im$ pravdivá, tj. $\Im(P(x)\wedge P(b))[e]=1$. Jestliže však $e(x)=\alpha$, $\Im(P(x)\wedge P(b))[e]=0$.

3)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\Im(R)=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\beta\rangle\}$,

zjistěte pravdivost formule:

$\exists y\, R(x,y)$.

Tato formule je otevřená, a proto je její pravdivost odvislá od ohodnocení e pro volnou proměnnou x. Jestliže $e(x)=\alpha$, tak $\Im(\exists y R(x,y))[e]=1$, protože existuje alespoň jedna dvojice obsahující α jako první člen, jmenovitě $\langle\alpha,\beta\rangle$, která je prvkem $\Im(R)$. Podobně pro $e(x)=\beta$. V případě $e(x)=\gamma$ toto splněno není, takže

$\Im(\exists y R(x,y))[e]=0.$

4)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,

zjistěte pravdivostní hodnotu formule:

$\forall x\, P(x) \rightarrow P(x).$

Lze zjistit, že daná formule je logicky pravdivá, tj. pravdivá v každé interpretaci. Pro každou interpretaci $\Im$ takovou, že $\Im(P) \neq U$, platí, že antecedent je 0 a tím pádem při jakémkoli ohodnocení *e* platí, že daná formule je pravdivá. Zbývá už jen interpretace $\Im'(P)=U$, jenže při ní je sice antecedent 1, nicméně konsekvent nemůže být při žádném ohodnocení *e* nepravdivý, takže i při této interpretaci je daná formule pravdivá.

5)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\Im(R)=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\beta\rangle,\langle\gamma,\alpha\rangle\}$,

zjistěte pravdivost následující formule:

$\forall x\, R(x,y).$

Lze zjistit, že ani při jednom ohodnocení *e* není daná formule pravdivá. Například při $e(y)=\beta$ neplatí, že by všechny prvky U byly k β vztaženy relací R. Aby tomu tak bylo, muselo by být např. $\Im(R)=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\beta\rangle,\langle\gamma,\beta\rangle\}$.

6)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\Im(P)=\{\alpha\}$, $\Im(Q)=\{\beta\}$,

zjistěte pravdivost formule:

$\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$.

Jedná se o formuli tvaru implikace, nejdříve proto zjistíme pravdivostní hodnoty jejích členů. Protože však antecedent má hodnotu $\underline{0}$ (podtržení je zde uváděno jen pro lepší orientaci), tak výsledná hodnota je 1.

$\forall x\, P(x)$	$\to$	$\exists x\, Q(x)$
1 α		0 α
0 β		1 β
$\underline{0}$		$\underline{1}$
	1	

7)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\Im(P)=\{\alpha,\beta\}$, $\Im(R)=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\alpha,\gamma\rangle\}$,

zjistěte pravdivost formule:

$\exists x\, (P(x) \land \forall y\, \neg R\, (x,y))$.

Při vyhodnocování takovýchto formulí je třeba myslet na to, že je-li například hodnotou x individuum α, tak formule $P(x)$ nabývá pravdivostní hodnotu, kterou lze snadno vypočíst, ale v případě $\forall y\, \neg R\, (x,y))$ musíme projít celé univerzum a otestovat každé y na to, zda splňuje danou formuli. Podstatné při tomto je, že hodnota x je zafixována, je to v tuto chvíli α. Analogicky pro další hodnoty x. Zde je vyhodnocení celé formule při všech ohodnoceních:

$$\exists x\, (\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\, \neg \mathrm{R}\, (x{,}y))$$

$$\begin{array}{lll}
1\ \alpha & \underline{0}\ 0 & \left\{\begin{array}{ll} 1\,0 & \alpha\,\alpha \\ 0\,1 & \alpha\,\beta \\ 0\,1 & \alpha\,\gamma \end{array}\right. \\
1\ \beta & \underline{1}\ 1 & \left\{\begin{array}{ll} 1\,0 & \beta\,\alpha \\ 1\,0 & \beta\,\beta \\ 1\,0 & \beta\,\gamma \end{array}\right. \\
0\ \gamma & \underline{0}\ 1 & \left\{\begin{array}{ll} 1\,0 & \gamma\,\alpha \\ 1\,0 & \gamma\,\beta \\ 1\,0 & \gamma\,\gamma \end{array}\right.
\end{array}$$

1

8)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\Im(\mathrm{P})=\{\alpha,\beta\}$, $\Im(\mathrm{Q})=\{\beta,\gamma\rangle\}$,

zjistěte pravdivost formule:

$$\forall x \exists y\, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(y)).$$

Také v tomto případě musíme pravdivostní hodnotu celé formule vypočíst s ohledem na vzájemnou souhru hodnot proměnných. Tentokrát bude tabulka hodnot pod formulí vypadat takto:

$$\forall x \exists y\, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(y))$$

$$\begin{array}{lcl}
1\ \alpha & 0 & 0\ \alpha \\
1\ \alpha & 1 & 1\ \beta \\
1\ \alpha & 1 & 1\ \gamma \\
1\ \beta & 0 & 0\ \alpha \\
1\ \beta & 1 & 1\ \beta \\
1\ \beta & 1 & 1\ \gamma \\
0\ \gamma & 1 & 0\ \alpha \\
0\ \gamma & 1 & 1\ \beta \\
0\ \gamma & 1 & 1\ \gamma
\end{array}$$

1

Formule je pravdivá proto, že ke každému *x* existuje nějaké *y*, jež splňuje danou podmínku. To znamená, že pro každou trojici řádků jako třeba α-α-α (toto je psáno ve sloupečku), musí být pod → pravdivostní hodnota 1, tj. k danému individuu jako α existuje nějaké vhodné *y* (pro α je to splněno hned dvakrát, viz 0-1-1 pod →). Srov. též následující příklad.

9)

Je-li dáno:

$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,
$\mathfrak{I}(P)=\{\alpha,\beta\}$, $\mathfrak{I}(Q)=\{\beta,\gamma\rangle\}$,

zjistěte pravdivost formule:

$$\exists x \forall y\ (P(x) \rightarrow Q(y)).$$

Podobně jako v minulém případě budeme mít následující tabulku hodnot:

$\exists x \forall y$	$(P(x)$	$\rightarrow$	$Q(y))$
	1 α	0	0 α
	1 α	1	1 β
	1 α	1	1 γ
	1 β	0	0 α
	1 β	1	1 β
	1 β	1	1 γ
	0 γ	1	0 α
	0 γ	1	1 β
	0 γ	1	1 γ
1			

Formule je pravdivá, protože tu je alespoň jedno individuum *x*, jmenovitě γ, k němuž jsou všechna *y* v souvislosti, jež je popsána formulí $P(x) \rightarrow Q(y)$.

10)

V zájmu srovnání 8) a 9) nechť opět U={α,β,γ}, $\Im$(P)={α,β}, $\Im$(Q)={β,γ}. Mějme formule:

$\forall x \forall y$ (P(x)		→		Q(y))
1	α	0	0	α
1	α	1	1	β
1	α	1	1	γ
1	β	0	0	α
1	β	1	1	β
1	β	1	1	γ
0	γ	1	0	α
0	γ	1	1	β
0	γ	1	1	γ
0				

$\exists x \exists y$ (P(x)		→		Q(y))
1	α	0	0	α
1	α	1	1	β
1	α	1	1	γ
1	β	0	0	α
1	β	1	1	β
1	β	1	1	γ
0	γ	1	0	α
0	γ	1	1	β
0	γ	1	1	γ
1				

Formule $\forall x \forall y$ (P(x)→Q(y)) je nepravdivá proto, že ke všem x nejsou všechna y taková, jak popisuje P(x)→Q(y), což se pozná z toho, že pod → nejsou samé jedničky. Formule $\exists x \exists y$ (P(x)→Q(y)) by zas byla pravdivá i tehdy, kdyby byla jednička pod → jen jedinkrát.

13. Ověřování, zda je formule logicky pravdivá metodou protipříkladu

Už v rámci VL jsme se seznámili s několika metodami zjišťování, zda je daná formule tautologií. Zvláště jsme procvičovali *metodu protipříkladu*, jež je založena na tom, že daná výrokově-logická formule není tautologií, pokud existuje alespoň jedno ohodnocení, při němž je daná formule nepravdivá. Metoda protipříkladu v prostředí PL je přímou analogií: daná formule PL není logicky pravdivá, pokud existuje alespoň jedna interpretace, při níž je daná formule nepravdivá.

Metoda protipříkladu je vlastně důkaz sporem. To znamená, že naším východiskem je předpoklad, že něco neplatí. Pokud se tento předpoklad o neplatnosti nepodaří potvrdit – protože důsledek daného předpokladu vede ke sporu, předpoklad neplatí. V našem případě to znamená, že neexistuje interpretace, při níž je daná formule nepravdivá.

Zde je ilustrace takového důkazu. Zápis jako „1: $\neg A$“ znamená, že interpretací formule $\neg A$ je pravdivostní hodnota 1 (popř. „0: A“ znamená, že A je nepravdivá):

1.	0: $\neg A \rightarrow (B \vee \neg A)$	
2.	1: $\neg A$	důsledek kroku 1. na základě definice $\rightarrow$
3.	0: $(B \vee \neg A)$	důsledek kroku 1. na základě definice $\rightarrow$
4.	0: A	důsledek kroku 2. na základě definice $\neg$
5.	0: B	důsledek kroku 3. na základě definice $\vee$
6.	0: $\neg A$	důsledek kroku 3. na základě definice $\wedge$
7.	1: A	důsledek kroku 6. na základě definice $\neg$

Protože tu je spor mezi kroky 4. a 7., neplatí předpoklad důkazu sporem, totiž krok 1. Takže protože daná formule nemůže být nepravdivá, což předpokládal důkaz sporem, je logicky pravdivá.

Takovýto důkaz jsme v rámci VL reprezentovali distribucí příslušných pravdivostních hodnot do postupně vznikajících řádků, přičemž každá pravdivostní hodnota byla pod tou podformulí, jíž je v průběhu úvah přiřazena. Pokud došlo k tomu, že by určité podformuli v důsledku prosazování předpokladu důkazu sporem náležely dvě pravdivostní hodnoty, tento spor byl demonstrován tím, že dané dvě pravdivostní hodnoty byly zapsány tučným řezem. V rámci PL by tento způsob nebyl výhodně použitelný, proto volíme až způsob, který je ukázán v následujících příkladech.

13.1 Příklady – ověřování, zda je formule logicky pravdivá metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda je daná formule logicky pravdivá. Pomocí $\Im(\varphi)=1$ nebo $\Im(\varphi)=0$ budeme značit, že interpretace prověřované formule je 1 nebo 0.

1)

Jako vzorový příklad si ověříme logicky pravdivou formuli, kterou proslavil Raymond M. Smullyan jakožto formalizaci intuitivně jistě nikoli logicky pravdivé věty:

Existuje alespoň jedno individuum takové, že když pije, tak pijí všichni.

Zde je daná formule (pro lepší názornost píšeme *y*, ač bychom mohli *y* korektně přejmenovat na *x*):

$$\exists x\, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall y\, \mathrm{P}(y))$$

1. Předpokládejme, že celá formule φ (jak ji budeme značit) je nepravdivá, tj. $\Im(\varphi)=0$.
2. Aby $\Im(\varphi)=0$, tak nesmí existovat individuum x takové, že by byla pravdivou otevřená formule za $\exists$, čili musí být $\Im(\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall y\, \mathrm{P}(y))[e]=0$ při jakémkoli ohodnocení e.
3. Nechť $\mathrm{U}=\{\alpha,\beta\}$; pak tu jsou dvě různá ohodnocení $e_1(x)=\alpha$ a $e_2(x)=\beta$, při nichž je $\Im(\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall y \mathrm{P}(y))[e]=0$:

	$(\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall y\, \mathrm{P}(y))$
e_1:	*0*
e_2:	*0*

4. Při e_1 má interpretace celé formule vypadat třeba takto:

$$
\begin{array}{llll}
(P(x) & \to & \forall y & P(y)) \\
\underline{1}\ \alpha & & & 1\ \alpha \\
 & & & 0\ \beta \\
 & & \underline{0} & \\
 & \mathit{0} & &
\end{array}
$$

Uvědomme si, že *0* celé této formule je výsledkem aplikace → na $\underline{1}$ a $\underline{0}$. Pravdivostní hodnota $\underline{1}$ je důsledkem předpokladu sporem a vede tedy k tomu, že $\Im(P)=\{\alpha,...\}$, neboli $\alpha\in\Im(P)$. Pravdivostní hodnota $\underline{0}$ je také důsledkem předpokladu sporem a vede k tomu, že aspoň jedno individuum nesmí být v interpretaci P, tj. $\Im(P)\neq U$. Zjevně když $\alpha\in\Im(P)$, jak jsme přijali před chvílí, tak tím individuem, které není v $\Im(P)$, je β. Čili $\Im(P)=\{\alpha,\cancel{\beta}\}$. Náš předpoklad důkazu sporem jsme tedy ve větvi zpracovávající e_1 prosadili.

5. Při prosazování předpokladu důkazu sporem uděláme v případě větve s e_2 zcela obdobnou věc jako v bodě 4. Aby při e_2 platilo, že interpretace dané formule je 0, tak musí být při tomto ohodnocení $\Im(P(x))[e_2]=\underline{1}$. To obnáší, že $\Im(P)=\{\beta,...\}$, neboli $\beta\in\Im(P)$. Aby přitom $\Im(\forall y P(y))=\underline{0}$, tak musí být $\Im(P)=\{\cancel{\alpha},\beta\}$.

$$
\begin{array}{llll}
(P(x) & \to & \forall y & P(y)) \\
\underline{1}\ \beta & & & 0\ \alpha \\
 & & & 1\ \beta \\
 & & \underline{0} & \\
 & \mathit{0} & &
\end{array}
$$

Náš předpoklad důkazu sporem jsme tedy prosadili i ve větvi zpracovávající e_2.

6. Jenže interpretace P v bodech 4. a 5. jsou zjevně neslučitelné, $\{\alpha,\cancel{\beta}\}\neq\{\cancel{\alpha},\beta\}$, je tu spor. Obě interpretace byly přitom důsledkem předpokladu v 1., že daná formule není logicky pravdivá. To tedy dohromady znamená, že daná formule logicky pravdivá je.

2)

Samozřejmě neexistuje nikdo, kdo by měl tu moc, že když se napije, že by začali pít i všichni ostatní. Tuto skutečnost však popíšeme výrokem:

Jestliže platí, že existuje někdo, kdo pije, tak platí, že pijí všichni.

jehož formalizací je (namísto *y* mohlo klidně být *x*):

$$\exists x\ P(x) \rightarrow \forall y\ P(y)$$

To je rozdíl proti výše v 1) uváděné logicky pravdivé větě „Existuje alespoň jedno individuum takové, že když pije, tak pijí všichni".

Interpretovat právě uvedenou formuli φ tak, aby byla nepravdivá a tedy dokázat, že není logicky pravdivá, není obtížné.

1. Aby $\Im(\varphi)=0$, tak musí kvůli vlastnostem → platit $\Im(\exists x P(x))=1$ a zároveň $\Im(\forall y P(y))=0$. Nechť $U=\{\alpha,\beta\}$.
2. Aby $\Im(\exists x P(x))=1$, tak například $\Im(P)=\{\alpha\}$.
3. Aby $\Im(\forall y P(y))=0$, tak $\Im(P)\neq U$, takže například $\Im(P)=\{\alpha\}$.
4. Demonstrovali jsme tedy, že existuje interpretace, při níž je daná formule nepravdivá, takže formule logicky pravdivá není.

3)

Nyní ověříme, zda je logicky pravdivá následující formule:

$$(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \rightarrow \forall x\ (A(x) \vee B(x))$$

1. Daná formule φ není logicky pravdivá, pokud existuje interpretace taková, že $\Im(\varphi)=0$.
2. Aby $\Im(\varphi)=0$, tak vzhledem k vlastnostem → musí platit (viz příslušný bod sémantiky PL pro formule složené pomocí →), že $\Im(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))=1$ a $\Im(\forall x(A(x) \vee B(x)))=0$.
3. Aby $\Im(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))=1$, tak $\Im(\forall x A(x))=1$ nebo $\Im(\forall x B(x))=1$; celkem jsou tři případy. Abychom se vyhnuli prošetřování všech tří větví, zkusíme hledat interpretaci pro A a B teprve až po zjištění možnosti, že $\Im(\forall x(A(x) \vee B(x)))=0$.
4. Aby $\Im(\forall x(A(x) \vee B(x)))=0$, tak musí existovat individuum, které je mimo množiny A a B. Když $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, tak například mějme $\Im(A)=\{\alpha\}$ a $\Im(B)=\{\beta\}$, čili γ není ani v množině A, ani v B. Takže když $e(x)=\gamma$, tak při tomto *e* platí, že $\Im(A(x) \vee B(x))[e]=0$ a tedy $\Im(\forall x(A(x) \vee B(x)))=0$.
5. Jenže když existuje individuum γ, které není ani v množině A, ani v množině B, tak $\Im(\forall x A(x))=0$ a $\Im(\forall x B(x))=0$, takže $\Im(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))=0$. Ale my jsme chtěli, aby $\Im(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))=1$. To by ale muselo být např. $\Im(\forall x A(x))=1$, což by však znamenalo, že $\Im(A)=U$.

6. Demonstrovali jsme tedy, že interpretace taková, kdy by antecedent zkoumané φ byl 1 a konsekvent zkoumané φ byl 0, by byla sporná, čili neexistuje. Daná φ je tudíž logicky pravdivá.

4)

Nyní prověříme opačný směr implikace právě ověřené logicky pravdivé formule, totiž formuli φ:

$$\forall x\,(\mathrm{A}(x) \vee \mathrm{B}(x)) \rightarrow (\forall x\,\mathrm{A}(x) \vee \forall x\,\mathrm{B}(x))$$

1. Daná φ není logicky pravdivá, pokud existuje interpretace taková, že $\mathfrak{I}(\varphi)=0$.
2. Aby $\mathfrak{I}(\varphi)=0$, tak $\mathfrak{I}(\forall x(\mathrm{A}(x)\vee \mathrm{B}(x)))=1$ a $\mathfrak{I}(\forall x\mathrm{A}(x)\vee\forall x\mathrm{B}(x))=0$.
3. Aby $\mathfrak{I}(\forall x(\mathrm{A}(x)\vee \mathrm{B}(x)))=1$, tak $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{U}$. Uvažme $\mathrm{U}=\{\alpha,\beta\}$. Je víc možností, kdy je splněno $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{U}$, například $\mathrm{A}=\mathrm{U}$. S ohledem na nepravdivost konsekventu dané φ si ale vybereme možnost $\mathfrak{I}(\mathrm{A})=\{\alpha\}$, $\mathfrak{I}(\mathrm{B})=\{\beta\}$.
4. Aby $\mathfrak{I}(\forall x\mathrm{A}(x)\vee\forall x\mathrm{B}(x))=0$, tak ani $\mathfrak{I}(\mathrm{A})$, ani $\mathfrak{I}(\mathrm{B})$ není rovno U. Takže navrhujeme $\mathfrak{I}(\mathrm{A})=\{\alpha\}$ a $\mathfrak{I}(\mathrm{B})=\{\beta\}$.
5. Našli jsme tedy interpretaci takovou, že $\mathfrak{I}(\varphi)=0$, takže daná φ není logicky pravdivá.

5)

Ověřme, zda je logicky pravdivá formule:

$$\exists x\forall y\,\mathrm{R}(x,y) \rightarrow \forall y\exists x\,\mathrm{R}(x,y)$$

1. Daná formule φ není logicky pravdivá, pokud existuje $\mathfrak{I}$ taková, že $\mathfrak{I}(\varphi)=0$, tj. antecedent φ je 1 a konsekvent φ je 0.
2. Aby $\mathfrak{I}(\exists x\forall y\mathrm{R}(x,y))=1$, tak při $\mathrm{U}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ mějme například $\mathfrak{I}(\mathrm{R})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle,\langle\alpha,\gamma\rangle\}$, čili jedno individuum, jmenovitě α je ve vztahu R ke všem individuím.
3. Aby $\mathfrak{I}(\forall y\exists x\mathrm{R}(x,y))=0$, tak nesmí platit, že všechna individua jsou taková, že existuje individuum x, které je k nim ve vztahu R. Takže například $\mathfrak{I}(\mathrm{R})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\cancel{\langle\alpha,\gamma\rangle}\}$. (Kdyby $\mathfrak{I}(\mathrm{R})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\alpha,\gamma\rangle\}$, tak by $\mathfrak{I}(\forall y\exists x\mathrm{R}(x,y))\neq 0$.)
4. Žádná interpretace taková, že $\mathfrak{I}(\varphi)=0$, tudíž neexistuje, daná φ je tedy logicky pravdivá.

6)

Ověřme, zda je logicky pravdivá prakticky stejná formule jako v minulém případě, ovšem mající opačný směr implikace:

$$\forall y \exists x\, \mathrm{R}(x,y) \rightarrow \exists x \forall y\, \mathrm{R}(x,y)$$

Není však těžké najít interpretaci, při níž je tato formule nepravdivá. Antecedent je totiž pravdivý, i když je interpretace R takováto: $\Im(\mathrm{R})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle\}$. Všechny prvky našeho tříprvkového $\mathrm{U}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ jsou druhými členy daných dvojic, tj. existuje k nim nějaké *x*. Jenže potom $\Im(\exists x \forall y \mathrm{R}(x,y))=0$, protože neexistuje individuum *x*, které by bylo ve vztahu R ke všem individuím *y*.

7)

Ověřme, že logicky pravdivou formulí není ani třeba:

$$\forall x\, (\mathrm{A}(x) \rightarrow \mathrm{B}(x)) \rightarrow \exists x\, (\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{B}(x))$$

Existuje totiž interpretace, při níž je tato formule nepravdivá. Tedy její antecedent je při ní 1 a konsekvent 0. Pro příklad nechť třeba $\Im(\mathrm{A})=\emptyset$ a $\Im(\mathrm{B})=\mathrm{U}$. Načež $\Im(\mathrm{A}(x))[e]=0$ při jakémkoli ohodnocení *e*, takže při jakémkoli ohodnocení $\Im(\mathrm{A}(x)\rightarrow\mathrm{B}(x))[e]=1$, a proto $\Im(\forall x(\mathrm{A}(x)\rightarrow\mathrm{B}(x)))=1$. Jenže $\Im(\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x))[e]=0$ při jakémkoli *e*, a proto $\Im(\exists x(\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)))=0$. (Všimněme si, že jsme tím vlastně doložili, že vztah subalternace obecného kladného výroku a částečného kladného výroku neplatí.)

8)

Nakonec si ještě ověříme, že následující formule je logicky pravdivá:

$$\neg\exists x \forall y\, (\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\mathrm{R}(x,x))$$

Předpokládejme však naopak, že je pravdivá nenegovaná podoba této formule, tedy $\exists x \forall y\, (\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\mathrm{R}(x,x))$. Pro doklad navrhněme interpretaci $\Im(\mathrm{R})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\alpha,\gamma\rangle\}$. Při této interpretaci by nenegovaná formule byla pravdivá jedině tehdy, kdyby α byla ve vztahu R k sobě právě tehdy, když by ve vztahu R k sobě nebyla. To je však vyloučeno, tudíž nenegovaná formule je dokonce logicky nepravdivá. Nenegovaná formule je mimochodem formalizací klíčové věty známého *Pseudoparadoxu holiče*, totiž:

Existuje individuum, které holí všechna a pouze ta individua, která neholí sama sebe.

Negace této kontradikce je logicky pravdivá, jak jsme právě dokázali.

13.2 Cvičení – ověřování, zda je formule logicky pravdivá metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda je daná formule logicky pravdivá. Nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

1) $\forall x\ P(x) \rightarrow P(a)$
2) $\exists x\ Q(x) \rightarrow Q(a)$
3) $P(x) \rightarrow \exists y\ P(y)$
4) $P(x) \rightarrow \forall x\ A(x)$
5) $\neg \forall x\ A(x) \leftrightarrow \exists x\ \neg A(x)$
6) $\forall x\ (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \exists x\ (A(x) \wedge \neg B(x))$
7) $\exists x\ (A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow (\exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x))$
8) $\forall x\ (P(x) \vee \exists x P(x))$
9) $(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$
10) $(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
11) $\forall x\ (R(x,y) \wedge \neg Q(x))$
12) $\forall x \forall y\ R(x,y) \rightarrow \forall x\ R(x,x)$

13.2 Řešení – ověřování, zda je formule logicky pravdivá metodou protipříkladu

1) $\forall x\, P(x) \rightarrow P(a)$ je logicky pravdivá. Aby antecedent této implikace byl 1, tak $\Im(P)=U$. Ale pak do $\Im(P)$ patří i α, jež je interpretací konstanty „a", takže i konsekvent je 1. Pokud by α nepatřila do $\Im(P)$, a konsekvent by tedy byl 0, tak by antecedent nemohl být 1.

2) $\exists x\, Q(x) \rightarrow Q(a)$ není logicky pravdivá. Nepravdivá je například při $\Im(Q)=\{\beta\}$, poněvadž tehdy sice $\Im(\exists x Q(x))=1$, ale $\Im(Q(a))=0$ (samozřejmě, že při $\Im(a)=\alpha$).

3) $P(x) \rightarrow \exists y\, P(y)$ je logicky pravdivá. Jestli má být konsekvent 0, tak $\Im(P)=\emptyset$. Jenže pak je $\Im(P(x))[e]=0$ při jakémkoli ohodnocení e.

4) $P(x) \rightarrow \forall x\, A(x)$ není logicky pravdivá. Nepravdivá je například při $\Im(P)=\{\beta\}$ a $e(x)=\beta$, poněvadž tehdy $\Im(P(x))[e]=1$, ale $\Im(\forall x P(x))=0$.

5) $\neg \forall x\, A(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$ je logicky pravdivá.

6) $\forall x\, (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \exists x\, (A(x) \wedge \neg B(x))$ není logicky pravdivá. Příkladem interpretace, při níž je daná formule nepravdivá, je $\Im(A)=\emptyset$ a $\Im(B)=U$.

7) $\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow (\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x))$ je logicky pravdivá.

8) $\forall x\, (P(x) \vee \exists x\, P(x))$ není logicky pravdivá. Když $\Im(P)=\emptyset$, pak pro všechna ohodnocení e platí, že $\Im(P(x))[e]=0$, a zároveň $\Im(\exists x P(x))=0$.

9) $(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$ není logicky pravdivá. Konsekvent celé formule je 0, pokud $\Im(P) \neq \Im(Q) \neq U$. Protože chceme, aby za takovéto interpretace daných predikátů bylo $\Im(P(x) \wedge Q(x))[e]=1$, tak chceme, aby při ohodnocení e platilo dokonce $\Im(P) \cap \Im(Q) \neq \emptyset$. Příkladem interpretace, při níž je antecedent 1 a konsekvent 0 a daná formule tedy není logicky pravdivá, je proto například $\Im(P)=\{\alpha\}$, $\Im(Q)=\{\alpha,\beta\}$.

10) $(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ je logicky pravdivá. Předpoklad, že konsekvent celé formule je 0 (za účelem důkazu sporem), obnáší, že je prázdný průnik množin P a Q, tj. při každém ohodnocení e platí, že $\Im(P(x) \wedge Q(x))[e]=0$. Jenže pak antecedent nemůže být 1, čili je 0.

11) $\forall x\, (R(x,y) \wedge \neg Q(x))$ není logicky pravdivá. Například je daná formule nepravdivá, když v interpretaci R chybí z U^2 alespoň jedna dvojice individuí taková, že při tom ohodnocení, jež ohodnocuje touto dvojicí proměnné x a y, platí $\Im(R(x,y))[e]=0$.

12) $\forall x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall x\, R(x,x)$ je logicky pravdivá. Když R platí pro každou dvojici x a y, tak platí i pro dvojici x a x.

14. Ověřování platnosti úsudků metodou protipříkladu

Podobně jako v rámci VL, i v rámci PL lze prověřovat platnost úsudků několika způsoby, zejména však důkazem závěru z premis nebo *metodou protipříkladu*.

Metoda protipříkladu je vlastně důkaz sporem. Metoda má však silně sémantický rys, vychází totiž z definice vyplývání. Úsudek totiž není platný, pokud existuje taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé, ale závěr nepravdivý, tj. když závěr nevyplývá z premis. Naším cílem proto bude najít takovouto interpretaci. Pokud taková interpretace existuje, úsudek platný není. Pokud ale takovou interpretaci nelze najít, úsudek platný je.

Aplikace metody se podobá prověřování logické pravdivosti formulí metodou protipříkladu. Vzhledem k tomu, že vyplývání závěru z premis koresponduje s logickou pravdivostí formule, jejíž závěr je implikován konjunkcí premis, můžeme platnost úsudků zjišťovat i prověřováním logické pravdivosti odpovídajících formulí. Přímé prověřování úsudku je však o něco pohotovější.

Metodu si vysvětlíme na mnoha příkladech uváděných až níže. Následující tři příklady jsou vybrány proto, abychom si na nich ukázali několik základních strategických postupů.

Podobně jako v příkladech interpretace formulí, pokud budeme interpretovat term, který je vlastně proměnná, tak namísto „$\Im(x)[e]$“ budeme psát jednodušeji „$e(x)$“, v případě konstant zase „$\Im(\mathrm{c})$“. Pokud budeme zkoumat uzavřenou formuli, budeme rovnou uvádět její pravdivost/nepravdivost, tj. $\Im(A)$, nikoli pravdivost/nepravdivost při ohodnocení, tj. nikoli $\Im(A)[e]$. Škrtnutím znaku alfabety jako např. „$\cancel{\alpha}$“ nebo dvojice „$\cancel{\langle\alpha,\beta\rangle}$“ níže značíme, že dané individuum či dvojice individuí nenáleží do interpretace určitého predikátového symbolu. Pokud to nebude určeno jinak, nechť U={α,β,γ}.

1)

Ověřme platnost následujícího úsudku:

Vše se vyvíjí nebo mění.
Co se vyvíjí, to se mění.

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Nejprve provedeme jeho vhodnou formalizaci, poněvadž platnost jazykového úsudku budeme zjišťovat na jeho formalizaci:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\mathrm{V}(x)\vee\mathrm{M}(x)) \\ \forall x\,(\mathrm{V}(x)\rightarrow\mathrm{M}(x)) \\ \hline \forall x\,\mathrm{V}(x)\vee\forall x\,\mathrm{M}(x) \end{array}$$

Nyní budeme hledat takovou interpretaci závěru, při níž je závěr nepravdivý. Tuto interpretaci se budeme snažit udržet, byť někdy s případnými modifikacemi, jež budou činěny v zájmu toho, aby byly pravdivé premisy. Pokud takovou interpretaci najdeme, úsudek je neplatný; pokud takovou interpretaci nelze nalézt, úsudek je platný.

Nechť $\mathrm{U}=\{\alpha,\beta\}$. Úsudky obecně prověřujeme pro teoreticky nekonečné U, ale v mnoha případech postačí se omezit na tři, někdy dokonce jen dvě individua.

a1) Interpretace závěru. Chceme, aby byl nepravdivý, tj. 0. Proto navrhneme například $\Im(\mathrm{V})=\{\alpha\}$, $\Im(\mathrm{M})=\emptyset$:

$$\begin{array}{lllll} \forall x & \mathrm{V}(x) & \vee & \forall x & \mathrm{M}(x) \\ & 1\ \alpha & & & 0\ \alpha \\ & 0\ \beta & & & 0\ \beta \\ \underline{0} & & & \underline{0} & \\ & & \mathit{0} & & \end{array}$$

b1) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1. Musíme však uplatnit doposud získanou interpretaci (a tu modifikovat jen pokud je to nutné):

$$\begin{array}{lllll} \forall x & (\mathrm{V}(x) & \vee & \mathrm{M}(x)) & \\ & 1\ \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ & 0\ \beta & 0 & 0 & \beta \\ \mathit{0} & & & & \end{array}$$

Při stávající interpretaci tato premisa není pravdivá. Jenže ona by pravdivá být mohla, jen musíme vhodně modifikovat interpretaci M (viz b2).

b2) Interpretace první premisy. Budiž nově $\Im(\mathrm{M})=\{\beta\}$ (jde o modifikaci původní interpretace, neznačíme ji však $\Im'$, ač je odlišná od $\Im$), pak první premisa je pravdivá:

$$\begin{array}{llllll} \forall x\ (V(x)\vee M(x)) & & & & & \\ & 1\,\alpha & 1 & 0 & \alpha & \\ & 0\,\beta & 1 & 1 & \beta & \\ \mathit{1} & & & & & \end{array}$$

a2) Interpretaci $\Im(M)=\{\beta\}$ jsme samozřejmě navrhovali zároveň s ohledem na to, aby při ní byl nepravdivý závěr:

$$\begin{array}{llll} \forall x\ V(x)\vee\forall x\ M(x) & & & \\ & 1\,\alpha & 0\ \alpha & \\ & 0\,\beta & 1\ \beta & \\ \underline{0} & & \underline{0} & \\ & \mathit{0} & & \end{array}$$

c1) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1. Podíváme-li se na fungování doposud získaných dílčích interpretací, zjistíme, že tato premisa pravdivá není:

$$\begin{array}{llllll} \forall x\ (V(x)\rightarrow M(x)) & & & & & \\ & 1\,\alpha & 0 & 0 & \alpha & \\ & 0\,\beta & 1 & 1 & \beta & \\ \mathit{0} & & & & & \end{array}$$

c2) To ale ještě neznamená, že úsudek je platný. Druhou premisu totiž učiníme pravdivou, když se vyhneme tomu, aby v prvním řádku tabulky hodnot pod formulí bylo $1\rightarrow0$. Máme při tom dvě možnosti. Kdybychom přibrali do $\Im(M)=\{\beta\}$ také α – aby v daném řádku bylo $1\rightarrow1$, tak by byla pravdivou formule $\forall x\ M(x)$, takže by se stal závěr pravdivý, což nechceme. Zbývá možnost, že ubereme individuum α z $\Im(V)$, načež $\Im(V)=\emptyset$:

$$\begin{array}{llllll} \forall x\ (V(x)\rightarrow M(x)) & & & & & \\ & 0\,\alpha & 1 & 0 & \alpha & \\ & 0\,\beta & 1 & 1 & \beta & \\ \mathit{1} & & & & & \end{array}$$

a3) To je interpretace, při níž – jak jsme si už při jejím navrhování kontrolně ověřili – je závěr v souladu se záměrem nepravdivý:

$$\begin{array}{lllll}
\forall x & \mathrm{V}(x) & \lor & \forall x & \mathrm{M}(x) \\
 & 0\ \alpha & & & 0\ \ \alpha \\
 & 0\ \beta & & & 1\ \ \beta \\
\underline{0} & & & \underline{0} & \\
 & & \mathit{0} & &
\end{array}$$

b3) Jenže jak zjišťujeme, při této interpretaci $\Im$ přestane být pravdivou první premisa:

$$\begin{array}{llll}
\forall x & (\mathrm{V}(x) & \lor & \mathrm{M}(x)) \\
 & 0\ \alpha & 0 & 0\ \ \alpha \\
 & 0\ \beta & 1 & 1\ \ \beta \\
\mathit{0} & & &
\end{array}$$

Když si zkontrolujeme celý postup zjistíme, že vskutku nelze nalézt interpretaci, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr nikoli. Úsudek je tedy platný.

2)

Nyní si ukážeme, jak vhodně navrhnout interpretaci závěru úsudku, jehož formalizace má na začátku $\exists$. Mějme rovnou formální znění příkladu:

$$\frac{\forall x\ (\mathrm{P}(x)\to\mathrm{Q}(x))}{\exists x\ (\mathrm{P}(x)\land\mathrm{Q}(x))}$$

Nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

a1) Interpretace závěru. Chceme, aby závěr byl 0. Aby závěr byl 0, je více možností. My ale budeme rutinně volit interpretaci jako $\Im(\mathrm{P})=\{\cancel{\alpha},\beta,\cancel{\gamma}\}$, $\Im(\mathrm{Q})=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\gamma\}$ (tj. množiny jsou disjunktní a aspoň jedno individuum není v žádné z nich):

$$\begin{array}{llll}
\exists x & (\mathrm{P}(x) & \land & \mathrm{Q}(x)) \\
 & 0\ \alpha & 0 & 0\ \alpha \\
 & 1\ \beta & 0 & 0\ \beta \\
 & 0\ \gamma & 0 & 1\ \gamma \\
\mathit{0} & & &
\end{array}$$

b1) Interpretace premisy. Chceme, aby premisa byla 1, nicméně musíme respektovat doposud navrženou interpretaci, při níž je nepravdivý závěr:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \\
\qquad 0\ \alpha\quad 1\quad 0\ \alpha \\
\qquad 1\ \beta\quad 0\quad 0\ \beta \\
\qquad 0\ \gamma\quad 1\quad 1\ \gamma \\
\mathit{0}
\end{array}
$$

To, že je premisa nepravdivá, ale ještě neznamená, že úsudek je platný. Interpretace druhé premisy se dá totiž modifikovat tak, aby byla pravdivá.

b2) Díky námi navržené rutinní interpretaci pro závěr začínající $\exists$ snadno vidíme, co opravit, takže $\mathfrak{I}(P)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\cancel{\gamma}\}$, $\mathfrak{I}(Q)=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\gamma\}$:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \\
\qquad 0\ \alpha\quad 1\quad 0\ \alpha \\
\qquad 0\ \beta\quad 0\quad 0\ \beta \\
\qquad 0\ \gamma\quad 1\quad 1\ \gamma \\
\mathit{1}
\end{array}
$$

a2) Interpretace závěru. Samozřejmě, že při modifikované interpretaci musí být nepravdivý závěr:

$$
\begin{array}{l}
\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \\
\qquad 0\ \alpha\quad 0\quad 0\ \alpha \\
\qquad 0\ \beta\quad 0\quad 0\ \beta \\
\qquad 0\ \gamma\quad 0\quad 1\ \gamma \\
\mathit{0}
\end{array}
$$

Našli jsem tedy interpretaci, při níž jsou premisa pravdivá a závěr nepravdivý. Úsudek je tedy neplatný.

3)

V následujícím příkladu si ukážeme další důležitý strategický postup: dělat jen to, co je nutné, nedopouštět se nevynucených, neodůvodněných kroků. Není totiž vždy potřeba navrhovat celou interpretaci některých predikátových symbolů a následně formulí, někdy se stačí při interpretaci omezit jen na nejnutnější odůvodněné minimum.

Prověřme platnost úsudku:

Žádný pravoúhlý trojúhelník není pravidelný obrazec.
Každý rovnostranný trojúhelník je pravidelný obrazec.

Žádný rovnostranný trojúhelník není pravoúhlý trojúhelník.

Ve formalizaci jsou „PT“, „PO“ a „RT“ zjednodušenými formalizacemi „pravidelný trojúhelník“, „pravidelný obrazec“, „rovnostranný trojúhelník“. Vnitřní struktura těchto složených predikátů se totiž zjevně nepodílí na vyplývání, proto od ní můžeme abstrahovat:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\,(\mathrm{PT}(x)\to\neg\mathrm{PO}(x))\\
\forall x\,(\mathrm{RT}(x))\to\mathrm{PO}(x))\\
\hline
\forall x\,(\mathrm{RT}(x)\to\neg\mathrm{PT}(x))
\end{array}
$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto např. $\Im(\mathrm{RT})=\{\alpha,...\}$, $\Im(\mathrm{PT})=\{\alpha,...\}$. Nedourčenost této interpretace není překážkou určení sémantické hodnoty prošetřované formule (namísto otazníků lze psát např. tečky):

$$
\begin{array}{lcccccc}
\forall x\,(& \mathrm{RT}(& x) & \to & \neg & \mathrm{PT}(& x))\\
 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha\\
 & ? & \beta & ? & ? & ? & \beta\\
 & ? & \gamma & ? & ? & ? & \gamma\\
\mathit{0} & & & & & &
\end{array}
$$

Interpretaci se nyní nesnažíme zúplnit. Pro nepravdivost závěru je totiž nutné vědět pouze o jediném individuu – my jsme si vybrali α –, že patří do interpretací daných dvou predikátových symbolů.

b) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, proto musí být $\Im(\mathrm{PO})=\{\cancel{\alpha},...\}$, aby kvůli α nebyl antecedent 1 a konsekvent 0 (tj. aby nebylo v daném řádku $1\to0$):

$$
\begin{array}{lcccccc}
\forall x\,(& \mathrm{PT}(& x) & \to & \neg & \mathrm{PO}(& x))\\
 & 1 & \alpha & 1 & 1 & 0 & \alpha\\
 & ? & \beta & ? & ? & ? & \beta\\
 & ? & \gamma & ? & ? & ? & \gamma
\end{array}
$$

Interpretaci stále nezúplňujeme, hned se totiž podíváme, jak ovlivní pravdivost druhé premisy.

c) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, musíme však přitom zohlednit doposud získané dílčí interpretace predikátových symbolů:

$$\begin{array}{lccccc} \forall x\ (\mathrm{RT}(x) \rightarrow \mathrm{PO}(x)) \\ \quad 1 & \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ \quad ? & \beta & ? & ? & \beta \\ \quad ? & \gamma & ? & ? & \gamma \end{array}$$

Vidíme, že tato premisa nemůže být při dané interpretaci pravdivá.

Při revizi dosavadního postupu pak zjistíme, že interpretaci, při níž by byly všechny premisy pravdivé a závěr nepravdivý, ani nelze navrhnout. Úsudek je tedy platný, jeho závěr vyplývá z jeho premis.

Shrnujeme. Při ověřování platnosti úsudků nejprve navrhneme takovou interpretaci, při níž je závěr nepravdivý. Tuto interpretaci se snažíme prosadit i v premisách; naším zájmem je, aby všechny byly pravdivé; onu původně navrženou interpretaci proto podle potřeby modifikujeme. Pokud to není nevyhnutelné, interpretaci se snažíme navrhnout jen částečnou a rozšiřovat ji, jen pokud je to potřeba.

14.1 Příklady – úsudky s jedním monadickým predikátem

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků.

1)

Gabriela je letuška.

Někdo je letuška.

Formalizace:

$$\frac{L(g)}{\exists x\, L(x)}$$

Nechť U={α,β,γ,...}, $\Im$(g)=γ.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto např. $\Im$(L)=∅:

∃x L (x)
0 α
0 β
0 γ
atd.
0

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1. Interpretaci ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu L (nelze mít rozpor v interpretaci):

L (g)
0 γ

Úsudek je tedy platný (jde vlastně o zákon abstrakce). (Jeho závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž by všechny premisy, zde jen jedna, byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý. Obdobně níže.)

2)

$$\frac{\text{Adam je omylný.}}{\text{Každý je omylný.}}$$

Formalizace:

$$\frac{O(a)}{\forall x\, O(x)}$$

Nechť U={α,β,γ}, $\Im$(a)=α.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto nesmí být $\Im$(O)=U. S ohledem na pravdivost první premisy volíme $\Im$(O)={α}:

$\forall x$ O (x)
1 α
0 β
0 γ
0

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1, ale musíme přitom zohlednit dosud získanou interpretaci predikátového symbolu O:

O (a)
1 α

Úsudek tedy není platný. (Jeho závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy, zde pouze jedna, jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý. Obdobně níže.)

3)

Každý je smrtelný.

Někdo je smrtelný.

Formalizace:

$$\frac{\forall x\, S(x)}{\exists x\, S(x)}$$

Nechť U={α,β,γ,...}, $e(x)$=β.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být $\Im$(S)=∅ (není jiná alternativa):

$\exists x$ S (x)
0 α
0 β
0 γ
0 atd.
0

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1, ale musíme zohlednit doposud získanou interpretaci predikátového symbolu S:

$\forall x$ S (x)
0 α
0 β
0 γ
0 atd.
0

Premisa tedy nemůže být při nepravdivosti závěru pravdivá.

Úsudek je tedy platný (jde vlastně o zákon partikularizace).

14.2 Cvičení – úsudky s jedním monadickým predikátem

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků. Pokud není uvedeno níže v příkladech jinak, nechť U={α,β,γ}.

1)

Někdo je veselý.

Alan je veselý.

2)

Všichni jsou smrtelní.

Někteří nejsou smrtelní.

3)

Každý je opilý.

Adam je opilý.

14.2 Řešení – úsudky s jedním monadickým predikátem

1) Úsudek není platný. Formalizace: $\exists x\ V(x)\ \therefore\ V(a)$. Nechť $\Im(a)=\alpha$. Aby závěr byl 0, tak např. $\Im(V)=\{\cancel{\alpha},\beta,...\}$. Chceme, aby premisa byla 1, což se při této $\Im$ podařilo.
2) Úsudek není platný. Formalizace: $\forall x\ S(x)\ \therefore\ \exists x\ \neg S(x)$. Chceme, aby závěr byl 0, proto musí být $\Im(S)=U$. Chceme, aby premisa byla 1, což se při této $\Im$ podařilo.
3) Úsudek je platný (jde vlastně o zákon konkretizace). Formalizace: $\forall x\ O(x)\ \therefore O(a)$. Nechť $\Im(a)=\alpha$. Chceme, aby závěr byl 0, proto např. $\Im(O)=\{\cancel{\alpha},\dots\}$. Chceme, aby premisa byla 1, ale to se při této $\Im$ nepodařilo, není to ani možné.

14.3 Příklady – úsudky se dvěma monadickými predikáty

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků.

1)

Každý člověk je smrtelný.
Sókratés je člověk.

Sókratés je smrtelný.

Formalizace:

$$\frac{\forall x\,(\check{C}(x)\rightarrow S(x)) \qquad \check{C}(s)}{S(s)}$$

Nechť U={σ,π,α} (tj. Sókratés, Platón, Aristotelés), $\Im(s)=\sigma$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto $\Im(S)=\{\sigma,...\}$. To, zda π a α jsou v této $\Im(S)$, necháváme neurčeno – nic nás nyní nenutí navrhovat, že tam jsou, nebo že tam nejsou.

S(s)
0 σ

b) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, a proto navrhujeme $\Im(\check{C})=\{\sigma,\ldots\}$:

Č(s)
1 σ

c) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, ale musíme přitom zohlednit již získané interpretace predikátových symbolů:

$$\begin{array}{lllllll}
\forall x\ (\check{C}(x) & \rightarrow & S(x)) \\
\quad ?\ \alpha & ? & ?\ \alpha \\
\quad ?\ \pi & ? & ?\ \pi \\
\quad 1\ \sigma & 0 & 0\ \sigma \\
\mathit{0}
\end{array}$$

Úsudek je tedy platný.

2)

Někteří učitelé nejsou hudebníci.

Někteří hudebníci nejsou učitelé.

Formalizace:

$$\frac{\exists x\ (U'(x) \wedge \neg H(x))}{\exists x\ (H(x) \wedge \neg U'(x))}$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto navrhneme, aby se $\Im(H)$ a $\Im(U')$ nepřekrývaly – jedině takto bude pod $\wedge$ ve všech řádcích 0. Navrhujeme například $\Im(H)=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\Im(U')=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, jež je optimální pro závěry, jež jsou částečnými výroky:

$$\begin{array}{llllll}
\exists x\ (H(x) & \wedge & \neg & U'(x)) \\
\quad 0\ \alpha & 0 & 0 & 1\ \alpha \\
\quad 1\ \beta & 0 & 0 & 1\ \beta \\
\quad 0\ \gamma & 0 & 1 & 0\ \gamma \\
\mathit{0}
\end{array}$$

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1, přičemž zohledňujeme dosavadní interpretaci predikátových symbolů:

$$
\begin{array}{lllllll}
\exists x\,(\mathrm{U}'(x) & \wedge & \neg & \mathrm{H}(x)) & & & \\
\quad 1 & \alpha & 1 & 1 & 0 & \alpha & \\
\quad 1 & \beta & 0 & 0 & 1 & \beta & \\
\quad 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 & \gamma & \\
\mathit{1} & & & & & &
\end{array}
$$

Úsudek tedy není platný.

3)

Co není černé, je bílé.

Co není bílé, je černé.

Formalizace:

$$
\frac{\forall x\,(\neg \check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow \mathrm{B}(x))}{\forall x\,(\neg \mathrm{B}(x) \rightarrow \check{\mathrm{C}}(x))}
$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto např. $\Im(\mathrm{B})=\{\alpha,\beta\}$, $\Im(\check{\mathrm{C}})=\emptyset$; nezbytné je, aby byl aspoň jeden řádek pod $\rightarrow$ roven 0 (tj. $1\rightarrow 0$):

$$
\begin{array}{llllll}
\forall x\,(\neg & \mathrm{B}(x) & \rightarrow & \check{\mathrm{C}}(x)) & & \\
\quad 0 & 1\,\alpha & 1 & 0\,\alpha & & \\
\quad 0 & 1\,\beta & 1 & 0\,\beta & & \\
\quad 1 & 0\,\gamma & 0 & 0\,\gamma & & \\
\mathit{0} & & & & &
\end{array}
$$

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1, a přitom využíváme naši stávající interpretaci:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (\neg \check{C}(x) \rightarrow B(x)) \\
\qquad 1\ \ 0\,\alpha\quad 1\quad 1\,\alpha \\
\qquad 1\ \ 0\,\beta\quad 1\quad 1\,\beta \\
\qquad 1\ \ 0\,\gamma\quad 0\quad 0\,\gamma \\
\mathit{0}
\end{array}
$$

Jenže jak vidíme, ve třetím řádku hodnot je 0, ač my chceme 1. Jenže, abychom měli i v tomto řádku 1, musela by být $\Im$ upravena tak, že by zas nebyl závěr roven 0. Z toho vidíme, že neexistuje taková $\Im$, při níž by byla premisa pravdivá a závěr nikoli. Úsudek tedy je platný.

4)

Jsou-li všechna prvočísla lichá, tak 2 není prvočíslo.

Některá prvočísla nejsou lichá.

Formalizace:

$$
\frac{\forall x\ (P(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \neg P(2)}{\exists x\ (P(x) \wedge \neg L(x))}
$$

Nechť U=$\{{}_1,{}_2,{}_3\}$ (tj. určitá přirozená čísla), $\Im(2)={}_2$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0. Proto např. $\Im(P)=\{{}_{\cancel{1}},{}_2,{}_3\}$, $\Im(L)=\{{}_1,{}_2,{}_3\}$:

$$
\begin{array}{l}
\exists x\ (P(x) \wedge \neg L(x)) \\
\qquad 0\ {}_1\ \ 0\ 0\ 1\ {}_1 \\
\qquad 1\ {}_2\ \ 0\ 0\ 1\ {}_2 \\
\qquad 0\ {}_3\ \ 0\ 1\ 0\ {}_3 \\
\mathit{0}
\end{array}
$$

b) Interpretace první premisy. Při dosud navržené interpretaci je konsekvent, tj. $\neg\mathrm{P}(2)$, roven 0, avšak antecedent, tj. $\forall x\,(\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{L}(x))$, roven 1:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{L}(x))\rightarrow\neg\mathrm{P}(2)\\ \underline{1}\left\{\begin{array}{l} 0_1\ \ 1\ 1_1\\ 1_2\ \ 1\ 1_2\\ 0_3\ \ 1\ 0_3\end{array}\right.\quad \mathit{0}\ \underline{0}\ 1_2 \end{array}$$

Po revizi postupu zjistíme, že skutečně nelze nalézt takovou interpretaci, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr nikoli. Úsudek je tedy platný.

5)

Žádný narkoman není policistou.
Každý dealer je narkoman.
Karel je dealer.

Karel není policistou.

Formalizace:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\mathrm{N}(x)\rightarrow\neg\mathrm{P}(x))\\ \forall x\,(\mathrm{D}(x)\rightarrow\mathrm{N}(x))\\ \mathrm{D}(\mathrm{k})\\ \hline \neg\mathrm{P}(\mathrm{k}) \end{array}$$

Nechť $U=\{\alpha,\beta,\ldots,\kappa,\ldots\}$, $\mathfrak{I}(\mathrm{k})=\kappa$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto $\mathfrak{I}(\mathrm{P})=\{\kappa,\ldots\}$:

$$\begin{array}{l} \neg\mathrm{P}(\mathrm{k})\\ \mathit{0}\ 1\ \kappa \end{array}$$

b) Interpretace třetí premisy. Chceme, aby byla 1, proto $\mathfrak{I}(\mathrm{D})=\{\kappa,\ldots\}$:

$$\begin{array}{l} \mathrm{D}(\mathrm{k})\\ \mathit{1}\ \ \kappa \end{array}$$

c) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto nesmí ani jednou nastat 1→0, protože celá premisa by byla 0. Proto: $\mathfrak{I}$(N)={κ,...}. Zatím se nezajímáme o $\mathfrak{I}$(D(x)) či $\mathfrak{I}$(N(x)) pro jiná individua než κ:

```
∀x (D(x) → N(x))
      :        :
    1 κ  1   1 κ
      :        :
```

d) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1; ale tuto interpretaci musíme spočítat podle již dosažených interpretací predikátových symbolů. Jak vidíme, tyto dílčí interpretace vedou k tomu, že interpretace první premisy je 0:

```
∀x (N(x)→¬P(x))
      :        :
    1 κ  0 0 1 κ
      :        :
0
```

Úsudek je tedy platný.

14.4 Cvičení – úsudky se dvěma monadickými predikáty

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků. Pokud není uvedeno níže v příkladech jinak, nechť U={α,β,γ}.

1)

Každý hlupák je rozumbrada.
Adam je rozumbrada.

Adam je hlupák.

2)

Někteří učitelé jsou hudebníci.

Někteří hudebníci jsou učitelé.

3)

Co není černé, je bílé.

Co je černé, není bílé.

4)

Jsou-li všechna prvočísla lichá, tak 2 není prvočíslo.
2 je prvočíslo.

Některá prvočísla nejsou lichá.

14.4 Řešení – úsudky se dvěma monadickými predikáty

1) Úsudek není platný. Formalizace:
$\forall x\, (\mathrm{H}(x) \rightarrow \mathrm{R}(x))$
R(a)

H(a).
Nechť $\mathfrak{I}$(a)=α. Chceme, aby závěr byl 0, proto např. $\mathfrak{I}(\mathrm{H})=\{\cancel{\alpha},\ldots\}$. Chceme, aby druhá (jednodušší) premisa byla 1, proto $\mathfrak{I}(\mathrm{R})=\{\alpha,...\}$. Chceme, aby první premisa byla 1, pro což musíme zohlednit již získanou interpretaci predikátových symbolů; první premisa bezproblémově pravdivá je.

2) Úsudek je platný. Formalizace:
$\exists x\, (\mathrm{U}'(x) \wedge \mathrm{H}(x))$

$\exists x\, (\mathrm{H}(x) \wedge \mathrm{U}'(x))$
Chceme, aby závěr byl 0, proto např. $\mathfrak{I}(\mathrm{H})= \{\cancel{\alpha},\beta,\gamma\}$, $\mathfrak{I}(\mathrm{U}')=\{\alpha,\cancel{\beta},\gamma\}$, dané množiny mají tedy prázdný průnik. Chceme, aby premisa byla 1, ale při takové interpretaci, při níž je závěr nepravdivý, to není možné.

3) Úsudek není platný. Formalizace:
$\forall x\, (\neg \check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow \mathrm{B}(x))$

$\forall x\, (\check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow \neg \mathrm{B}(x))$
Chceme, aby závěr byl 0, proto např. $\mathfrak{I}(\check{\mathrm{C}})=\{\alpha,\beta\}$, $\mathfrak{I}(\mathrm{B})=\{\beta,\gamma\}$, tj. něco je v průniku daných množin. Chceme, aby premisa byla 1, což se při této $\mathfrak{I}$ podařilo.

4) Úsudek je platný. Srov. v příkladech dokázání platnosti prakticky téhož úsudku, ale bez premisy „2 je prvočíslo“.

14.5 Příklady – úsudky s monadickým a binárním predikátem

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků.

1)

$$\begin{array}{l} \text{Martina má ráda pouze matematiky.} \\ \text{Pavel je matematik.} \\ \hline \text{Martina má ráda Pavla.} \end{array}$$

Formalizace:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\mathrm{R}(\mathrm{m},x) \rightarrow \mathrm{M}(x)) \\ \mathrm{M}(\mathrm{p}) \\ \hline \mathrm{R}(\mathrm{m},\mathrm{p}) \end{array}$$

Nechť U={μ,π} (tj. Martina, Pavel), $\Im(\mathrm{m})=\mu$, $\Im(\mathrm{p})=\pi$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být $\Im(\mathrm{R})=\{\cancel{\langle\mu,\pi\rangle},\ldots\}$:

R(m,p)
0 μ π

b) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto musí být $\Im(\mathrm{M})=\{\pi,\ldots\}$:

M(p)
1 π

c) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, ale musíme přitom zohlednit již získané dílčí interpretace predikátových symbolů:

$$\begin{array}{l} \forall x\ (\mathrm{R}(\mathrm{m},x) \rightarrow \mathrm{M}(x)) \\ \quad ?\ \ \mu\ \ \mu\ \ ?\ \ ?\ \ \mu \\ \quad 0\ \ \mu\ \ \pi\ \ 1\ \ 1\ \ \pi \end{array}$$

Vidíme však, že na místě „?" může být jakákoli distribuce pravdivostních hodnot kromě 1 pod R a 0 pod M. Nic nám v úsudku nebrání v tom, abychom dosavadní specifikaci $\mathfrak{I}$ zúplnili tak (např. na $\mathfrak{I}(\mathrm{R})=\{\cancel{\langle\mu,\pi\rangle},\cancel{\langle\mu,\mu\rangle}\}$, $\mathfrak{I}(\mathrm{M})=\{\pi\}$), aby první premisa byla pravdivá. Úsudek tedy není platný.

2)

Gabriela má ráda všechny Verdiho opery.
Aida je Verdiho opera.

Gabriela má ráda Aidu.

Formalizace („Verdiho opera" zjednodušujeme na „VO", neboť to neovlivní ověření platnosti):

$$\forall x\ (\mathrm{VO}(x) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{g},x))$$
$$\mathrm{VO}(\mathrm{a})$$

$$\mathrm{R}(\mathrm{g},\mathrm{a})$$

Nechť $U=\{\alpha,\gamma,\nu\}$ (tj. Gabriela, Aida, Nabucco), $\mathfrak{I}(\mathrm{g})=\gamma$, $\mathfrak{I}(\mathrm{a})=\alpha$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být $\mathfrak{I}(\mathrm{R})=\{\cancel{\langle\gamma,\alpha\rangle},\ldots\}$.

$$\begin{array}{l} \mathrm{R}(\mathrm{g},\mathrm{a}) \\ \mathit{0}\ \ \gamma\ \alpha \end{array}$$

b) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto $\mathfrak{I}(\mathrm{VO})=\{\alpha,\ldots\}$:

$$\begin{array}{l} \mathrm{VO}(\mathrm{a}) \\ \ \ \mathit{1}\ \ \ \alpha \end{array}$$

c) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, ale musíme zohlednit doposud získané dílčí interpretace predikátových symbolů:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (\mathrm{VO}(x)\rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{g},x))\\
\qquad 1\quad \alpha\ \ 0\ \ 0\ \ \gamma\ \alpha\\
\qquad ?\quad \gamma\ \ ?\ \ ?\ \ \gamma\ \gamma\\
\qquad ?\quad \nu\ \ ?\ \ ?\ \ \gamma\ \nu\\
\mathit{0}
\end{array}
$$

Vidíme, že doposud získané dílčí interpretace neumožní, aby daná premisa byla pravdivá. Takže nelze nalézt interpretaci, při níž jsou premisy pravdivé a závěr nikoli. Úsudek je tedy platný.

3)

Každý, koho má Magda ráda, je voják nebo inženýr.
Kryšpín není inženýr.

Má-li Magda ráda Kryšpína, tak je Kryšpín voják.

Formalizace:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (\mathrm{R}(\mathrm{m},x)\rightarrow(\mathrm{V}(x)\vee \mathrm{I}(x)))\\
\neg \mathrm{I}(\mathrm{k})\\
\hline
\mathrm{R}(\mathrm{m},\mathrm{k})\rightarrow \mathrm{V}(\mathrm{k})
\end{array}
$$

Nechť U={μ,κ} (tj. Magda, Kryšpín), $\Im(\mathrm{m})=\mu$, $\Im(\mathrm{k})=\kappa$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být $\Im(\mathrm{R})=\{\langle\mu,\kappa\rangle,\ldots\}$ a $\Im(\mathrm{V})=\{\cancel{\kappa},\ldots\}$:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{R}(\mathrm{m},\mathrm{k})\rightarrow \mathrm{V}(\mathrm{k})\\
1\ \ \mu\ \ \kappa\ \ \mathit{0}\ \ 0\ \ \kappa
\end{array}
$$

b) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto musí být $\Im(\mathrm{I})=\{\kappa,...\}$:

¬ I(k)
1 0 κ

c) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1. Musíme přitom ale zohlednit dosud získané dílčí interpretace predikátových symbolů:

∀*x* (R(m,*x*)→(V(*x*) ∨ I(*x*)))
? μ μ ? ? μ ? ? μ
1 μ κ 0 0 κ 0 0 κ
0

Aniž bychom museli danou interpretaci zúplňovat, je zřejmé, že při nepravdivosti závěru nemohou být všechny premisy pravdivé. Úsudek je tedy platný.

4)

Každý, kdo má rád Marii, má rád Evu.
Žádný student nemá rád Marii.
Karel je student.

Karel nemá rád Evu.

Formalizace:

∀*x* (R(*x*,m)→R(*x*,e))
∀*x* (S(*x*)→¬R(*x*,m))
S(k)

¬R(k,e)

Nechť U={ε,μ,κ}, $\Im$(e)=ε, $\Im$(m)=μ, $\Im$(k)=κ.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být $\Im(\mathrm{R})=\{\langle\kappa,\varepsilon\rangle,...\}$.

¬R(k,e)
0 1 κ ε

b) Interpretace třetí premisy. Chceme, aby byla 1, proto musí být $\Im(S)=\{\kappa,...\}$.

S(k)
1 κ

c) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto se nesmí ani jednou vyskytnout řádek 1→0. Zatím se nezajímáme o jiné hodnoty *x* než κ, proto $\Im(R)=\{\langle\kappa,\varepsilon\rangle,\cancel{\langle\kappa,\mu\rangle},...\}$:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\,(S(x)\rightarrow\neg R(x,m))\\
\quad\;\;\vdots\qquad\;\vdots\\
\quad\;\;1\,\kappa\;\;1\;\;1\;0\;\kappa\,\mu\\
\quad\;\;\vdots\qquad\;\vdots
\end{array}
$$

d) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, proto nesmí být ani v jednom řádku 1→0. Přezkoumáme fungování dosavadních dílčích interpretací predikátových symbolů:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\,(R(x,m)\rightarrow R(x,e))\\
\quad\;\;\vdots\qquad\quad\;\vdots\\
\quad\;\;0\;\kappa\,\mu\;\;1\;\;1\;\kappa\;\varepsilon\\
\quad\;\;\vdots\qquad\quad\;\vdots
\end{array}
$$

Vidíme, že dosavadní dílčí interpretace neohrožují pravdivost premisy, interpretaci lze tedy zúplnit tak, aby všechny premisy byly při nepravdivosti závěru pravdivé. Úsudek tedy není platný.

14.6 Cvičení – úsudky s monadickým a binárním predikátem

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků. Pokud není uvedeno níže v příkladech jinak, nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

1)

Marianna má ráda všechny matematiky.
Petr je matematik.

Marianna má ráda Petra.

2)

Gita má ráda pouze Verdiho opery.
Aida je Verdiho opera.

Gita má ráda Aidu.

3)

Beáta má ráda některé vítěze.
Kryštof není vítěz.

Beáta nemá ráda Kryštofa.

4)

Každý, kdo má rád Borise, má rád Cyrila.
Alan nemá rád Borise.

Alan nemá rád Cyrila.

5)

Každý, kdo má rád Evu, má rád Marii.
Žádný student nemá rád Marii.
Karel je student.

Karel nemá rád Evu.

14.6 Řešení – úsudky s monadickým a binárním predikátem

1) Úsudek je platný. Formalizace:

$\forall x\ (\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{m},x))$

$\mathrm{M}(\mathrm{p})$

$\mathrm{R}(\mathrm{m},\mathrm{p})$

Nechť $U=\{\mu,\pi\}$ (tj. Marianna, Petr), $\Im(m)=\mu$, $\Im(p)=\pi$. Interpretace závěru $\Im(R)=\{\cancel{\langle\mu,\pi\rangle},...\}$, interpretace druhé premisy: $\Im(M)=\{\pi,...\}$; ale pak nemůže být interpretace první premisy rovna 1.

2) Úsudek není platný. Formalizace:

$$\forall x\,(R(g,x)\rightarrow VO(x))$$
$$VO(a)$$
$$\overline{}$$
$$R(g,a)$$

Nechť $U=\{\gamma,\alpha,\nu\}$ (tj. Gita, Aida, Nabucco), $\Im(g)=\gamma$, $\Im(a)=\alpha$. Aby závěr byl 0, tak $\Im(R)=\{\cancel{\langle\gamma,\alpha\rangle},...\}$; aby druhá premisa byla 1, tak $\Im(VO)=\{\alpha,...\}$. Což lze zúplnit na takovou $\Im$, při níž je i první premisa 1 (např. $\Im(R)=\emptyset$).

3) Úsudek není platný. Formalizace:

$$\exists x\,(R(b,x)\wedge V(x))$$
$$\neg V(k)$$
$$\overline{}$$
$$\neg R(b,k)$$

Nechť $U=\{\beta,\kappa,\pi\}$ (tj. Beáta, Kryštof, Pavel), $\Im(b)=\beta$, $\Im(k)=\kappa$. Aby závěr byl 0: $\Im(R)=\{\langle\beta,\kappa\rangle,...\}$, aby druhá premisa byla 1: $\Im(V)=\{\cancel{\kappa},...\}$. Dosavadní interpretaci lze zúplnit tak, že i první premisa je 1, např. $\Im(R)=\{\langle\beta,\kappa\rangle, \langle\beta,\pi\rangle\}$, $\Im(V)=\{\cancel{\kappa},\pi\}$.

4) Úsudek není platný. Formalizace:

$$\forall x\,(R(x,b)\rightarrow R(x,c))$$
$$\neg R(a,b)$$
$$\overline{}$$
$$\neg R(a,c)$$

Aby závěr byl 0, tak musí být $\Im(R)=\{\langle\alpha,\gamma\rangle,...\}$. Aby druhá premisa byla 1, tak musíme tuto interpretaci rozšířit na $\Im(R)=\{\langle\alpha,\gamma\rangle,\cancel{\langle\alpha,\beta\rangle},...\}$. Ale pokud hodnotou x je α, tak pak je v první premise v daném řádku $0\rightarrow1$, takže interpretace může být bez problémů zúplněna tak, aby všechny premisy byly pravdivé, kdežto závěr nikoli.

5) Úsudek je platný. Formalizace:

$$\forall x\,(R(x,e)\rightarrow R(x,m))$$
$$\forall x\,(S(x)\rightarrow\neg R(x,m))$$
$$S(k)$$
$$\overline{}$$
$$\neg R(k,e)$$

Nechť U={α,β,γ,...}, ℑ(e)=ε, ℑ(m)=μ, ℑ(k)=κ. Aby závěr byl 0, tak musí být ℑ(R)={⟨κ,ε⟩,...}; aby třetí premisa byla 1, tak ℑ(S)={κ,...}. Aby druhá premisa byla 1, tak nesmí být ani jednou 1→0, proto když *x* je κ, ℑ(¬R(*x*,m))[*e*] musí být 1, proto ℑ(R)={⟨κ,ε⟩,~~⟨κ,μ⟩~~,...}. Hned se podíváme, jak to ovlivní interpretaci první premisy; zjistíme, že při takovéto ℑ je 0.

14.7 Příklady – náročnější úsudky s jednou premisou

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků.

1)

Vše se vyvíjí a mění.

Vše se vyvíjí a vše se mění.

Formalizace:

$$\frac{\forall x\,(V(x)\wedge M(x))}{\forall x\,V(x)\wedge\forall x\,M(x)}$$

Nechť U={α,β}.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto např. ℑ(V)={α,β}=U, ℑ(M)={α,$\cancel{\beta}$}:

$$\begin{array}{lll}
\forall x\,V(x) & \wedge & \forall x\,M(x)\\
\quad 1\ \alpha & & \quad 1\ \alpha\\
\quad 1\ \beta & & \quad 0\ \beta\\
\underline{1} & & \underline{0}\\
 & \mathit{0} &
\end{array}$$

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1, což při dosavadní interpretaci ale nelze:

$\forall x\,(\mathrm{V}(x)\wedge\mathrm{M}(x))$
1 α 0 0 α
1 β 0 0 β
0

Úsudek je tedy platný. Lze si povšimnout, že premisa vlastně říká, že $\Im(\mathrm{V})=\Im(\mathrm{M})$, následně nejde udělat interpretaci závěru takovou, aby byl nepravdivý. (Srov. odpovídající logicky pravdivou formuli PL.)

2)

Vše se vyvíjí nebo mění.

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Formalizace:

$\forall x\,(\mathrm{V}(x)\wedge\mathrm{M}(x))$

$\forall x\,\mathrm{V}(x)\vee\forall x\,\mathrm{M}(x)$

Nechť $\mathrm{U}=\{\alpha,\beta\}$.
a) Interpretací, při nichž je závěr 0, je více a řešení úlohy by se nám větvilo. Vyjdeme proto z interpretace premisy, chceme aby byla 1. Optimální volbou je $\Im(\mathrm{V})=\{\alpha\}$, $\forall(\mathrm{M})=\{\beta\}$, protože se vyhýbá extrému jako například $\Im(\mathrm{V})=\emptyset$, $\Im(\mathrm{M})=\mathrm{U}$. Pak:

$\forall x\,(\mathrm{V}(x)\vee\mathrm{M}(x))$
1 α 1 0 α
0 β 1 1 β
1

b) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, což při zvolené interpretaci skutečně lze:

$$\begin{array}{llll}
\forall x\ V(x) & \vee & \forall x\ M(x) & \\
\quad 1\ \alpha & & \quad 0\ \alpha & \\
\quad 0\ \beta & & \quad 1\ \beta & \\
\underline{0} & & \underline{0} & \\
& \mathit{0} & &
\end{array}$$

Úsudek tedy není platný.

3)

Někdo miluje každého.

Každý je někým milován.

Formalizace:

$$\frac{\exists x \forall y\ M(x,y)}{\forall y \exists x\ M(x,y)}$$

Nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto např. $\Im(M)=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\cancel{\langle\alpha,\gamma\rangle},\langle\beta,\alpha\rangle,\langle\beta,\beta\rangle,\cancel{\langle\beta,\gamma\rangle},\langle\gamma,\alpha\rangle,\langle\gamma,\beta\rangle,\cancel{\langle\gamma,\gamma\rangle}\}$:

$$\begin{array}{ll}
\forall y \exists x\ M(x,y) & \\
\quad 1 & \alpha\ \alpha \\
\quad 1 & \alpha\ \beta \\
\quad 0 & \alpha\ \gamma \\
\quad 1 & \beta\ \alpha \\
\quad 1 & \beta\ \beta \\
\quad 0 & \beta\ \gamma \\
\quad 1 & \gamma\ \alpha \\
\quad 1 & \gamma\ \beta \\
\quad 0 & \gamma\ \gamma \\
\mathit{0} &
\end{array}$$

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1, což ale při dané $\Im$ není možné:

$$\begin{array}{ll}
\exists x \forall y\ M(x,y) & \\
\quad 1 & \alpha\ \alpha \\
\quad 1 & \alpha\ \beta \\
\quad 0 & \alpha\ \gamma \\
\quad 1 & \beta\ \alpha \\
\quad 1 & \beta\ \beta \\
\quad 0 & \beta\ \gamma \\
\quad 1 & \gamma\ \alpha \\
\quad 1 & \gamma\ \beta \\
\quad 0 & \gamma\ \gamma \\
\mathit{0} &
\end{array}$$

Úsudek je tedy platný. (Srov. odpovídající logicky pravdivou formuli PL.)

4)

Každý je někým milován.

Někdo miluje každého.

Formalizace:

$\forall y \exists x\ \mathrm{M}(x,y)$

$\exists x \forall y\ \mathrm{M}(x,y)$

Nechť U={α,β,γ}.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto např. $\Im(\mathrm{M})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\beta,\gamma\rangle,\langle\gamma,\beta\rangle\}$, jež už je namyšlena s ohledem na vyhodnocování premisy:

$\exists x \forall y\ \mathrm{M}\ (x,y)$	
1	α α
0	α β
0	α γ
0	β α
0	β β
1	β γ
0	γ α
1	γ β
0	γ γ

0

b) Interpretace premisy. Chceme, aby byla 1, přičemž respektujeme dosavadní interpretaci:

$\forall y \exists x\ \mathrm{M}(x,y)$	
1	α α
0	α β
0	α γ
0	β α
0	β β
1	β γ
0	γ α
1	γ β
0	γ γ

1

Úsudek tedy není platný.

14.8 Cvičení – náročnější úsudky s jednou premisou

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků. Pokud není uvedeno níže v příkladech jinak, nechť U={α,β,γ}.

1)

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Vše se vyvíjí nebo mění.

2)

Vše se vyvíjí a vše se mění.

Vše se vyvíjí a mění.

3)

Každý někoho obdivuje.

Někdo je obdivován každým.

4)

Někdo je obdivován každým.

Každý někoho obdivuje.

14.8 Řešení – náročnější úsudky s jednou premisou

1) Úsudek je platný. Formalizace:

$\forall x\, V(x) \vee \forall x\, M(x)$

$\forall x\, (V(x) \wedge M(x))$

Nechť U={α,β}. Aby závěr byl 0, musí být například $\mathfrak{I}(V)=\{\alpha,\beta\}$, $\mathfrak{I}(M)=\emptyset$. Chceme, aby premisa byla 1, což ale při takovéto $\mathfrak{I}$ není možné. (Srov. odpovídající logicky pravdivou formuli PL.)

2) Úsudek je platný. Formalizace:

$$\frac{\forall x\ \mathrm{V}(x) \land \forall x\ \mathrm{M}(x)}{\forall x\ (\mathrm{V}(x) \land \mathrm{M}(x))}$$

Nechť U={α,β}. Aby závěr byl 0, musí platit, že ani intepretace V, ani M není rovna U. Ale zkusíme vyjít od interpretace premisy. Aby premisa byla 1, tak by muselo být $\Im(\mathrm{V})=\Im(\mathrm{M})=\{\alpha,\beta\}=\mathrm{U}$. Jenže pak by nemohl být závěr 0. (Srov. odpovídající logicky pravdivou formuli PL.)

3) Úsudek není platný. Formalizace:

$$\frac{\forall x \exists y\ \mathrm{O}(x,y)}{\exists y \forall x\ \mathrm{O}(x,y)}$$

S ohledem na cíle promýšlíme interpretaci obou formulí. Aby premisa byla 1, tak např. $\Im(\mathrm{O})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\beta,\gamma\rangle,\langle\gamma,\beta\rangle\}$. Při této $\Im$ je ovšem závěr nepravdivý, což jsme chtěli.

4) Úsudek je platný. Formalizace:

$$\frac{\exists y \forall x\ \mathrm{O}(x,y)}{\forall x \exists y\ \mathrm{O}(x,y)}$$

Aby závěr byl 0, tak např. $\Im(\mathrm{O})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\beta,\gamma\rangle,\cancel{\langle\gamma,\beta\rangle}\}$. Jenže při tomto typu interpretace premisa nemůže být 1. (Srov. odpovídající logicky pravdivou formuli PL.)

14.9 Příklady – úsudky, které jsou nebo připomínají kategorické sylogismy

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků.

1)

Žádný pták neletěl do vesmíru.
Někteří živočichové nejsou ptáci.

Někteří živočichové letěli do vesmíru.

Formalizace („LV“ je zjednodušenou formalizací „letěli do vesmíru“):

$$\forall x\ (\mathrm{P}(x) \rightarrow \neg \mathrm{LV}(x))$$
$$\exists x\ (\check{\mathrm{Z}}(x) \wedge \neg \mathrm{P}(x))$$

$$\exists x\ (\check{\mathrm{Z}}(x) \wedge \mathrm{LV}(x))$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 1, a proto například $\Im(\check{\mathrm{Z}})=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\gamma\}$, $\Im(\mathrm{LV})=\{\cancel{\alpha},\beta,\cancel{\gamma}\}$:

$\exists x\ (\check{\mathrm{Z}}(x) \wedge \mathrm{LV}(x))$

0 α 0 0 α
0 β 0 1 β
1 γ 0 0 γ

0

b) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto musí být vzhledem k dosavadní interpretaci Ž být $\Im(\mathrm{P})=\{\cancel{\gamma},\ldots\}$:

$\exists x\ (\check{\mathrm{Z}}(x) \wedge \neg \mathrm{P}(x))$

0 α ? ? ? α
0 β ? ? ? β
1 γ 1 1 0 γ

1

c) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, avšak respektujeme přitom dosud získané dílčí interpretace predikátových symbolů:

$\forall x\ (\mathrm{P}(x) \rightarrow \neg \mathrm{LV}(x))$

? α ? 1 0 α
? β ? 0 1 β
0 γ 1 1 0 γ

Vidíme, že nám nic nebrání zúplnit interpretaci tak, aby i tato premisa byla pravdivá. Takže tím bychom získali alespoň jednu interpretaci, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr nepravdivý. Úsudek tedy není platný.

2)

Žádné prvočíslo není dělitelné čtyřmi.
Některá prvočísla jsou sudá.

Některá sudá čísla nejsou dělitelná čtyřmi.

Formalizace („D4“ je zjednodušenou formalizací „(být) dělitelný čtyřmi“, neboť složenost původního predikátu neovlivňuje platnost tohoto úsudku a tak ji nemusíme zohledňovat):

$$\begin{array}{l} \forall x\,(P(x)\to\neg D4(x)) \\ \exists x\,(P(x)\wedge S(x)) \\ \hline \exists x\,(S(x)\wedge\neg D4(x)) \end{array}$$

Nechť $U=\{_1,_2,_3,_4\}$, $e(x)={}_3$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto například $\Im(S)=\{_4\}$, $\Im(D4)=\{_4\}$ (fakticky vzato je závěr pravdivý právě kvůli číslu $_2$, my ale nyní v zájmu sestavení protipříkladu kontrafaktuálně navrhujeme, že není):

$$\begin{array}{l} \exists x\,(S(x)\wedge\neg D4(x)) \\ \quad \begin{array}{cccccc} 0 & _1 & 0 & 1 & 0 & _1 \\ 0 & _2 & 0 & 1 & 0 & _2 \\ 0 & _3 & 0 & 1 & 0 & _3 \\ 1 & _4 & 0 & 0 & 1 & _4 \end{array} \\ \mathit{0} \end{array}$$

b) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, proto když ohodnocením x je $_4$, tak toto číslo nesmí být v interpretaci P, tj. $\Im(P)=\{\cancel{{}_4},...\}$ (číslo „$_4$“ je přeškrtnuto), aby v daném řádku nebylo $1\to0$. Danou interpretaci dále nezúplňujeme, stejně bude celá premisa 1:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(P(x)\to\neg D4(x)) \\ \quad \begin{array}{cccccc} ? & _1 & 1 & 1 & 0 & _1 \\ ? & _2 & 1 & 1 & 0 & _2 \\ ? & _3 & 1 & 1 & 0 & _3 \\ 0 & _4 & 1 & 0 & 1 & _4 \end{array} \\ \mathit{1} \end{array}$$

c) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, ale musíme přitom zohlednit dosavadní dílčí interpretace predikátových symbolů:

$$
\begin{array}{l}
\exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge \mathrm{S}(x))\\
\qquad ?_{1}\ \ 0\ \ 0_{1}\\
\qquad ?_{2}\ \ 0\ \ 0_{2}\\
\qquad ?_{3}\ \ 0\ \ 0_{3}\\
\qquad 0_{4}\ \ 0\ \ 1_{4}\\
\mathit{0}
\end{array}
$$

Vidíme, že premisa pravdivá není. Při revizi postupu zjistíme, že opravdu nelze nalézt takovou interpretaci, kdy by premisy byly pravdivé a závěr nikoli. Úsudek je tedy platný.

3)

Žádní pečení holubi nelétají.
Vše, co létá, má křídla.

Něco, co má křídla, není pečený holub.

Formalizace („PH" je zjednodušená formalizace „(být) pečený holub", což je predikát, jehož vnitřní struktura se nijak nepodílí na platnosti úsudku):

$$
\begin{array}{l}
\forall x\,(\mathrm{PH}(x)\rightarrow\neg \mathrm{L}(x))\\
\forall x\,(\mathrm{L}(x)\rightarrow \mathrm{K}(x))\\
\hline
\exists x\,(\mathrm{K}(x)\wedge\neg \mathrm{PH}(x))
\end{array}
$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byla 0, proto např. $\Im(\mathrm{K})=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ a $\Im(\mathrm{PH})=\{\alpha,\beta,\gamma\}$:

$$
\begin{array}{l}
\exists x\,(\mathrm{K}(x)\wedge \neg \mathrm{PH}(x))\\
\qquad 0\ \ \alpha\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ \alpha\\
\qquad 1\ \ \beta\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ \beta\\
\qquad 0\ \ \gamma\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \gamma\\
\mathit{0}
\end{array}
$$

b) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto musíme zajistit, aby pro α i γ byl antecedent 0, když už je pro ně konsekvent 0. Proto ℑ(L)={α,...,γ} (následně je premisa 1, protože je 1 i ten řádek, kdy nevíme, zda β je v ℑ(L)):

$\forall x\,(L(x) \rightarrow K(x))$

0	α	1	0	α
?	β	1	1	β
0	γ	1	0	γ

1

c) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, respektujeme však při tom dosavadní dílčí interpretace predikátových symbolů:

$\forall x\,(PH(x) \rightarrow \neg L(x))$

1	α	1	1	0	α
1	β	?	?	?	β
0	γ	1	1	0	γ

Aby tato premisa byla 1, stačí vhodně zúplnit interpretaci L na ℑ(L)={α,β,γ}. Našli jsme tedy interpretaci, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. Úsudek tedy není platný.

14.10 Cvičení – úsudky, které jsou nebo připomínají kategorické sylogismy

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků. Pokud není uvedeno níže v příkladech jinak, nechť U={α,β,γ}.

1)

Některí psi štěkají.
Všichni psi jsou domestikovaní živočichové.

Některí domestikovaní živočichové štěkají.

2)

Pierre Boulez je dirigent.
Všichni dirigenti znají noty.
Všichni dirigenti jsou hudebníci.

Někteří hudebníci znají noty.

3)

Žádný cizinec neviděl vnitřek tohoto zámku.
Někteří přítomní nejsou cizinci.

Někteří přítomní viděli vnitřek tohoto zámku.

4)

Žádná kniha v mé knihovně není napínavá.
Všechny detektivky jsou napínavé.

Žádná kniha v mé knihovně není detektivka.

5)

Některé zuby jsou bílé.
Všechno bílé je krásné.

Něco bílého nejsou zuby.

6)

Žádný učený z nebe nespadl.
Každý filosof je učený.

Žádný filosof z nebe nespadl.

14.10 Řešení – úsudky, které jsou nebo připomínají kategorické sylogismy

1) Úsudek je platný. Ve formalizaci pojímáme „domestikovaní živočichové“ jako jednoduchý monadický predikát, proto „DŽ“:
$\exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge \check{\mathrm{S}}(x))$
$\forall x\,(\mathrm{P}(x)\rightarrow \mathrm{D\check{Z}}(x))$
―――――――――――――
$\exists x\,(\mathrm{D\check{Z}}(x)\wedge \check{\mathrm{S}}(x))$
Aby závěr byl 0, tak volíme např. $\Im(\mathrm{D\check{Z}})=\{\cancel{\alpha},\beta,\cancel{\gamma}\}$, $\Im(\check{\mathrm{S}})=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\gamma\}$. Aby pak první premisa byla 1, tak musí být $\Im(\mathrm{P})=\{\gamma,...\}$. Jenže když prošetříme fungování dosavadních dílčích interpretací predikátových symbolů v druhé premise, zjistíme, že tato premisa nemůže být pravdivá. Interpretace však nejde pozměnit tak, aby nakonec premisy byly pravdivé a závěr nikoli.

2) Úsudek je platný. Formalizace („znát noty“ nereprezentujeme pomocí $\exists y\,(\mathrm{N}(y)\wedge \mathrm{Z}(x,y))$, ale jen $\mathrm{ZN}(x)$, protože pro ověření platnosti úsudku je to dostatečné):
$\mathrm{D}(\mathrm{b})$
$\forall x\,(\mathrm{D}(x)\rightarrow \mathrm{ZN}(x))$
$\forall x\,(\mathrm{D}(x)\rightarrow \mathrm{H}(x))$
―――――――――――――
$\exists x\,(\mathrm{H}(x)\wedge \mathrm{ZN}(x))$
Nechť $\Im(\mathrm{b})=\beta$. Aby závěr byl 0, tak např. $\Im(\mathrm{H})=\{\cancel{\alpha},\beta,\cancel{\gamma}\}$, $\Im(\mathrm{ZN})=\{\cancel{\alpha},\cancel{\beta},\gamma\}$. Aby první premisa byla 1, musí být $\Im(\mathrm{D})=\{\beta,...\}$. Když doposud získané dílčí interpretace vsuneme do druhé premisy, zjistíme, že naše $\Im(\mathrm{D})$ způsobuje $1\rightarrow 0$ v řádku, kde je β. Když bychom ale upravili interpretaci tak, aby v daném řádku bylo $1\rightarrow 1$, tak by se situace $1\rightarrow 0$ přenesla do třetí premisy.

3) Úsudek není platný. Formalizace („VVZ“ je zjednodušenou formalizací „vidět vnitřek tohoto zámku“):
$\forall x\,(\mathrm{C}(x)\rightarrow \neg \mathrm{VVZ}(x))$
$\exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge \neg \mathrm{C}(x))$
―――――――――――――
$\exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge \mathrm{VVZ}(x))$

Aby závěr byl 0, tak např. $\mathfrak{I}$(P)={α,β,γ}, $\mathfrak{I}$(VVZ)={α,β,γ}. Aby druhá premisa byla 1, tak $\mathfrak{I}$(C)={β,...}. Tuto interpretaci lze lehko zúplnit tak, aby první premisa byla taky 1.

4) Úsudek je platný. Formalizace („KK" je zjednodušenou formalizací predikátu „(být) kniha v mé knihovně"):

$\forall x\ (\mathrm{KK}(x)\rightarrow\neg \mathrm{N}(x))$
$\forall x\ (\mathrm{D}(x)\rightarrow \mathrm{N}(x))$

$\forall x\ (\mathrm{KK}(x)\rightarrow\neg \mathrm{D}(x))$

Aby závěr byl 0, stačí např. $\mathfrak{I}$(KK)={α,...}, $\mathfrak{I}$(D)={α,...}. Aby druhá premisa byla 1, musíme kvůli $\mathfrak{I}$(D) dát $\mathfrak{I}$(N)={α,...}. Poté však zjistíme, že při této $\mathfrak{I}$ nemůže být pravdivá první premisa. Tuto interpretaci ale nelze nijak opravit a nahradit jinou interpretací tak, aby všechny premisy byly pravdivé a závěr nikoli.

5) Úsudek není platný. Formalizace:

$\exists x\ (\mathrm{Z}(x)\wedge \mathrm{B}(x))$
$\forall x\ (\mathrm{B}(x)\rightarrow \mathrm{K}(x))$

$\exists x\ (\mathrm{B}(x)\wedge\neg \mathrm{Z}(x))$

Od interpretace první premisy a nikoli od závěru vycházíme proto, že interpretace premisy je výrazně jednodušší, byť u toho už myslíme na budoucí interpretaci závěru. Navrhujeme například $\mathfrak{I}$(B)=$\mathfrak{I}$(Z)=U. Při této interpretace je závěr vskutku 0. Aby pak byla druhá premisa 1, musí být $\mathfrak{I}$(K)=U, čemuž nic nebrání. Našli jsme tedy interpretaci, při níž jsou premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

6) Úsudek je platný. Formalizace („SN" je zjednodušenou formalizací „spadnout z nebe"):

$\forall x\ (\mathrm{U}'(x)\rightarrow\neg \mathrm{SN}(x))$
$\forall x\ (\mathrm{F}(x)\rightarrow \mathrm{U}'(x))$

$\forall x\ (\mathrm{F}(x)\rightarrow\neg \mathrm{SN}(x))$

Aby závěr byl 0, musí být např. $\mathfrak{I}$(F)={α,...}, $\mathfrak{I}$(SN)={α,...}. Aby druhá premisa byla 1, tak kvůli $\mathfrak{I}$(F) musí být $\mathfrak{I}$(U′)={α,...}. Jenže pak nemůže být pravdivá první premisa. Nelze však najít interpretaci, kdy by tomu nebylo obdobně, tedy neexistuje interpretace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr nikoli.

14.11 Příklady – náročnější úsudky

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků.

1)

Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.
Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.
Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.

Žádný majitel obligací není akcionář.

Formalizace:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\check{C}(x)\rightarrow(O(x)\vee A(x))) \\ \forall x\,(\check{C}(x)\rightarrow\neg(O(x)\wedge A(x))) \\ \forall x\,(O(x)\rightarrow\check{C}(x)) \\ \hline \forall x\,(O(x)\rightarrow\neg A(x)) \end{array}$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby závěr byl 0. Proto musí být aspoň v jednom řádku 1→0, mějme tedy například $\Im(O)=\{\alpha,...\}$ a $\Im(A)=\{\alpha,...\}$:

$$\begin{array}{lcccccc} \forall x\,(O(x)\rightarrow\neg A(x)) \\ & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ & ? & \beta & ? & ? & ? & \beta \\ & ? & \gamma & ? & ? & ? & \gamma \\ \mathit{0} \end{array}$$

b) Interpretace třetí premisy. Chceme, aby byla 1, proto nesmí být ani v jednom řádku 1→0. S ohledem na dosavadní interpretaci O proto musí být $\Im(\check{C})=\{\alpha,...\}$:

$$\begin{array}{lccccc} \forall x\,(O(x)\rightarrow\check{C}(x)) \\ & 1 & \alpha & 1 & 1 & \alpha \\ & ? & \beta & ? & ? & \beta \\ & ? & \gamma & ? & ? & \gamma \end{array}$$

c) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto nesmí být ani v jednom řádku $1{\rightarrow}0$; respektujeme při tom ale doposud získané dílčí interpretace:

$$\begin{array}{l}
\forall x\ (\check{C}(x) \rightarrow \neg(O(x) \wedge A(x))) \\
\quad 1\ \alpha\ 0\ 0\ \ 1\ \alpha\ 1\ 1\ \ \alpha \\
\quad ?\ \beta\ ?\ ?\ \ ?\ \beta\ ?\ ?\ \ \beta \\
\quad ?\ \gamma\ ?\ ?\ \ ?\ \gamma\ ?\ ?\ \ \gamma \\
\mathit{0}
\end{array}$$

Vidíme, že daná druhá premisa není pravdivá. (Interpretace první premisy není potřeba, první premisa je nadbytečná, jak si lze ověřit; při navržené interpretaci je ovšem pravdivá.) Při revizi našeho postupu zjistíme, že ani neexistuje interpretace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr nikoli. Úsudek je tedy platný.

2)

Každý, kdo má rád Jiřího, bude spolupracovat s Milanem.
Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Láďou.
Petr bude spolupracovat pouze s kamarády Karla.

Jestliže Karel kamarádí s Láďou, Petr nemá rád Jiřího.

Formalizace:

$$\begin{array}{l}
\forall x\ (R(x,j) \rightarrow S(x,m)) \\
\forall x\ (K(x,l) \rightarrow \neg K(m,x)) \\
\forall x\ (S(p,x) \rightarrow K(x,k)) \\
\hline
K(k,l) \rightarrow \neg R(p,j))
\end{array}$$

Nechť $U=\{\iota,\kappa,\lambda,\mu,\pi\}$ (tj. Jiří, Karel, Láďa, Milan, Petr), $e(x)=\kappa$, $\Im(j)=\iota$, $\Im(k)=\kappa$, $\Im(l)=\lambda$, $\Im(m)=\mu$.

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být $\Im(K)=\{\langle\kappa,\lambda\rangle,...\}$ a $\Im(R)=\{\langle\pi,\iota\rangle,...\}$:

$$\begin{array}{l}
K(k,l) \rightarrow \neg R(p,j)) \\
1\ \ \kappa\ \lambda\ \ \mathit{0}\ \ 0\ 1\ \pi\ \iota
\end{array}$$

b) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, proto nesmí být ani v jednom řádku 1→0. Proto $\Im$(S)={⟨π,μ⟩,...} (zatím se nezajímáme o jiné hodnoty *x* než π):

$$
\begin{array}{l}
\forall x\,(R(x,j)\rightarrow S(x,m))\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots\\
\quad 1\ \pi\ \iota\ \ 1\ 1\ \pi\ \mu\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

c) Interpretace třetí premisy. Chceme, aby byla 1, proto nesmí být ani v jednom řádku 1→0; proto $\Im$(K)={⟨μ,κ⟩,⟨κ,λ⟩,...} (nezajímáme se o jiné hodnoty *x* než μ):

$$
\begin{array}{l}
\forall x\,(S(p,x)\rightarrow K(x,k))\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots\\
\quad 1\ \pi\ \mu\ \ 1\ \ 1\ \ \mu\ \kappa\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

d) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, proto nesmí být ani v jednom řádku 1→0. Zatím se nezajímáme o jiné hodnoty *x* než κ; prověříme naši doposud získanou interpretaci $\Im$(K)={⟨μ,κ⟩,⟨κ,λ⟩,...}:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\,(K(x,l)\rightarrow \neg K(m,x))\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\quad 1\ \kappa\ \lambda\ \ 0\ \ 0\ 1\ \ \mu\ \ \kappa\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Vidíme, že při doposud získaných dílčích interpretacích není druhá premisa pravdivá. Revize postupu pak ukazuje, že ani nelze navrhnout interpretaci, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr nikoli. Úsudek je tedy platný.

3)

Každý lékař doporučuje antikoncepci.
Žádná antikoncepce není zcela spolehlivá.

Nic zcela spolehlivého není doporučeno lékařem.

Formalizace:

$$\begin{array}{l}
\forall x\ (\mathrm{L}(x)\rightarrow\forall y\ (\mathrm{A}(y)\rightarrow\mathrm{D}(x,y))\\
\forall x\ (\mathrm{A}(x)\rightarrow\neg\mathrm{S}(x))\\
\hline
\forall x\ (\mathrm{S}(x)\rightarrow\forall y\ (\mathrm{L}(y)\rightarrow\neg\mathrm{D}(x,y))
\end{array}$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být aspoň v jednom řádku 1→0. Uvažme, že to bude v řádku, kdy hodnotou x je např. α. Při takovémto ohodnocení x musí být pravdivou $\mathrm{S}(x)$, proto $\mathfrak{I}(\mathrm{S})=\{\alpha,...\}$. Při takovémto ohodnocení x musí být nepravdivou otevřená formule $\forall y\ (\mathrm{L}(y)\rightarrow\mathrm{D}(x,y))$, tj. musí být např. $\mathfrak{I}(\mathrm{L})=\{\beta,...\}$, $\mathfrak{I}(\mathrm{D})=\{\langle\alpha,\beta\rangle,...\}$:

$$\begin{array}{l}
\forall x\ (\mathrm{S}(x)\rightarrow\forall y\ (\mathrm{L}(y)\rightarrow\mathrm{D}(x,y))\\
\quad\ \underline{1}\ \ \alpha \quad\ \ 0\ \ \underline{0}\ \begin{cases} ?\ \alpha\ ?\ \ ?\ \ \alpha\alpha\\ 1\ \beta\ 0\ \ 0\ \ \alpha\beta\\ ?\ \gamma\ ?\ \ ?\ \ \alpha\gamma \end{cases}\\
\quad\ ?\ \ \beta\ \ ?\ \ ?\ \ \{\\
\quad\ ?\ \ \gamma\ \ ?\ \ ?\ \ \{\\
\mathit{0}
\end{array}$$

b) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, přičemž doposud získaná interpretace nás nutí k $\mathfrak{I}(\mathrm{A})=\{\cancel{\alpha}\}$:

$$\begin{array}{l}
\forall x\ (\mathrm{A}(x)\rightarrow\neg\mathrm{S}(x))\\
\quad\ 0\ \ \alpha\ \ 1\ \ 0\ 1\ \alpha\\
\quad\ ?\ \ \beta\ \ ?\ \ ?\ ?\ \beta\\
\quad\ ?\ \ \gamma\ \ ?\ \ ?\ ?\ \gamma\\
\mathit{?}
\end{array}$$

c) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, ale přitom musíme zohlednit doposud získané dílčí interpretace, jež zatím vedou k tomuto:

$$
\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\forall x\ (L(x) \to \forall y\ (A(y)\to D(x,y))} \\
 & \underline{?}\ \alpha & & \\
 & & ?\ \underline{?} & \left\{ \begin{array}{l} 0\ \alpha\ ?\ ?\ \alpha\ \alpha \\ ?\ \beta\ ?\ 0\ \alpha\ \beta \\ ?\ \gamma\ ?\ ?\ \alpha\ \gamma \end{array}\right. \\
 & 1\ \beta & ?\ ? & \{ \\
 & ?\ \gamma & ?\ ? & \{ \\
? & & &
\end{array}
$$

Po inspekci vidíme, že je možno naši interpretaci zúplnit tak, aby i tato premisa byla pravdivá. Tím by při nepravdivosti závěru byly pravdivé všechny. Úsudek tedy není platný.

4)

Jestliže jsou všichni opilí, tak existuje aspoň jeden dobrák, který je podněcuje.
Adam nikoho nepodněcuje.

Jestliže jsou všichni dobráci, tak existuje aspoň jeden opilec, který je podněcuje.

Za formalizaci budeme považovat:

$$\forall x\ (O(x)\to\exists y\ (D(y)\land P(y,x))$$
$$\forall x\ \neg P(a,x)$$

$$\forall x\ (D(x)\to\exists y\ (O(y)\land P(y,x))$$

a) Interpretace závěru. Chceme, aby byl 0, proto musí být aspoň v jednom řádku 1→0. Uvažme, že to bude v řádku, kdy hodnotou x je např. α. Při takovémto ohodnocení x musí být pravdivou $D(x)$, proto $\Im(D)=\{\alpha,...\}$. Při takovémto ohodnocení x musí být nepravdivou otevřená formule $\exists y\ (O(y)\land P(y,x))$, přičemž my si vybereme tu interpretaci, kdy $\Im(O)=\emptyset$ (poněvadž první premisa bude pak pravdivá); $\Im(P)$ necháváme neurčenu:

$\forall x\ (D(x) \rightarrow \exists y\ (O\ (y) \wedge P(y,x)))$
$\quad \underline{1}\ \ \alpha \qquad\quad \lceil 0\ \ \alpha\ \ 0\ ?\ \alpha\alpha$
$\qquad\qquad 0\ \ \ \underline{0} \{ 0\ \ \beta\ \ 0\ ?\ \beta\alpha$
$\qquad\qquad\qquad\quad \lfloor 0\ \ \gamma\ \ 0\ ?\ \gamma\ \alpha$
$\quad ?\ \ \beta\ \ ?\ \ ?$

$\quad ?\ \ \gamma\ \ ?\ \ ?$
0

b) Interpretace první premisy. Chceme, aby byla 1, ale přitom musíme zohlednit doposud získané dílčí interpretace, jež vedou k tomuto:

$\forall x\ (O(x) \rightarrow \exists y\ (D(y) \wedge P(y,x))$
$\quad 0\ \ \alpha \qquad ?\ \{$
$\quad 0\ \ \beta \qquad ?\ \{$
$\quad 0\ \ \gamma \qquad ?\ \{$
1

c) Interpretace druhé premisy. Chceme, aby byla 1, přičemž doposud získaná interpretace nám nechává možnost, že $\Im(P)=\{\cancel{\langle\alpha,\alpha\rangle},\cancel{\langle\alpha,\beta\rangle},\cancel{\langle\alpha,\gamma\rangle},...\}=\emptyset$, takže druhá premisa je skutečně pravdivá:

$\forall x\ \neg P\ (a,x)$
$\quad 1\ 0\ \ \alpha\alpha$
$\quad 1\ 0\ \ \alpha\beta$
$\quad 1\ 0\ \ \alpha\gamma$
1

Dosavadní interpretaci lze několika způsoby zúplnit. Takže jsme našli množinu interpretací, při nichž je závěr nepravdivý a všechny premisy pravdivé. Úsudek tedy není platný.

14.12 Cvičení – náročnější úsudky

Pomocí metody protipříkladu, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků. Pokud není uvedeno níže v příkladech jinak, nechť U={α,β,γ}.

1)

Nikdo z přítomných není lékař.
Každý pozvaný je přítomen.
Jestliže Petr zval, Karel je pozván.

Je-li Karel lékař, pak Petr nezval.

2)

Kdo zná Markétu i Jiřího, ten Markétu lituje.
Někteří nelitují Markétu, ačkoliv ji znají.

Někdo zná Markétu, ale ne Jiřího.

3)

Jestliže jsou všichni nadšenci, tak existuje aspoň jeden mrzout, který s nimi nesouhlasí.
Anna se všemi souhlasí.

Jestliže jsou všichni mrzouti, tak existuje aspoň jeden nadšenec, který s nimi souhlasí.

4)

Každý, kdo má raději Annu než Báru, obdivuje Gabrielu.
Dora Gabrielu neobdivuje.

Dora nemá Annu raději než Báru.

5)

Každý muž má v oblibě nějakého živočicha.
Adam nemá v oblibě žádného živočicha.

Adam není muž.

6)

Každý, kdo je ekonom, doporučuje každou reformu.
Žádná reforma není zcela úspěšná.

Co není zcela úspěšné, není žádným ekonomem doporučeno.

14.12 Řešení – náročnější úsudky

1) Úsudek je platný. Formalizace:

$\forall x\ (\mathrm{P}(x) \rightarrow \neg \mathrm{L}(x))$
$\forall x\ (\mathrm{P}'(x) \rightarrow \mathrm{P}(x))$
$\mathrm{Z}(\mathrm{p}) \rightarrow \mathrm{P}'(\mathrm{k})$

$\mathrm{L}(\mathrm{k}) \rightarrow \neg \mathrm{Z}(\mathrm{p})$

Nechť $\mathrm{U}=\{\kappa,\pi,\alpha\}$ (tj. Karel, Petr, Adam), $e(x)=\pi$, $\Im(\mathrm{k})=\kappa$, $\Im(\mathrm{p})=\pi$. Aby závěr byl 0, tak musí být $\Im(\mathrm{L})=\{\kappa,...\}$, $\Im(\mathrm{Z})=\{\pi,...\}$. Aby třetí premisa byla 1, ani v jednom řádku nesmí být $1\rightarrow 0$, proto musí být $\Im(\mathrm{P}')=\{\kappa,...\}$. Aby druhá premisa byla 1, ani v jednom řádku nesmí být $1\rightarrow 0$, proto musí být $\Im(\mathrm{P})=\{\kappa,...\}$. Jenže když doposud získané dílčí interpretace uplatníme u první premisy, zjistíme, že při ohodnocení x pomocí κ nastává $1\rightarrow 0$, proto premisa pravdivá být nemůže.

2) Úsudek je platný. Formalizace:

$\forall x\ ((\mathrm{Z}(x,\mathrm{m}) \wedge \mathrm{Z}(x,\mathrm{j})) \rightarrow \mathrm{L}(x,\mathrm{m}))$
$\exists x\ (\neg \mathrm{L}(x,\mathrm{m}) \wedge \mathrm{Z}(x,\mathrm{m}))$

$\exists x\ (\mathrm{Z}(x,\mathrm{m}) \wedge \neg \mathrm{Z}(x,\mathrm{j}))$

Nechť $\mathrm{U}=\{\alpha,\iota,\mu\}$ (tj. Adam, Jiří, Markéta); $\Im(\mathrm{j})=\iota$, $\Im(\mathrm{m})=\mu$. Aby závěr byl 0, tak např. $\Im(\mathrm{Z})=\{\cancel{\langle\alpha,\mu\rangle},\langle\iota,\mu\rangle,\cancel{\langle\mu,\mu\rangle},\langle\alpha,\iota\rangle,\langle\iota,\iota\rangle,\cancel{\langle\mu,\iota\rangle}\}$. Zjistíme, že při této interpretaci je první premisa ve druhém řádku v antecedentu 1, proto musí být konsekvent taky 1, odkud získáváme $\Im(\mathrm{L})=\{\langle\iota,\mu\rangle,...\}$. Když pak vyhodnotíme druhou premisu, zjistíme, že nemůže být v druhém řádku pravdivá. Když revidujeme dosavadní postup, zjistíme, že oprava interpretace tak, aby všechny premisy byly pravdivé a závěr nepravdivý, není možná.

3) Úsudek není platný. Formalizace:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\mathrm{N}(x)\rightarrow\exists y\,(\mathrm{M}(y)\wedge\neg \mathrm{S}(x,y)) \\ \forall x\,\mathrm{S}(\mathrm{a},x) \\ \hline \forall x\,(\mathrm{M}(x)\rightarrow\exists y\,(\mathrm{N}(y)\wedge \mathrm{S}(x,y)) \end{array}$$

Aby závěr byl 0, tak třeba proto $\Im(\mathrm{M})=\{\alpha,...\}$ a $\Im(\mathrm{N})=\emptyset$. Pak první premisa je 1, což jsme chtěli. V zájmu toho, aby i druhá premisa byla 1, nechť třeba $\Im(\mathrm{S})=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\alpha,\gamma\rangle,...\}$ (při $\Im(\mathrm{a})=\alpha$), což mj. nijak neohrožuje pravdivost první premisy.

4) Úsudek je platný. Formalizace:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\mathrm{R}(x,\mathrm{a},\mathrm{b})\rightarrow \mathrm{O}(x,\mathrm{g})) \\ \neg \mathrm{O}(\mathrm{d},\mathrm{g}) \\ \hline \neg \mathrm{R}(\mathrm{d},\mathrm{a},\mathrm{b}) \end{array}$$

Nechť $U=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Dále nechť $\Im(\mathrm{a})=\alpha$, $\Im(\mathrm{b})=\beta$, $\Im(\mathrm{g})=\gamma$, $\Im(\mathrm{d})=\delta$. Aby závěr byl 0, tak musí být $\Im(\mathrm{R})=\{\langle\delta,\alpha,\beta\rangle,...\}$. Aby druhá premisa byla 1, tak musí být $\Im(\mathrm{O})=\{\cancel{\langle\delta,\gamma\rangle},...\}$. Jenže v první premise, má-li x jako hodnotu δ, tak v daném řádku je $1\rightarrow 0$ a daná premisa kvůli tomu není pravdivá.

5) Úsudek je platný. Formalizace:

$$\begin{array}{l} \forall x\,(\mathrm{M}(x)\rightarrow\exists y\,(\check{\mathrm{Z}}(y)\wedge \mathrm{O}(x,y))) \\ \forall x\,(\check{\mathrm{Z}}(x)\rightarrow\neg \mathrm{O}(\mathrm{a},x)) \\ \hline \neg \mathrm{M}(\mathrm{a}) \end{array}$$

Aby závěr byl 0, tak musí být $\Im(\mathrm{M})=\{\alpha,...\}$. Chceme, aby první premisa byla 1. Proto když antecedent první premisy je při nějakém ohodnocení 1, tj. $\Im(\mathrm{M}(x))[e]=1$, například při $e(x)=\alpha$, tak musíme předejít tomu, aby konsekvent byl 0, čili aby byl 1. Proto například $\Im(\check{\mathrm{Z}})=\{\cancel{\alpha},\beta\}$ a $\Im(\mathrm{O})=\{\langle\alpha,\beta\rangle,...\}$. Jenže následně nemůže být druhá premisa 1. Při ověření postupu si potvrdíme, že nelze najít takovou interpretaci, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr nikoli.

6) Úsudek není platný. Formalizace:

$\forall x\ (E(x) \to \forall y\ (R(y) \to D(x,y)))$
$\forall x\ (R(x) \to \neg Ú(x))$

$\forall x\ (\neg Ú(x) \to \forall y\ (E(y) \to \neg D(x,y)))$

Aby závěr byl 0, tak v zájmu pravdivosti antecedentu třeba $\Im$(Ú)={α,...} a v zájmu nepravdivosti konsekventu třeba $\Im$(E)={β,...} a $\Im$(D)={⟨α,β⟩,...}. V první premise prošetřeme případ, kdy by *x* bylo β; antecedent je tehdy 1, proto chceme, aby konsekvent byl také 1. Když zkoumáme, jaká interpretace R a D by učinila tento konsekvent pravdivý, tak se přitom díváme i na to, jak to zapůsobí na druhou premisu. Pravdivost obou premis je zaručena například když $\Im$(R)=∅. Interpretaci lze následně zúplnit tak, aby obě premisy byly pravdivé a závěr při tom nikoli.

15. Axiomatické teorie a pojem důkazu

V této kapitole si oživíme a pak rozšíříme některé poznatky z kapitoly „13. Axiomatický systém VL a pojem důkazu“ z knihy „Úvod do logiky: klasická výroková logika“.

15.1 Axiomatizace PL1

Víme, že *axiomatický systém* (či *formální systém*, *kalkul*), jež je vyjádřením nějaké logiky, je kromě i. jazyka (bez sémantiky) dán ii. (konečnou) množinou základních, evidentních, a tedy důkaz nevyžadujících pravd, tzv. *axiomů*, a za iii. (konečnou) množinou *odvozovacích pravidel* (alternativně nazývaných *dedukční* či *derivační pravidla*). Z množiny vybraných formulí se tak pomocí pravidel odvození dostáváme k dalším formulím; tyto dokazované formule jsou *teorémy*, tedy formule, k nimž v daném axiomatickém systému existuje *důkaz*. Tímto způsobem jsme s to ovládnout nekonečnou množinu pravd, jež jsou vyjádřitelné daným jazykem.

Zde si uvedeme běžně uvažovaný axiomatický systém PL1. V bodě 2.a) uvidíme, že tento axiomatický systém v sobě zahrnuje běžně používaný axiomatický systém VL.

1) Formální jazyk

Viz kapitolu 3.1 (výrokové spojky odlišné od ¬ a → lze vypustit).

2) Axiomová schémata:

Axiomová schémata PL1

a)

Axiom 1: $A \to (B \to A)$

Axiom 2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Axiom 3: $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

b)

Axiom 4: $\forall x\, A \to A[t/x]$ *Axiom specifikace*

Axiom 5: $\forall x\, (A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$ *Axiom distribuce*

(kde A neobsahuje žádný volný výskyt proměnné x)

Axiom 4 bývá alternativně nazýván *Axiom konkretizace* anebo též *Axiom univerzální instanciace* (angl. „universal instantiation", srov. níže pravidlo UI); připomeňme si, že „$A[t/x]$" znamená, že term t je substituovatelný za x. Oba axiomy jsme si uvedli již v seznamu logicky pravdivých formulí (kap. 4).

3) Pravidla odvozování:

Pravidla odvozování PL

Modus ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

Pravidlo generalizace (PG)

Nechť A je formule, která může obsahovat volnou proměnnou x.

$$\frac{A}{\forall x\, A}$$

Pravidlo generalizace má úzkou souvislost s *Větou o uzávěru*: Pro každou formuli A, a libovolnou proměnnou x, a každou teorii T platí, že $T \vdash A$ platí právě tehdy, když platí $T \vdash \forall x\, A$.

Dodejme, že Pravidlo generalizace nelze přeměnit na axiom $A \to \forall x\, A$, poněvadž tato formule není logicky pravdivá, jak lze snadno ukázat (uvažme, že A je $B(x)$, přičemž pro nějakou hodnotu je $B(x)$ nepravdivá, takže $\forall x\, B(x)$ je nepravdivá, ač při určitém ohodnocení je $B(x)$ pravdivá). Je-li však A logicky pravdivá nebo uzavřená formule, tak se $A \to \forall x\, A$ chová jako logicky pravdivá. V důsledku budeme muset omezit platnost Věty o dedukci, viz sekci 15.3.

15.2 Axiomatické teorie

Pojem axiomatického systému PL si hned rozšíříme na pojem *axiomatické teorie*, často nazývané *formální teorie* a v logických textech obvykle jen *teorie*. Axiomatická teorie T je vlastně množinou všech formulí, které lze odvodit z axiomů T pomocí odvozovacích pravidel T. Účelem každé teorie je pojednávat nějakou předmětnou oblast, třeba oblast ostrého uspořádání.

Jazyk každé axiomatické teorie T proto obsahuje *speciální symboly*, často se říká i *mimologické symboly*, jež se týkají předmětné oblasti, o nichž daná teorie vypovídá. Například speciální symbol „<“ je prostředek vypovídání o vztahu ostrého uspořádání. Dále axiomatická teorie obsahuje *speciální axiomy* týkající se právě těchto speciálních symbolů. Tyto axiomy jsou nazývány též *mimologické axiomy* či *vlastní axiomy*, nebo jen *axiomy teorie*. Ze speciálních axiomů T lze vyvozovat další tvrzení této teorie. Jako speciální axiomy jsou brány vždy uzavřené formule, tj. sentence, protože pro ty splývá splnitelnost a pravdivost, takže PG se pro ně chová korektně. Nutno podotknout, že speciální axiomy nemusí být logicky platné.

Axiomatická teorie

Každá *axiomatická teorie T* je dána:

i. jazykem T, jež obsahuje speciální symboly T

ii. množinou speciálních axiomů T.

Teorii T chápejme jako jakousi nadstavbu nějakého axiomatického systému PL. Pro případy s PL1 se pak někdy hovoří o *prvořádových teoriích*. Axiomatické systémy PL, tedy *predikátové kalkuly*, můžeme na druhou stranu chápat jako axiomatické teorie s prázdnou množinou speciálních symbolů a speciálních axiomů.

Proto teorii T vymezujeme jen tím, co přesahuje nějaký axiomatický systém PL, totiž množinou speciálních symbolů a množinou speciálních axiomů. Nepotřebujeme tedy stanovovat množinu odvozovacích pravidel teorie T, chápeme ji jako totožnou s tou množinou odvozovacích pravidel, kterou má přijatý axiomatický systém PL.

Jak už jsme naznačovali, příkladem axiomatické teorie je *teorie ostrého uspořádání*. Je to teorie s jazykem PL1, který je obohacen o speciální binární predikátový symbol „<“. Axiomy této teorie jsou:

$\forall x\, \neg(x<x)$ (ireflexivita <)
$\forall x \forall y \forall z\, [(x<y) \rightarrow ((y<z) \rightarrow (x<z))]$ (tranzitivita <)

Speciální axiomy teorie *T* vlastně *implicitně definují* speciální symboly (resp. jimi denotované objekty) v nich obsažené. Kdybychom dané axiomy změnili, například bychom k těmto axiomům přidali axiom:

$\forall x \forall y\, ((x<y) \vee (y<x) \vee (x=y))$ (totálnost <)

tak bychom vymezili jiný vztah než <, v daném případě vztah ostrého lineárního uspořádání. Zmiňované tři axiomy tedy tvoří teorii ostrého lineárního uspořádání. Další dva obdobné příklady uvádíme v kapitole 16. o identitě, tj. o (symbolu) =.

Axiomatizovány už byly rozsáhlé partie matematiky; problémy axiomatizace matematických teorií jsou předmětem *metamatematiky*. Z pohledu logiky patří k nejznámějším teoriím různé axiomatické teorie množin (ZFC, NBG). V matematické logice je velká pozornost věnována axiomatickým teoriím aritmetiky.

Zde si uvedeme nejprve příklad teorie *elementární aritmetiky*. Jazykem této teorie je jazyk PL1 s identitou (tento jazyk vysvětlujeme až níže v kapitole 16.; znaku = však čtenář jistě rozumí). Ten je obohacen o konstantu „0" (nula, přesněji: nejmenší přirozené číslo) a funkční symboly „*S*" (následník, značen někdy pomocí ′ psaným za číslem), „+" (operátor sčítání) a „×" (operátor násobení). Speciální axiomy této teorie jsou tyto (kde „EA*n*", pro $1 \leq n \leq 7$, je pracovní označení):

EA1	$S(x) \neq 0$
EA2	$(S(x)=S(y)) \rightarrow (x=y)$
EA3	$(x \neq 0) \rightarrow \exists y\, (S(y)=x)$
EA4	$(x+0)=x$
EA5	$(x+S(y))=S(x+y)$
EA6	$(x \times 0)=0$
EA7	$(x \times (S(y))=((x \times y)+x)$

Uzávěry těchto axiomů (např. $\forall x\, (S(x) \neq 0)$) jsou axiomy *Robinsonovy aritmetiky* značené Q; na tyto axiomy je zvykem stručně referovat pomocí „Q*n*". (Robinsonova aritmetika je neúplná teorie, např. v ní nejsou dokazatelné, ani vyvratitelné formule $(x+y)=(y+x)$ či $(x \times y)=(y \times x)$. Navíc je nerozhodnutelná; k pojmu nerozhodnutelnosti viz níže.)

Peanova aritmetika, značená PA, vznikne z Robinsonovy aritmetiky přidáním *schématu axiomu indukce* (pro libovolnou vlastnost P):

$$[P(0) \wedge \forall x\, (P(x) \rightarrow P(\mathrm{S}(x))] \rightarrow \forall x\, P(x)$$

(Jak dokázal Kurt Gödel ve své slavné Větě o neúplnosti, k ní viz níže, Peanova aritmetika je neúplná. Peanova aritmetika je také nerozhodnutelná.) *Presburgerova aritmetika* je slabší než Peanova aritmetika, její jazyk neobsahuje symbol násobení × a z výše uvedených axiomů disponuje axiomy EA1, EA2, EA4, EA5 a schématem axiomu indukce. (Presburgerova aritmetika je úplná a rozhodnutelná teorie.)

Nyní uvedeme některé sémantické pojmy vztažené k pojmu axiomatické teorie, především pojem modelu teorie a sémantického důsledku teorie. Připomeňme si, že definice modelu teorie je vlastně případem modelu množiny formulí, neboť teorii můžeme vidět jako množinu formulí, jež jsou generovány z axiomů T.

Model teorie

Jestliže $\mathcal{M}$ je struktura pro jazyk teorie T a v $\mathcal{M}$ je splněn každý z axiomů T, tak $\mathcal{M}$ je *modelem teorie* T. Značíme $\mathcal{M} \models T$.

Alternativně se říká, že T *platí v* $\mathcal{M}$ nebo že T je *pravdivá v* $\mathcal{M}$. Varianta se splněním (v námi užívaném smyslu), podtrhuje senzitivitu vzhledem k ohodnocením.

Pro ilustrativní příklad modelu teorie, přirozená čísla jsou jakožto struktura $\mathcal{N}$ modelem teorií Q i PA; $\mathcal{N}$ je tzv. standardní model aritmetiky.

Poznamenejme, že v důsledku toho, že axiomy T generují teorémy, tak při korektnosti T platí, že každý teorém T je pravdivý v každém modelu T. (O modelech teorií byla v rámci matematické logiky zjištěna spousta zajímavých poznatků. Například *Skolemova-Löwenheimova věta* (ve směru „dolů") říká, že jestliže $\mathcal{M}$ je modelem T s (nejvýše) spočetným jazykem, tak existuje model $\mathcal{M}'$ této T, který je (nejvýše) spočetný.)

Definici sémantického důsledku množiny formulí z kapitoly 3. nyní explicitně modifikujeme pro případ teorií.

Sémantický důsledek teorie

Formule A je *sémantickým důsledkem teorie* T, značeno $T \vDash A$, právě tehdy, když je formule A splněna každým modelem teorie T.

Alternativně se říká, že formule A je *pravdivá v teorii* T, nebo že je (*tauto)logicky odvoditelná z teorie* T. (Pro srovnání: v rámci VL jsme mluvili o (tauto) logickém důsledku množiny formulí T.) Například formule jako $(x+y)=(y+x)$ je sémantickým důsledkem PA.

K vlastnostem axiomatických teorií viz níže sekci 15.4.

15.3 Důkaz a dokazatelnost

Důkazy spočívají v syntaktické manipulaci s formulemi pomocí pravidel odvozování. (Připomeňme si též, že axiomy můžeme vidět jako bezpředpokladová pravidla.) Nevyžadují tedy odvolání na sémantiku daných formulí, natož na nějakou (třeba sémantickou) intuici. Pojmy, které jsme v této souvislosti definovali v rámci VL, zůstávají v platnosti.

Definicí pojmu důkazu se zdržovat nebudeme, je totiž jen speciálním případem *důkazu z předpokladů* (též řečeného *důkaz z hypotéz*). V takovém důkazu jsou přítomny předpoklady a vlastní dokazované formule, takže jsou určitou formální obdobou běžných úsudků, jež sestávají z premis a závěrů. Důkaz z předpokladů jsme už v „Úvodu do logiky: klasická výroková logika" (kap. 12) definovali tak, že nepotřebuje úpravu formulace kvůli Pravidlu generalizace, jak je někdy v literatuře činěno. Stačí jen namísto o axiomatickém systému mluvit o teorii T.

Důkaz z předpokladů

Nechť T je teorie. Konečná posloupnost formulí $A_1, A_2, ..., A_n$ je *důkazem ze systému předpokladů teorie* T právě tehdy, když pro každé i takové, že $1 \leq i \leq n$, je formule A_i buď

1) axiomem T nebo
2) je prvkem T nebo
3) je odvozena aplikací některého odvozovacího pravidla T na formule $A_j, ..., A_k$, přičemž $j, ..., k < i$.

Důkaz bez předpokladů má $T=\emptyset$, proto v něm nedochází k situaci 2).

Připomeňme si, že rozlišujeme důkazy z předpokladů a důkazy bezpředpokladové. Důkazy z předpokladů jsou vhodné pro ověřování úsudků kvůli tomu, že předpoklady odpovídají premisám a dokázané formule závěrům odděleným od premis slůvkem „tudíž". Kromě techniky *přímého důkazu* budeme příležitostně využívat techniku *důkazu sporem* („reductio ad absurdum", častěji jen „reductio", což se dopisuje do anotace příslušného kroku). Při důkazu sporem klademe negaci dokazovaného závěru jako jeden z předpokladů, a pokud odvodíme formuli, která protiřečí některé z dříve uvedených formulí (je s ní ve sporu), tento předpoklad – tedy negace závěru – neplatí, a tudíž platí dokazovaný závěr.

Pro jednoduchý ilustrativní příklad důkazu sporem dokažme $A \vdash (A \lor B)$ (naší teorií T je tedy $\{A\}$). Jednotlivé formule, zvané *kroky důkazu*, po straně komentujeme *anotacemi*, jež indikují, jak byla daná formule odvozena (aplikací kterého pravidla na který krok). V závorkách nyní přidáváme ještě popisující vysvětlení:

1.	A	předpoklad	(čili to, co je nalevo od $\vdash$)
2.	$\neg(A \lor B)$	předpoklad důkazu sporem	(tj. negace toho, co je napravo od $\vdash$)
3.	$\neg A \land \neg B$	DM (2)	(De Morganův zákon)
4.	$\neg A$	Simp (1,2)	(zákon pro rozdělení konjunkce)
5.	$(A \lor B)$	reductio (4)	(4 je ve sporu s 1, proto platí závěr)

Důkaz sporem se zakládá na *Větě o důkazu sporem*: $T \vdash A$ právě tehdy, když $T \cup \{\neg A\} \vdash \neg(B \rightarrow B)$ (kde formule $\neg(B \rightarrow B)$ reprezentuje spor; „$T \cup \{\neg A\}$" se často píše „$T, \neg A$"). V sémantické obdobě této věty (s $\vDash$ namísto $\vdash$) je $T \cup \{\neg A\}$ nesplnitelnou množinou formulí, tj. množinou formulí, která nemá model.

Pojem dokazatelnosti nyní rovnou poněkud rozšíříme pro případ dokazování v teorii T.

Dokazatelnost formule

Formule A je *dokazatelná v axiomatické teorii T* právě tehdy, když v této teorii T existuje důkaz, jehož je tato formule A posledním členem. Značíme $T \vdash A$.

Formule A je *vyvratitelná v axiomatické teorii T* právě tehdy, když je v T dokazatelná formule $\neg A$. (Formule A, která není dokazatelná nebo vyvratitelná v axiomatické teorii T, je nezávislá na T.)

Teorém

Formule A je *teorémem axiomatické teorie* T právě tehdy, když je dokazatelná v T. Značíme $\vdash_T A$ (ev. $T \vdash A$).

Konečně si uvedeme *Větu o dedukci* (VD; *Dedukční teorém*). VD pomáhá zkracovat důkazy, poněvadž dokážeme-li (při předpokladech T), že $A \vdash B$, tak můžeme za dokázané považovat i $(A \rightarrow B)$.

Věta o dedukci

Pro formuli B a každou uzavřenou formuli A (tj. sentenci) jazyka teorie T platí, že $T \cup \{A\} \vdash B$ právě tehdy, když $T \vdash (A \rightarrow B)$.

Uvědomme si závažný rozdíl vzhledem k VD námi formulované pro VL: nynější formulace se explicitně omezuje na uzavřené formule PL, tj. na sentence. Důvodem je již výše v sekci 15.1 uváděná nikoli logická pravdivost formulí $A \rightarrow \forall x\, A$ (protože A může být pravdivá, ale její uzávěr nikoli), čili nesmíme dovolit $T \vdash A \rightarrow \forall x\, A$ (daný axiomatický systém PL či teorie jej obsahující by nebyli korektní).

15.4 Vlastnosti axiomatických teorií

V rámci logiky jakožto oboru je studována řada zajímavých vlastností axiomatických teorií a souvisejících abstraktních problémů.

Například lze teorie studovat z hlediska jejich důkazové síly. Teorie S je *silnější* než T právě tehdy, když pro každou formuli A jazyků obou teorií platí, že jestliže $T \vdash A$, tak $S \vdash A$, ale existuje formule A taková, že jestliže $S \vdash A$, tak neplatí $T \vdash A$. Například Peanova aritmetika PA je silnější než Robinsonova aritmetika Q, poněvadž v PA je dokazatelná formule $(x+y)=(y+x)$, jež není dokazatelná v Q. Další zajímavé poznatky se týkají možnosti rozšiřování teorií, ale ty už jsou za hranicemi námi koncipovaného úvodu do logiky.

Připomeňme si z látky probírané v rámci VL, že čtyři hlavní vlastnosti axiomatických systémů jsou i. rozhodnutelnost – jsme s to rozhodnout o každé formuli, zda je či není teorémem, ii. bezespornost – systém negeneruje protiřečící si formule, a tím pádem pak vůbec všechny formule, iii. korektnost – systém generuje jen (logicky) pravdivé formule, a iv. úplnost – systém dokazuje všechny (logicky) pravdivé formule.

Nejprve definujeme *spornost* a *konzistenci teorie*:

Spornost/konzistence teorie (vč. PL)

Teorie T je *sporná* právě tehdy, když je v T dokazatelná jak A, tak $\neg A$. Teorie T, která není sporná, je *bezesporná, konzistentní*.

Jak je naznačeno v závorce u názvu definice, pojem spornosti/konzistence teorií je beze změn aplikovatelný i na teorie bez speciálních axiomů, tedy formální systémy (kalkuly) PL.

To, že teorie je sporná, obnáší, že je v ní dokazatelná každá formule daného jazyka. (Dále: platí-li $T \vdash A$, tak $T \cup \{\neg A\}$ je sporná.) Sporná teorie nemá žádný model, je to totiž vlastně množina formulí, která není splnitelná. Každá bezesporná teorie naopak má alespoň jeden model; tato vlastnost teorií je někdy označována jako *sémantická bezespornost* (příslušný teorém pak angl. „model existence theorem“). Formule A dokazatelná v T, tj. $T \vdash A$, je pravdivá v každém modelu T.

Další důležitou vlastností teorií je *rozhodnutelnost* (angl. „decidability“):

Rozhodnutelnost teorie

Teorie T je *rozhodnutelná* právě tehdy, když existuje efektivní procedura (algoritmus), která o každé formuli jazyka T rozhodne, zda je či není teorémem T.

Alonzo Church a Alan Turing ovšem nezávisle dokázali *nerozhodnutelnost PL1* (otázka rozhodnutelnosti byla v té době diskutována pod názvem „Entscheidungsproblem“, jako výzkumný úkol ji stanovil matematik David Hilbert). Následující není definice, ale tvrzení, k němuž existuje důkaz; ten zde nepodáváme.

Věta o nerozhodnutelnosti PL1

Žádná axiomatická teorie T zahrnující systém PL1 není rozhodnutelná.

Daný výsledek ovšem neznamená nějakou absolutní nerozhodnutelnost: pravdivé formule PL rozhodnutelné jsou (což dokázal rovněž Church), pouze některé nepravdivé formule nejsou rozhodnutelné. Dokonce platí, že všechny formule tzv. *monadického fragmentu PL1* jsou rozhodnutelné. Rozhodnutelné nejsou pouze některé nepravdivé formule *polyadického* (relačního) *fragmentu PL1*.

Další důležitou vlastností je *korektnost* teorie (angl. „soundness"):

Korektnost teorie

Axiomatická teorie T je *korektní* právě tehdy, když platí, že jestliže $T \vdash A$, tak $T \vDash A$.

Speciálně platí, že jestliže $\vdash A$, tak $\vDash A$.

V podobě (zde rovněž nedokazované) věty pro PL1 a teorie ji obsahující:

Věta o korektnosti PL1

Pro každou (prvořádovou) teorii T, a to vč. PL1, a každou formuli A jazyka teorie T platí, že každá formule A, která je dokazatelná z T, tj. $T \vdash A$, je sémantickým důsledkem T, tj. $T \vDash A$.

Speciálně platí, že pro každou formuli A, jestliže $\vdash A$, tak $\vDash A$.

Konečně tu je definice pojmu úplnosti (angl. „completeness"):

Úplnost teorie

Axiomatická teorie T je *úplná* právě tehdy, když platí, že jestliže $T \vDash A$, tak $T \vdash A$.

Speciálně platí, že jestliže $\vDash A$, tak $\vdash A$.

Pokud se někdy hovoří o *silné úplnosti*, pak je míněno: $T \vDash A$ právě tehdy, když $T \vdash A$, načež *slabou úplností* je míněno: $\vDash A$ právě tehdy, když $\vdash A$. Někteří autoři pod silnou úplností rozumí to, že T je konečnou množinou formulí. Někdy je úplnost teorie T zase definována takto: teorie T je úplná, když pro každou uzavřenou formuli A z T platí, že $\vdash A$ nebo $\vdash \neg A$. Příkladem úplné prvořádové teorie je Presburgerova aritmetika.

Kurt Gödel dokázal *Větu o sémantické úplnosti PL1*:

Věta o sémantické úplnosti PL1

Každá logicky pravdivá formule PL1 je dokazatelná, takže je-li $\vDash A$, pak $\vdash A$, kde A je formule jazyka PL1.

Přesněji, Gödel dokázal, že teorie T je konzistentní právě tehdy, když T má model, tj. existuje struktura, v níž jsou všechny věty T pravdivé. V důsledku to znamená, že $T \vdash_{\mathrm{PL}} A$ právě tehdy, když A je pravdivá v každém modelu T.

Mnozí autoři formulují na rozdíl od nás Větu o úplnosti PL1 jako ekvivalenci, tj. $T \vdash A$ právě tehdy, když $T \vDash A$, a proto už nemluví o korektnosti, poněvadž ji mají zahrnutu do jejich pojmu úplnosti. O korektnosti mluví tito autoři až v souvislosti s deduktivními systémy: korektní je ten deduktivní axiomatický systém PL, který nám nedovolí odvodit neplatnou formuli.

Průběžně shrneme, že pro PL1 existují bezesporné, úplné (a také korektní), avšak nikoli rozhodnutelné axiomatické systémy (kalkuly). Stručně pak říkáme, že *PL1 je úplná, bezesporná,* avšak *nikoli rozhodnutelná*. (Pro srovnání si připomeňme, že VL je úplná, bezesporná i rozhodnutelná.)

PL druhého řádu, PL2, je sice také *bezesporná* a *nerozhodnutelná*, ale už *není úplná*. (Existují ovšem její dokazovací systémy, které jsou korektní vzhledem k tzv. henkinovským modelům.) Důkaz neúplnosti je proslulým výsledkem práce Kurta Gödela (původní důkaz byl později zjednodušen např. Johnem Barkleym Rosserem). Jím dokázaná věta bývá obvykle formulována následovně.

První Gödelova věta o neúplnosti

Žádné bezesporné a rekurzivně axiomatizovatelné rozšíření Robinsonovy aritmetiky Q (např. PA), jejímž modelem je $\mathcal{N}$, není úplnou teorií T.

Znamená to, že existuje formule pravdivá v $\mathcal{N}$, která není dokazatelná, ani vyvratitelná v takové T, jež by měla uváděné charakteristiky. Taková Gödelova, resp. Rosserova formule zní: „Nejsem dokazatelná v T“. (Rekurzivní axiomatizovatelnost znamená algoritmickou rozhodnutelnost množiny axiomů, tj. vlastně efektivní zadání T.) Stojí za poznámku, že tato neúplnost je principiální: tzv. zúplnění T vzniklé přidáním dané Gödelovy, resp. Rosserovy formule je právě tak neúplnou teorií. Gödelův důkaz je založen na aritmetizaci syntaxe; díky tomu může kódovat formule, vč. problémové formule „Nejsem dokazatelná v T“, a dále na autoreferenci, tj. tzv. diagonálním lemmatu.

Druhá Gödelova věta o neúplnosti už ve své době vzbudila nemenší rozrušení, poněvadž protiřečila směrujícím ideám Hilbertova programu, podle něhož měly být všechny matematické problémy řešeny uvnitř jednoho formálního systému finitními prostředky.

Druhá Gödelova věta o neúplnosti

Žádné bezesporné a rekurzivně axiomatizovatelné rozšíření PA není teorií T, v níž je dokazatelná konzistentnost T.

15.5 Cvičení – základní pojmy axiomatických teorií a axiomatizace PL

1)

Uveďte, co značí následující zápisy:

a) $T \vdash A$

b) $T \vDash A$

c) $\mathcal{M} \vDash T$

2)

Uveďte Pravidlo generalizace a vysvětlete, proč ho nelze převést na logicky pravdivou formuli.

Definujte pojem:

3)

axiomatická teorie

4)

model teorie (tj. pravdivost teorie ve struktuře)

5)

sémantický důsledek teorie

6)

důkaz z předpokladů

7)

dokazatelná formule a teorém

8)
Věta o dedukci

9)
spornost / konzistence teorie

10)
rozhodnutelnost teorie

11)
korektnost teorie

12)
úplnost teorie

13)
Které vlastnosti má PL1? Které má PL2?
a) rozhodnutelnost, b) bezespornost, c) korektnost, d) úplnost.

14)
Formulujte První Gödelovu větu o neúplnosti.

15)
Formulujte Druhou Gödelovu větu o neúplnosti.

15.5 Řešení – základní pojmy axiomatických teorií a axiomatizace PL

1)
a) $T \vdash A$ znamená, že formule A je dokazatelná v T, tj. je teorémem T
b) $T \models A$ znamená, že formule A je sémantický důsledek teorie T
c) $\mathcal{M} \models T$ znamená, že struktura $\mathcal{M}$ je modelem teorie T, čili T je pravdivá v $\mathcal{M}$

13)
PL1 nemá a) rozhodnutelnost, má b) bezespornost, c) korektnost i d) úplnost. PL2 nemá a) rozhodnutelnost, má b) bezespornost, má c) korektnost, nemá d) úplnost.

Odpovědi na ostatní otázky lze snadno najít při postupném procházení kapitoly 15.

16. Identita

Jak už bylo výše řečeno, PL1 bývá z důvodu praktických aplikací často obohacována o *identitu* (rovnost). Ontologicky vzato je identita relace, v níž stojí každý prvek univerza, a to pouze a právě vzhledem k sobě. V podobě proslulého metafyzického *Principu identity*: Každá věc je se sebou identická. Množinově vzato je identita relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, je to tedy relace typu ekvivalence. Znak identity je často chápán jako logický (nikoli mimologický) symbol.

16.1 Rozšíření jazyka PL o identitu

K zavedení identity je třeba rozšířit jazyk PL1, vč. interpretace, a k axiomatizaci PL1 přidat jeden axiom a pravidlo.

Nejdříve rozšíříme abecedu o binární predikátový symbol identity, „=“. Gramatiku rozšíříme přidáním bodu, podle něhož je $(t_1=t_2)$ formulí. Rovnou identity píšeme infixní notací; vnější závorky budeme příležitostně vynechávat. Formule tvaru $\neg(t_1=t_2)$ jsou obvykle zapisovány „$(t_1\neq t_2)$“.

Pak dodáme interpretaci formulí tohoto tvaru: $\Im(t_1=t_2)[e]=1$ právě tehdy, když $\Im(t_1)[e]=\Im(t_2)[e]$, tj. když oba termy denotují jedno a totéž individuum. Na rozdíl od běžných predikátových symbolů má tedy predikát „=“ fixní interpretaci, jmenovitě relaci $\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\beta,\beta\rangle,...\}$, jež se sestává pouze a právě z dvojic tvaru $\langle\xi,\xi\rangle$.

Nakonec přidáme axiomy pro identitu.

Axiomy pro identitu

Axiom 6:	$\forall x\ (x=x)$	*Axiom identity*
Axiom 7:	$\forall x\forall y\ ((x=y)\rightarrow(A\leftrightarrow A[y/x]))$	*Leibnizův zákon substitutivity identit*
Axiom 8:	$\forall x\forall y\ ((x=y)\rightarrow(f(x)\leftrightarrow f(y)))$	

Všechny tři axiomy mohou být zadány ve stručnější formě bez obecných kvantifikátorů, disponujeme už totiž Pravidlem generalizace. Axiom 8 přijímáme, jen pokud máme zavedeny funkční termy. Axiomy 7–8 bývají mnohdy zadávány jako pravidla. Axiom 7 bývá v oblasti filosofické logiky často nazýván *Leibnizův princip substitutivity* či *Princip substitutivity identit* (angl. zkratka „SI“).

Zde jsou aspoň dva příklady z logiky a matematiky, které ukazují, jak důležité je přidání identity k PL1. První příklad je *teorií uspořádání*. To je teorie s jazykem PL1$^=$, který je obohacen o relační predikátový symbol „≤“. Axiomy této teorie jsou:

$$\forall x\,(x\leq x)$$
$$\forall x \forall y\,[((x\leq y)\wedge(y\leq x))\rightarrow(x=y)]$$
$$\forall x \forall y \forall z\,[((x\leq y)\wedge(y\leq z))\rightarrow(x\leq z)]$$

Přidáme-li k těmto axiomům axiom:

$$\forall x \forall y\,((x\leq y)\vee(y\leq x))$$

získáme *teorii lineárního uspořádání*.

Druhým příkladem je *teorie grup*, jejímž jazykem je jazyk PL1$^=$ obohacený o binární funkční symbol „×“, který zastupuje nějakou operaci, a dále konstantu „1“, což je tzv. neutrální (či jednotkový) prvek. (Grupy jsou totiž tvořeny množinami a na nich operujícími operacemi; příkladem grupy je množina celých čísel s operací sčítání, přičemž neutrálním prvkem je číslo 0). Axiomy jsou:

$$\forall x \forall y \forall z\,((x\times(y\times z))=((x\times y)\times z))$$
$$\forall x\,(((x\times 1)=x)\wedge((1\times x)=x)))$$
$$\forall x \exists y\,(((x\times y)=1)\wedge((y\times x)=1))$$

Teorie Abelových grup (příkladem je množina reálných čísel se sčítáním) pak vznikne přidáním axiomu:

$$\forall x \forall y\,((x\times y)=(y\times x)),$$

protože Abelova grupa je grupa, jež je komutativní.

Pomineme-li nyní oblast čisté logiky a matematiky, přidáním identity se zvyšují naše možnosti kontrolovat platnost jazykově formulovaných úsudků, jmenovitě těch, v nichž figuruje identita. Ta může být vyjádřena obraty jako „je rovno“, „je totéž“, „není nic jiného než“, ale i pouze „je“, které jsou použity ve smyslu identity. Ukažme si pro ilustraci úsudek, v němž zájmena „já“ a „ty“ pro jednoduchost reprezentujeme jen pomocí proměnných:

Já jsem Andrea.	x=a
Já nejsem muž.	$\neg$M(x)
Andrea není muž.	$\neg$M(a)

Pravidlo odpovídající axiomu 7 nám umožňuje, abychom na základě první premisy, v níž je tvrzena identita, dosadili do formule $\neg$M(x) za libovolný, tedy ne nutně každý, výskyt termu „x“ term „a“ a získat tak formuli $\neg$M(a).

16.2 Paradoxy identity

Gottlob Frege demonstroval překvapivé selhání Leibnizova principu substitutivity identit a to na nesčetněkrát diskutovaných příkladech jako:

Xenie ví, že Jitřenka je Jitřenka.	Xenie ví, že Jitřenka je planeta.
Jitřenka je Večernice.	Jitřenka je Večernice.
Xenie ví, že Jitřenka je Večernice.	Xenie ví, že Večernice je planeta.

První premisa je pravdivá, Xenie totiž ví, že určitý objekt je se sebou identický, což je triviální pravda. Podle druhého úsudku má Xenie jistou empirickou znalost. Druhá premisa obou úsudků je identitou, která nám dává podklad pro aplikaci Leibnizova principu, tedy k substituci do první premisy. Vyvozené konkluze však navzdory pravdivosti premis vůbec pravdivé být nemusí, protože Xenie nemusí mít ony poznatky. Takže oba úsudky ve skutečnosti platné nejsou. Leibnizův princip substitutivity identit tedy není korektním odvozovacím pravidlem, ačkoli se jako korektní pravidlo jeví.

Frege si povšiml, že na vině obecně není náhodná faktuální platnost premisy tvrdící identitu. To dokládá následující příklad (Frege sám zmiňoval znalost týkající se průsečíků jedná a druhé dvojice těžnic rovnostranného trojúhelníku):

Xenie ví, že 8=8.	Xenie ví, že 8 je Fibonacciho číslo.
$8=2^3$.	$8=2^3$.
Xenie ví, že $8=2^3$.	Xenie ví, že 2^3 je Fibonacciho číslo.

Xenie jistě není matematicky vševědoucí, nesmíme jí tedy na základě plejády matematických rovností připsat postoj k něčemu, k čemu ve skutečnosti postoj nemá.

Jako řešení problému Frege sice navrhl zachovat Leibnizův princip, ale omezil jeho aplikabilitu a to tím, že revidoval principy formalizace daných jazykově formulovaných úsudků. Doslova navrhl opustit *extenzionální* (*denotační*) *sémantiku*, podle níž výraz „*V*" jednoduše denotuje objekt *O*. Postuloval totiž entitu *V* (nazýval ji *smysl*, něm. „Sinn"; v této knize se budeme držet soudobého označení *význam*), která stojí v sémantickém schématu mezi „*V*" a *O* (v této knize *O* nazýváme *denotát*, ale Frege volil dobově adekvátní termín *význam*, něm. „Bedeutung"). Takže výraz „*V*" vyjadřuje význam *V* a denotuje denotát *O*, jenž je určen tím *V*. Sémantické schéma je takto *Fregeho sémantický trojúhelník*. Zatímco výraz „*V*" je s významem *V* spjat sémantickou konvencí jazyka („stůl" v češtině znamená stůl), tak denotát výrazu „*V*" je buď určitelný analyticky (to je případ matematických a logických výrazů jako „2^3"), nebo empiricky (například je pozorováním zjištěno, že denotátem výrazu „Jitřenka" je Venuše).

Fregeho řešení diskutovaného (*Fregeho*) *paradoxu identity* je pak následující. Zatímco premisy vyjadřující identitu se týkají denotátu (tj., „Jitřenka je Večernice" je pravdivá proto, že denotát, totiž Venuše, je se sebou identický), premisy vyjadřující postoje Xenie jsou vnitřně strukturovány tak, že vnořená věta slouží k poukazu na její význam. Xenie má postoj k propozici, že Jitřenka je Jitřenka, nikoli k tomu, že Venuše je se sebou identická (což jí mimochodem vůbec nemusí být známo). V duchu Fregeho koncepce jsou tedy agenti postojů zavázáni jen k rozumění významu svých slov, avšak extenzionalistická sémantika je chybně zavazuje též ke znalosti jejich denotátů, tedy k matematickým nebo empirickým znalostem. Fregem iniciovaná sémantika se nazývá *intenzionální sémantika* (dle historické terminologie je intenze něco, co určuje extenzi); ta je zevrubně zkoumána v prostředí filosofické logiky a formální sémantiky.

Nyní zčásti odbočíme k pozoruhodné *Russellově teorii deskripcí*. Bertrand Russell reagoval na Fregem odhalený Paradox identity radikálně jiným způsobem. Předně zdůraznil skutečnost, že je zásadní rozdíl mezi vlastními jmény jako „Venuše" a deskripcemi jako „Jitřenka" nebo „král Francie" (v anglickém jazyce jsou deskripce dobře poznat podle určitého členu, protože jsou vždy tvaru „the *F*", kde *F* je nějaká vlastnost). K selhávání substituce dochází markantně tehdy, když se pokoušíme substituovat nikoli vlastní jména, ale deskripce. Deskripce totiž není přímým pojmenováním objektu, deskripce nějaký objekt pouze opisuje. Takže mluvčímu nemusí být opisované individuum známo, což pak vede k selhání, neboť při substituování de facto skrytě předpokládáme, že mu známo je. Další problém tkví v tom, že opisované individuum ani nemusí existovat, jak je tomu například v případě deskripce „král Francie“.

Větu jako „Král Francie je holohlavý“ uměl Frege vyložit jakožto sdělující něco o významu (tj. fregovském smyslu) deskripce „král Francie“. Russell se ale postulování fregovských smyslů záměrně vyhnul, a radši trval na tom, že deskripce nikdy nejsou prostředky reference k individuím. Tento nezvyklý závěr má své opodstatnění v tom, že platnost úsudků není ponechána na empirické náhodě, zda v nich obsažená deskripce nějaký objekt popisuje nebo nikoli. Russell tedy nezacházel s deskripcemi jednoduše jako s nějakými termy, protože to by pak musel umožnit jejich substituci na základě Leibnizova principu. Russell místo toho prohlásil, že deskripce jsou sémanticky nesoběstačné entity; jako takové přispívají do významu věty pouze svými částmi (totiž vlastnostmi jako ‚být král‘), nepřispívají do významu věty opisovaným individuem. Tento svůj názor podpořil metodou technické eliminace deskripcí. Věta „Král Francie je holohlavý“ totiž podle něj není tvaru H(k), kde „k“ je term zastupující (neexistující) individuum, ale tvaru:

$$\exists x\ ((\mathrm{K}(x) \wedge \mathrm{H}(x)) \rightarrow \forall y\ (\mathrm{K}(y) \rightarrow (x=y)))$$

Slovně: existuje individuum *x* takové, že je-li *x* králem Francie a *x* je holohlavé, tak pro každé *y*, je-li *y* králem Francie, tak *x* je totožné s *y* (namísto této druhé $\rightarrow$ může být $\leftrightarrow$). Vidíme, že jádrem této analýzy je formalizace částečného kladného výroku, k níž je připojena podmínka $\forall y\ (\mathrm{K}(y) \rightarrow (x=y))$, která zajišťuje jedinečnost individua, jež má být králem Francie; všimněme si, že klíčové přitom bylo využití =.

Po druhé světové válce se díky rozvoji modální logiky a intenzionální sémantiky založené na pojmu možného světa v poměrně rozsáhlé debatě (R. Carnap, R. Barcan Marcusová, S. Kripke ad.) především přijalo, že deskripce jsou odlišné od vlastních jmen individuí. Význam deskripce byl v zájmu řešení Paradoxu identity technicky modelován jako funkce z tzv. možných světů do individuí. To umožnilo, aby deskripce zůstaly chápány jako sémanticky soběstačné entity, které do významu vět přispívají individuem, které je určeno daným možným světem. Technická implementace se ovšem po delší dobu neobešla bez omylů a potíží.

16.3 Numerické kvantifikátory

S pomocí identity lze definovat řadu tzv. *numerických kvantifikátorů*, z nichž mnohé odpovídají běžně používaným jazykovým kvantifikátorům. Tyto kvantifikátory vždy uvádíme v kontextu schématické věty, v níž se individuím přisuzuje vlastnost P.

Nejčastěji se setkáme s kvantifikátorem „existuje alespoň jedno x, které je P", ale to je jen stylistická varianta „existuje x, které je P", tj. $\exists x\ \mathrm{P}(x)$. Jinak je tomu s následujícími dvěma kvantifikátory, pod nimiž hned uvádíme příslušné formalizace:

Existuje nanejvýše jedno x, které je P.
$\forall x \forall y\ ((\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y)) \rightarrow (x=y))$

Existuje přesně jedno x, které je P.
$\exists x\ (\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\ (\mathrm{P}(y) \rightarrow (x=y)))$

Druhý kvantifikátor srov. s výše Russellovou analýzu deskripcí. Jeho zápis bývá někdy zkracován na $\exists! x\ \mathrm{P}(x)$. Další kvantifikátory určující konkrétní počet předmětů konstruujeme po způsobu:

Existují alespoň tři předměty s vlastností P.
$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ (\mathrm{P}(x_1) \wedge \mathrm{P}(x_2) \wedge \mathrm{P}(x_3) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3))$

Existují právě tři předměty s vlastností P.
$$\begin{aligned}\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ ((\mathrm{P}(x_1) \wedge \mathrm{P}(x_2) \wedge \mathrm{P}(x_3) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)) \\ \wedge \forall y\ (\mathrm{P}(y) \rightarrow ((y=x_1) \vee (y=x_2) \vee (y=x_3)))\end{aligned}$$

V hořejší i spodnější z formulí zajišťuje $((x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3))$, že hodnoty x_1, x_2 a x_3 se vzájemně liší, takže individuí s vlastností P nemůže být méně než 3. Ve spodnější z formulí pak $((y=x_1) \vee (y=x_2) \vee (y=x_3))$ zajišťuje, že nejsou více než 3 individua s vlastností P.

S identitou lze samozřejmě formalizovat i věty jako:

Všichni kromě Adama mají vlastnost P.
$\forall x\ ((x \neq \mathrm{a}) \rightarrow \mathrm{P}(x))$

16.4 Cvičení – základní poznatky o identitě

Uveďte:

1) Axiom identity
2) Leibnizův zákon substitutivity identit
3) Paradox identity
4) Russellovu metodu eliminace deskripcí na příkladu jako „Prezident USA je černoch".
5) Formalizujte věty:
   a) „Všechna individua kromě Adama a Báry jsou P",
   b) „Alespoň dvě individua jsou P",
   c) „Právě dvě individua jsou P",
   d) „Nanejvýše dvě individua jsou P".

16.4 Řešení – základní poznatky o identitě

Pro odpovědi na 1)–2) viz 16.1. Pro odpovědi na 3)–4) viz 16.2.

5) a) $\forall x\ (((x \neq \mathrm{a}) \wedge (x \neq \mathrm{b})) \rightarrow \mathrm{P}(x))$
   b) $\exists x_1 \exists x_2\ (\mathrm{P}(x_1) \wedge \mathrm{P}(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2))$
   c) $\exists x_1 \exists x_2\ ((\mathrm{P}(x_1) \wedge \mathrm{P}(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2)) \wedge \forall y\ (\mathrm{P}(y) \rightarrow ((y = x_1) \vee (y = x_2))))$
   d) $\forall x_1 \forall x_2 \forall y\ ((\mathrm{P}(x_1) \wedge \mathrm{P}(x_2) \wedge \mathrm{P}(y)) \rightarrow ((y = x_1) \rightarrow (y = x_2)))$

17. Důkazové systémy

V této kapitole si v každé sekci nejdříve stručně připomeneme některé poznatky z kapitoly 14. Důkazové systémy z knihy „Úvod do logiky: klasická výroková logika“. Poté si vysvětlíme, jak se v daných dokazovacích systémech dokazují formule PL, což je ukázáno na uváděných příkladech (ke cvičení může čtenář využít již výše uvedené příklady úsudků). Všechny diskutované systémy jsou korektní v tom smyslu, že neumožňují z pravdivých formulí odvodit formuli nepravdivou.

17.1 Hilbertovská dedukce

Už výše jsme vlastně uvedli axiomatický systém Hilbertova typu. Zde ho jen pro pohotovou referenci stručně připomeneme:

1) Jazyk PL s operátory $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$.

2) Množina axiomových schémat (přidáváme i axiomy pro identitu):

Ax 1:	$A\rightarrow(B\rightarrow A)$	
Ax 2:	$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	
Ax 3:	$(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$	
Ax 4:	$\forall x\, A\rightarrow A[t/x]$	Axiom specifikace
Ax 5:	$\forall x\,(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow\forall x\, B)$	Axiom distribuce
	(kde A neobsahuje žádný volný výskyt proměnné x)	
Ax 6:	$\forall x\,(x=x)$	Axiom identity
Ax 7:	$\forall x\forall y\,((x=y)\rightarrow(A\leftrightarrow A[y/x]))$	Leibnizův zákon substitutivity identit
Ax 8:	$\forall x\forall y\,((x=y)\rightarrow(f(x)\leftrightarrow f(y)))$	

3) Množina pravidel odvození:

Modus ponens (MP)	Pravidlo generalizace (PG)
$A \rightarrow B$	A
A	———
———	$\forall x\, A$
B	
	podmínka: žádný výskyt proměnné x nesmí být volný ani v A, ani v žádné jiné formuli nad ———

Příležitostně budeme jako pravidlo uplatňovat výše uváděnou Větu o dedukci (VD), neboť to umožňuje zkracovat důkazy formulí.

Ačkoli axiomů je více než v hilbertovské dedukci v rámci VL, dokazování není snadnější. Naše možnosti se však zvyšují s rozšířením počtu pravidel. Následně se ale stírá hranice mezi hilbertovskou dedukcí a přirozenou dedukcí, jíž se budeme věnovat záhy. Stojí za zmínku, že v současných úvodech do logiky se s hilbertovskou dedukcí setkáme jen vzácně, v textech určených studentům matematiky.

17.2 Příklady – důkazy v hilbertovském systému dedukce

1)

Dokažte $\forall x\, A \vdash A[t/x]$, tedy tzv. *Pravidlo univerzální instanciace* (UI), jež je obdobou Axiomu specifikace:

1.	$\forall x\, A$	předpoklad
2.	$\forall x\, A \rightarrow A[t/x]$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
3.	$A[t/x]$	MP (2,1)

S pomocí VD bychom dané pravidlo dokázali jednoduše takto:

1.	$\vdash \forall x\, A \rightarrow A[t/x]$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
2.	$\forall x\, A \vdash A[t/x]$	VD (1)

2)

Dokažte, že jestliže $\vdash A$, tak $\vdash A[t/x]$. Tedy, že je-li dokazatelná formule A, tak je dokazatelná každá její instance (tzv. *Věta o instancích*):

1.	A	předpoklad
2.	$\forall x\, A$	PG (1)
3.	$\forall x\, A \rightarrow A[t/x]$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
4.	$A[t/x]$	MP (3,2)

3)

Dokažte $(A \rightarrow B) \vdash (A \rightarrow \forall x\, B)$, tedy Pravidlo zavedení $\forall$ do konsekventu:

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$\forall x\, (A \rightarrow B)$	PG (1)
3.	$\forall x\, (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x\, B)$	Axiom distribuce (tj. Ax 5)
4.	$A \rightarrow \forall x\, B$	MP (3,2)

4)

Dokažte $\forall x \forall y\, A \vdash \forall y \forall x\, A$:

1.	$\forall x \forall y\, A$	předpoklad
2.	$\forall x \forall y\, A \rightarrow \forall y\, A$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
3.	$\forall y\, A$	MP (2,1)
4.	$\forall y\, A \rightarrow A$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
5.	A	MP (4,3)
6.	$\forall x\, A$	PG (5)
7.	$\forall y \forall x\, A$	PG (6)

5)

Dokažte $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\,P(x) \vdash \forall x\,Q(x)$ s pomocí již dokázaného pravidla Univerzální instanciace (UI), jehož důkaz viz výše v příkladu 1):

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	předpoklad
2.	$\forall x\,P(x)$	předpoklad
3.	$P(x) \rightarrow Q(x)$	UI (1) (naším t je x)
4.	$P(x)$	UI (2) (naším t je x)
5.	$Q(x)$	MP (3,4)
6.	$\forall x\,Q(x)$	PG (5)

6)

Dokažte $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\,P(x) \vdash \forall x\,Q(x)$ bez pomoci UI:

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	předpoklad
2.	$\forall x\,P(x)$	předpoklad
3.	$\forall x\,P(x) \rightarrow P(x)$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
4.	$P(x)$	MP (3,2)
5.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
6.	$P(x) \rightarrow Q(x)$	MP (5,3)
7.	$Q(x)$	MP (6,4)
8.	$\forall x\,Q(x)$	PG (7)

7)

Dokažte $\vdash A[t/x] \rightarrow \exists x\,A$, tj. zákon existenční generalizace. Vypomůžeme si tautologiemi VL a DM pro záměnu kvantifikátorů:

1.	$\vdash \forall x\,\neg A \rightarrow \neg A[t/x]$	Axiom specifikace (tj. Ax 4)
2.	$\vdash \neg\neg\forall x\,\neg A \rightarrow \neg A[t/x]$	tautologie VL (z. $\neg\neg$; 1)
3.	$\vdash A[t/x] \rightarrow \neg\forall x\,\neg A$	tautologie VL (z. transpozice $\rightarrow$; 2)
4.	$\vdash A[t/x] \rightarrow \exists x\,A$	DM (3)

8)

Dokažte $A \rightarrow B$ (kdy x není volná proměnná v B) $\vdash \exists x\, A \rightarrow B$. Vypomůžeme si tautologiemi VL a dále DM pro záměnu kvantifikátorů, dále v důkazu využijeme pravidlo pro převod $\forall$ do konsekventu, $\forall x\, (A \rightarrow B)$ / $(A \rightarrow \forall x\, B)$:

1.	$\vdash A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$\vdash \neg B \rightarrow \neg A$	tautologie VL (z. transpozice $\rightarrow$; 1)
3.	$\vdash \forall x\, (\neg B \rightarrow \neg A)$	PG (2)
4.	$\vdash \neg B \rightarrow \forall x\, \neg A$	pravidlo zavedení $\forall$ do konsekventu (3)
5.	$\vdash \neg B \rightarrow \neg\neg \forall x\, \neg A$	tautologie VL (z. $\neg\neg$; 4)
6.	$\vdash \neg \forall x\, \neg A \rightarrow B$	tautologie VL (z. kontrapozice $\rightarrow$; 5)
7.	$\vdash \exists x\, A \rightarrow B$	DM (6)

17.3 Přirozená dedukce

Metoda přirozené dedukce PL je zobecněním metody přirozené dedukce VL. Od této metody se liší pouze tím, že pracuje s obecnějším jazykem PL a v souvislosti s tím používá rozšířenou množinu výchozích dedukčních pravidel.

Z odvozovací pravidel VL si v následující tabulce připomeneme jen část. Uvádíme v ní i několik pravidel, které jsou zjevně patřičně upravenými tautologiemi VL (každá tautologie tvaru $A \rightarrow B$ je odvozovacím pravidlem A / B; v případě $A \leftrightarrow B$ pak A / B a B / A).

Modus ponens (MP)

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

Modus tollens (MT)

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Disjunktivní sylogismus (DS)

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \qquad \text{nebo:} \qquad \frac{A \vee B \quad \neg B}{A}$$

Pravidlo Dunse Scota (PDS)

$$\frac{A \quad \neg A}{B} \qquad \text{event.} \qquad \frac{A \wedge \neg A}{B}$$

Hypotetický sylogismus (HS)

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

Reductio ad absurdum (RAA)

$$\frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow \neg B}{\neg A}$$

Pravidlo simplifikace (Simp)

nebo:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Pravidlo přidání (Add)

nebo:

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

Pravidlo dvojité negace (¬¬)

nebo:

$$\frac{\neg\neg A}{A} \qquad \frac{A}{\neg\neg A}$$

Pravidlo zavedení ∧

nebo:

$$\frac{\begin{array}{l}A\\ B\end{array}}{A \wedge B} \qquad \frac{\begin{array}{l}A\\ B\end{array}}{B \wedge A}$$

Pravidlo De Morgana (DM-VL)

nebo:

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B} \qquad \frac{(A \vee B)}{\neg(\neg A \wedge \neg B)}$$

Pravidlo De Morgana (DM-VL)

nebo:

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B} \qquad \frac{A \wedge B}{\neg(\neg A \vee \neg B)}$$

Pravidlo převodu ∨ na →

nebo:

$$\frac{\neg A \vee B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \vee B}{\neg A \rightarrow B}$$

Pravidlo převodu → na ∨

nebo:

$$\frac{\neg A \rightarrow B}{A \vee B} \qquad \frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$$

(V literatuře řada autorů ukazuje důkazy, v nichž užijí například Simp a poté jimi používané pravidlo komutativity, aby tak dostali konjunkci se žádaným pořadím konjunktů; důvodem pro užití pravidla komutativity je to, že na rozdíl od nás tito autoři formulují Simp jen v jedné variantě.)

Pro odvozování v rámci PL potřebujeme nově přidat pravidla pro zavedení a eliminaci kvantifikátorů („I“ značí zavedení, „E“ značí eliminaci). Tato pravidla jsou korektní v tom smyslu, že pomocí nich odvodíme formule, jež jsou pravdivé vždy, jsou-li pravdivé formule předpokladu. V zájmu jejich korektnosti je však nezbytné při aplikaci dodržet níže uvedené podmínky (vysvětlení níže).

I∀ $$\frac{A(x)}{\forall x\, A(x)}$$ Podmínka: $A(x)$ nebyla odvozena z nějakého předpokladu obsahujícího x jako volnou proměnnou.	UI $$\frac{\forall x\, A(x)}{A[t/x]}$$ (Podmínka: term t musí být korektně substituovatelný za x, tj. $A[t/x]$.)
I∃ $$\frac{A[t/x]}{\exists x\, A(x)}$$ (Podmínka: term t musí být korektně substituovatelný za x, tj. $A[t/x]$.)	E∃ $$\frac{\exists x\, A(x)}{A[t/x]}$$ Podmínka: při každé nové aplikaci E∃ v důkazu musíme namísto x zavést vždy novou (dosud nepoužitou) konstantu c.

(Pravidla pro záměnu kvantifikátorů si dokážeme až níže.)

Nyní si vysvětlíme motivaci pro uváděné podmínky. Nejdříve probereme již výše diskutovanou podmínku substituovatelnosti, která je uvedena pro případ I∃ a E∀. Kdyby naší formulí „*A*" byla například otevřená formule R(a,x), tak by volba t, jímž by bylo „x" jakožto substituent za „a", vedla po aplikaci I∃ k ∃x R(x,x), čímž by došlo k vázání původně volné proměnné „x". Takže z předpokladu, že a je v relaci R k x, bychom došli k neoprávněnému závěru, že některé individuum je v relaci samo k sobě. Správné je však odvodit, že nějaké individuum je vztaženo relací R k x. Proto musíme volit proměnnou odlišnou od „x", například „y", čímž dostaneme ∃y R(y,x). Podobně je tomu v případě E∀: například od ∃x R(x,y) chceme dojít k R(a,y), nikoli k R(y,y).

Nyní si vysvětlíme podmínku u pravidla E∃. Předpoklad ∃x A(x) je pravdivý, pokud nějaké individuum je A. Uvažme, že by mezi dalšími předpoklady v důkazu byla třeba formule ∃x B(x). Jistě nemůžeme odvodit, že je to jedno a totéž individuum, jež je A i B. Oba předpoklady jsou pravdivé i tehdy, když jejich pravdivost takříkajíc způsobují jiná individua. Zde je ukázka správné aplikace daného pravidla:

1.	$\exists x\, A(x)$	předpoklad
2.	$\exists x\, B(x)$	předpoklad
3.	$C(\mathrm{b})$	předpoklad
4.	$A(\mathrm{c})$	E$\exists$ (1); „c“ nikoli „b“ („b“ by bylo chybně)

Povšimněme si ještě toho, že jako t je při E$\exists$ volena konstanta, nikoli proměnná. Z toho, že existuje nějaké A, protože třeba individuum b činí pravdivou formuli $\exists x\, A(x)$, nemůžeme odvodit, že libovolné individuum y je A, tj. $A(y)$.

Konečně je tu ještě případ I$\forall$, tj. $A(x)$ / $\forall x\, A(x)$. Podmínka tohoto pravidla zní, že formule $A(x)$ nebyla odvozena z nějakého předpokladu obsahujícího x jako volnou proměnnou.

Nyní přidáme ještě pravidla pro zavedení a eliminaci identity:

I=

$$\frac{}{t=t}$$

E=

$$\frac{A(t_1) \qquad t_1=t_2}{A(t_2)}$$

Na to, jak dokazovat rozmanité formule v systému přirozené dedukce, čtenář jistě přijde brzy sám, zde si řekneme jen to nejnutnější. Už ve VL jsme se naučili složené formule rozkládat na atomické a ty přeskupovat na hledané složené formule. S pravidly pro kvantifikátory pak kvantifikované formule měníme na nekvantifikované a naopak, což podle potřeby kombinujeme s postupy z VL.

Níže budeme několikrát uplatňovat *podmiňovaný důkaz* (angl. „conditional proof“). Ač je to v anglicky psaných učebnicích jedna ze tří obvykle probíraných důkazových technik a je též bohatě procvičována, u nás je prakticky neznámá. Podstata dokazování tkví v tom, že v našem důkazu užijeme poddůkaz. Z první a předposlední formule daného poddůkazu sestavíme implikaci (označovanou CP), jež je již normální součástí hlavního důkazu. Zde je ukázka:

1.	$\forall x \neg P(x)$	předpoklad
2.	$\vert\; Q(x)$	předpoklad vnořeného důkazu
3.	$\vert\; \neg P(x)$	UI (1)
4.	$Q(x) \rightarrow \neg P(x)$	CP (2,3)
5.	$\forall x\, (Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	I∀ (4)

Bez podmiňovaného důkazu je dokázání některých formulí nemožné nebo velmi obtížné.

17.4 Příklady – důkazy v systému přirozené dedukce

1)

Dokažte $\forall x\,(A(x)\rightarrow B(x)),\ A(a) \vdash \exists x\, B(x)$:

1.	$\forall x\,(A(x)\rightarrow B(x))$	předpoklad
2.	$A(a)$	předpoklad
3.	$A(a)\rightarrow B(a)$	UI (1)
4.	$B(a)$	MP (3,2)
5.	$\exists x\, B(x)$	I$\exists$ (4)

2)

Dokažte $\exists x\,(A(x)\wedge B(x)) \vdash \forall x\,(A(x)\vee\neg C(x))$:

1.	$\exists x\,(A(x)\wedge B(x))$	předpoklad
2.	$A(a)\wedge B(a)$	E$\exists$ (1)
3.	$A(a)$	Simp (2)
4.	$A(a)\vee\neg C(a)$	Add (3)
5.	$\forall x\,(A(x)\vee\neg C(x))$	PG (3)

3)

Dokažte $\forall x\, P(x) \vdash ((P(a)\vee P(b))\vee Q(x))$:

1.	$\forall x\, P(x)$	předpoklad
2.	$P(a)$	UI (1)
3.	$P(a)\vee P(b)$	Add (2)
4.	$(P(a)\vee P(b))\vee Q(x)$	Add (3)

4)

Dokažte $\forall x\forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\forall x\, R(x,y)$:

1.	$\forall x\forall y\, R(x,y)$	předpoklad
2.	$\forall y\, R(x,y)$	UI (1) (naším t je x)
3.	$R(x,y)$	UI (2) (naším t je y)
4.	$\forall x\, R(x,y)$	PG (3)
5.	$\forall y\forall x\, R(x,y)$	PG (4)

5)

Dokažte $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash (\forall x\,A(x) \wedge \forall x\,B(x))$:

1.	$\forall x\,(A(x) \wedge B(x))$	předpoklad
2.	$A(x) \wedge B(x)$	UI (1) (naším t je x)
3.	$A(x)$	Simp (2)
4.	$B(x)$	Simp (2)
5.	$\forall x\,A(x)$	PG (3)
6.	$\forall x\,B(x)$	PG (4)
7.	$\forall x\,A(x) \wedge \forall x\,B(x)$	zavedení $\wedge$ (5,6)

6)

Dokažte $\exists y \forall x\,R(x,y) \vdash \forall x \exists y\,R(x,y)$:

1.	$\exists y \forall x\,R(x,y)$	předpoklad
2.	$\forall x\,R(x,a)$	E$\exists$ (1)
3.	$R(x,a)$	UI (2) (naším t je x)
4.	$\exists y\,R(x,y)$	I$\exists$ (3)
5.	$\forall x \exists y\,R(x,y)$	PG (4)

7)

Dokažte $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$:

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	předpoklad
2.	$\exists x\,P(x)$	předpoklad
3.	$P(a)$	E$\exists$ (2)
4.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	UI (1)
5.	$Q(a)$	MP (4,3)
6.	$\exists x\,Q(x)$	I$\exists$ (5)

8)

Dokažte $\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x)), \forall y\,(\neg B(y) \vee C(y)) \vdash \forall x\,(A(x) \rightarrow C(x))$:

1.	$\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$	předpoklad
2.	$\forall y\,(\neg B(y) \vee C(y))$	předpoklad
3.	$A(x) \rightarrow B(x)$	UI (1) (naším t je x)
4.	$\neg B(x) \vee C(x)$	UI (2) (naším t je x)

5.	$B(x) \rightarrow C(x)$	převod $\vee$ na $\rightarrow$ (4)
6.	$A(x) \rightarrow C(x)$	HS (3,5)
7.	$\forall x\ (A(x) \rightarrow C(x))$	PG (6)

9)

Dokažte $\forall x \exists y\ (P(x) \wedge Q(y)) \vdash \exists y \forall x\ (P(x) \wedge Q(y))$:

1.	$\forall x \exists y\ (P(x) \wedge Q(y))$	předpoklad
2.	$\exists y\ (P(x) \wedge Q(y))$	UI (1) (naším *t* je *x*)
3.	$P(x) \wedge Q(b)$	E$\exists$ (2)
4.	$\forall x\ (P(x) \wedge Q(b))$	PG (3)
5.	$\exists y \forall x\ (P(x) \wedge Q(y))$	I$\exists$ (4)

10)

Dokažte $\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg P(x)), \exists x\ (S(x) \wedge M(x)) \vdash \exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$, tj. sylogismus modu *festino*:

1.	$\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg P(x))$	předpoklad
2.	$\exists x\ (S(x) \wedge M(x))$	předpoklad
3.	$S(a) \wedge M(a)$	E$\exists$ (2)
4.	$M(a) \rightarrow \neg P(a)$	UI (1)
5.	$M(a)$	Simp (3)
6.	$\neg P(a)$	MP (4,5)
7.	$S(a)$	Simp (3)
7.	$S(a) \wedge \neg P(a)$	I$\wedge$ (6,7)
8.	$\exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$	I$\exists$ (7)

11)

Dokažte $\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg P(x)), \forall x\ (S(x) \rightarrow M(x)) \vdash \forall x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$, tj. sylogismus modu *celarent*:

1.	$\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg P(x))$	předpoklad
2.	$\forall x\ (S(x) \rightarrow M(x))$	předpoklad
3.	$M(x) \rightarrow \neg P(x)$	UI (1) (naším *t* je *x*)
4.	$S(x) \rightarrow M(x)$	UI (2) (naším *t* je *x*)
6.	$S(x) \rightarrow \neg P(x)$	HS (3,4)
7.	$\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$	PG (6)

12)

Dokažte $\forall x\, \neg P(x) \vdash \neg\exists x\, P(x)$ (důkaz sporem):

1.	$\forall x\, \neg P(x)$	předpoklad
2.	$\neg\neg\exists x\, P(x)$	předpoklad důkazu sporem
3.	$\exists x\, P(x)$	$\neg\neg$ (2)
4.	P(a)	E$\exists$ (3)
5.	$\neg$P(a)	UI (1)
6.	$\neg\exists x\, P(x)$	reductio (4,5)

13)

Dokažte $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$ (důkaz sporem):

1.	$\neg\exists x\, \neg P(x)$	předpoklad
2.	$\neg P(x)$	předpoklad důkazu sporem
3.	$\exists x\, \neg P(x)$	I$\exists$ (2)
4.	$P(x)$	reductio (1,3)
5.	$\forall x\, P(x)$	PG (4)

14)

Dokažte $\exists x\, A(x) \rightarrow \forall x\, (B(x) \rightarrow C(x))$, $A(a) \wedge B(a) \vdash C(a)$:

1.	$\exists x\, A(x) \rightarrow \forall x\, (B(x) \rightarrow C(x))$	předpoklad
2.	$A(a) \wedge B(a)$	předpoklad
3.	A(a)	Simp (2)
4.	$\exists x\, A(x)$	I$\exists$ (3)
5.	$\forall x\, (B(x) \rightarrow C(x))$	MP (1,4)
6.	$B(a) \rightarrow C(a)$	UI (5)
7.	B(a)	Simp (2)
8.	C(a)	MP (6,7)

15)

Dokažte $\forall x\, ((A(x) \vee B(x)) \rightarrow \neg C(x))$, $\exists x\, A(x) \vdash \exists x\, \neg C(x)$:

1.	$\forall x\, ((A(x) \vee B(x)) \rightarrow \neg C(x))$	předpoklad
2.	$\exists x\, A(x)$	předpoklad
3.	A(a)	E$\exists$ (2)
4.	$(A(a) \vee B(a)) \rightarrow \neg C(a)$	UI (1)

5.	$A(a)\lor B(a)$	Add (3)
6.	$\neg C(a)$	MP (4,5)
7.	$\exists x\ \neg C(x)$	I$\exists$ (6)

16)

Dokažte $\forall x\ (A(x)\to B(x)),\ \exists x\ (A(x)\land C(x)) \vdash \exists x\ (C(x)\land B(x))$:

1.	$\forall x\ (A(x)\to B(x))$	předpoklad
2.	$\exists x\ (A(x)\land C(x))$	předpoklad
3.	$A(a)\land C(a)$	E$\exists$ (2)
4.	$A(a)\to B(a)$	UI (1)
5.	$A(a)$	Simp (3)
6.	$B(a)$	MP (4,5)
7.	$C(a)$	Simp (3)
8.	$C(a)\land B(a)$	I$\land$ (7,6)
9.	$\exists x\ (C(x)\land B(x))$	I$\exists$ (8)

17)

Dokažte $\forall x\forall y\ (P(x,y)\to\neg P(y,x)),\ \forall x\forall y\ (P(y,x)\leftrightarrow\neg(Q(x,y)\lor R(y,x))),$ $\forall x\forall y\ (P(x,y)\to\neg R(y,x)),\ P(a,b) \vdash Q(b,a)$:

1.	$\forall x\forall y\ (P(x,y)\to\neg P(y,x))$	předpoklad
2.	$\forall x\forall y\ (P(y,x)\leftrightarrow\neg(Q(x,y)\lor R(y,x)))$	předpoklad
3.	$\forall x\forall y\ (P(x,y)\to\neg R(y,x))$	předpoklad
4.	$P(a,b)$	předpoklad
5.	$P(a,b)\to\neg P(b,a)$	UI (1)
6.	$P(b,a)\leftrightarrow\neg(Q(a,b)\lor R(b,a))$	(2x) UI (2)
7.	$P(a,b)\to\neg R(b,a)$	(2x) UI (3)
8.	$\neg P(b,a)$	MP (5,4)
9.	$\neg(Q(a,b)\lor R(b,a))\to P(b,a)$	E$\leftrightarrow$ (6)
10.	$\neg\neg(Q(a,b)\lor R(b,a))$	MT (9,8)
11.	$Q(a,b)\lor R(b,a)$	$\neg\neg$ (10)
12.	$\neg R(b,a)$	MP (7,4)
13.	$Q(a,b)$	DS (11,12)

18)

Dokažte $\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \forall x\, (C(x) \rightarrow A(x)),\ \forall x\, \neg A(x) \vdash \forall x\, \neg C(x)$:

1.	$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \forall x\, (C(x) \rightarrow A(x))$	předpoklad
2.	$\forall x\, \neg A(x)$	předpoklad
3.	$\neg A(x)$	UI (2) (naším *t* je *x*)
4.	$\neg A(x) \vee B(x)$	Add (3)
5.	$A(x) \rightarrow B(x)$	převod $\vee$ na $\rightarrow$ (4)
6.	$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x))$	PG (5)
7.	$\forall x\, (C(x) \rightarrow A(x))$	MP (1,6)
8.	$C(x) \rightarrow A(x)$	UI (7) (naším *t* je *x*)
9.	$\neg C(x)$	MT (8,3)
10.	$\forall x\, \neg C(x)$	PG (9)

19)

Dokažte $\exists x\, A(x) \rightarrow B(y) \vdash \forall x\, (A(x) \rightarrow B(y))$ (podmiňovaný důkaz, CP):

1.	$\exists x\, A(x) \rightarrow B(y)$	předpoklad
2.	$\mid A(a)$	dočasný předpoklad pro CP
3.	$\mid \exists x\, A(x)$	I∃ (2)
4.	$\mid B(y)$	MP (1,3)
5.	$\mid A(a) \rightarrow B(y)$	CP (2,4)
6.	$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(y))$	PG (5)

20)

Dokažte $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x))$:

1.	$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	předpoklad
2.	$\mid \exists x\, P(x)$	dočasný předpoklad pro CP
3.	$\mid P(a)$	E∃ (2)
4.	$\mid P(a) \rightarrow Q(a)$	UI (1)
5.	$\mid Q(a)$	MP (4,3)
6.	$\mid \exists x\, Q(x)$	I∃ (5)
7.	$\mid (\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x))$	CP (2,6)

21)

Dokažte $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \forall x\ (A(x) \rightarrow (B(x) \vee C(x)))$ (podmiňovaný důkaz, CP):

1.	$\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))$	předpoklad
2.	$\vert\ A(x)$	dočasný předpoklad pro CP
3.	$\vert\ A(x) \rightarrow B(x)$	UI (1) (naším *t* je *x*)
4.	$\vert\ B(x)$	MP (3,2)
5.	$\vert\ B(x) \vee C(x)$	Add (4)
6.	$A(x) \rightarrow (B(x) \vee C(x))$	CP (2,5)
7.	$\forall x\ (A(x) \rightarrow (B(x) \vee C(x)))$	PG (6)

22)

Dokažte $\vdash \neg\forall x\ A(x) \leftrightarrow \exists x\ \neg A(x)$, tj. De Morganův zákon (důkaz formule tvaru $\leftrightarrow$ spočívá v důkazu obou směrů $\leftrightarrow$, tj. v důkazu $\rightarrow$ a $\leftarrow$):

a) $\rightarrow$:

1.	$\neg\forall x\ A(x)$	předpoklad
2.	$\neg\exists x\ \neg A(x)$	předpoklad důkazu sporem
3.	$\vert\ \neg A(x)$	dočasný předpoklad pro CP
4.	$\vert\ \exists x\ \neg A(x)$	I$\exists$ (3)
5.	$\neg A(x) \rightarrow \exists x\ \neg A(x)$	CP (3,4)
6.	$\neg\neg A(x)$	MT (5,2)
7.	$A(x)$	$\neg\neg$ (6)
8.	$\forall x\ A(x)$	PG (7)
9.	$\exists x\ \neg A(x)$	reductio (1,8)

b) $\leftarrow$:

1.	$\exists x\ \neg A(x)$	předpoklad
2.	$\neg\neg\forall x\ A(x)$	předpoklad důkazu sporem
3.	$\forall x\ A(x)$	$\neg\neg$ (2)
4.	$\neg A(a)$	E$\exists$ (1)
5.	$A(a)$	UI (3)
6.	$\neg\forall x\ A(x)$	reductio (4,5)

Podle věty o dedukci odpovídají tomuto teorému následující odvozená dedukční pravidla, jež budeme značit DM:

$$\frac{\neg\forall x\, A(x)}{\exists x\, \neg A(x)} \qquad \frac{\exists x\, \neg A(x)}{\neg\forall x\, A(x)}$$

Důkaz $\neg\exists x$ A(x)$\leftrightarrow\forall x$ $\neg$A(x) je prakticky izomorfní, proto jsou příslušná dvě odpovídající pravidla níže značena rovněž DM.

23)

Dokažte $\neg\exists x$ $\neg$(P(x)$\rightarrow$Q(x)), $\neg\exists x$ Q(x) $\vdash$ $\neg\forall x$ P(x) (Pravidlo záměny kvantifikátorů, DM, je dokázáno v příkladu hned výše):

1.	$\neg\exists x\, \neg(P(x)\rightarrow Q(x))$	předpoklad
2.	$\neg\exists x\, Q(x)$	předpoklad
3.	$\forall x\, (P(x)\rightarrow Q(x))$	DM (1)
4.	$\forall x\, \neg Q(x)$	DM (2)
5.	$\neg Q(a)$	UI (4)
6.	$P(a)\rightarrow Q(a)$	UI (3)
7.	$\neg P(a)$	MT (6,5)
8.	$\exists x\, \neg P(x)$	I$\exists$ (7)
9.	$\neg\forall x\, P(x)$	DM (8)

24)

Dokažte $\neg\exists x$ (P(x)$\wedge\neg$Q(x)), $\neg\forall x$ ($\neg$R(x)$\vee$Q(x)) $\vdash$ $\exists x$ $\neg$P(x) (Pravidlo záměny kvantifikátorů, DM, je dokázáno ob jeden příklad výše):

1.	$\neg\exists x\, (P(x)\wedge\neg Q(x))$	předpoklad
2.	$\neg\forall x\, (\neg R(x)\vee Q(x))$	předpoklad
3.	$\forall x\, \neg(P(x)\wedge\neg Q(x))$	DM (1)
4.	$\exists x\, \neg(\neg R(x)\vee Q(x))$	DM (2)
5.	$\neg(\neg R(a)\vee Q(a))$	E$\exists$ (4)
6.	$\neg\neg R(a)\wedge\neg Q(a)$	DM-VL (5)
7.	$R(a)\wedge\neg Q(a)$	$\neg\neg$ (6)
8.	$\neg(P(a)\wedge\neg Q(a))$	UI (3)

9.	$\neg P(a) \lor \neg\neg Q(a)$	DM-VL (8)
10.	$\neg P(a) \lor Q(a)$	$\neg\neg$ (9)
11.	$\neg Q(a)$	Simp (7)
12.	$\neg P(a)$	DS (10,11)
13.	$\exists x \, \neg P(x)$	I$\exists$ (12)

25)

Dokažte $\forall x \, (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \forall x \, (C(x) \rightarrow A(x)), \forall x \, \neg A(x) \vdash \forall x \, \neg C(x)$:

1.	$\forall x \, (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \forall x \, (C(x) \rightarrow A(x))$	předpoklad
2.	$\forall x \, \neg A(x)$	předpoklad
3.	$\neg A(x)$	UI (2) (naším *t* je x)
4.	$\neg A(x) \lor B(x)$	Add (3)
5.	$A(x) \rightarrow B(x)$	převod $\lor$ na $\rightarrow$ (4)
6.	$\forall x \, (A(x) \rightarrow B(x))$	PG (5)
7.	$\forall x \, (C(x) \rightarrow A(x))$	MP (1,6)
8.	$C(x) \rightarrow A(x)$	UI (7) (naším *t* je x)
9.	$\neg C(x)$	MT (8,3)
10.	$\forall x \, \neg C(x)$	PG (9)

26)

Dokažte $\forall x \, (P(x) \rightarrow (x \neq a)) \vdash \neg P(a)$:

1.	$\forall x \, (P(x) \rightarrow (x \rightarrow a))$	předpoklad
2.	$P(a) \rightarrow (a \neq a)$	UI (1)
3.	$a = a$	I=
4.	$\neg P(a)$	MT (2,3)

27)

Dokažte $\vdash (t_1=t_2)\leftrightarrow(t_2=t_1)$, tj. zákon komutativity =:

a) →:

1.	$(t_1=t_2)$	předpoklad
2.	$\neg(t_2=t_1)$	předpoklad důkazu sporem
3.	$\neg(t_2=t_2)$	E= (1,2; na základě 1 dosazujeme do $\neg(t_2=x)$)
4.	$(t_2=t_2)$	I=
5.	$(t_2=t_1)$	reductio (3,4)
6.	$\vdash ((t_1=t_2)\rightarrow(t_2=t_1))$	VD (1,2)

Směr b) ← bychom dokázali zcela obdobně.

28)

Dokažte $\forall x\ (\exists y\ (x=y)\rightarrow \mathrm{F}(x))$, $(\mathrm{b}=\mathrm{a}) \vdash \mathrm{F}(\mathrm{a})$:

1.	$\forall x\ (\exists y\ (x=y)\rightarrow \mathrm{F}(x))$	předpoklad
2.	$(\mathrm{b}=\mathrm{a})$	předpoklad
3.	$\exists y\ (\mathrm{a}=y)\rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{a})$	UI (1)
4.	$(\mathrm{a}=\mathrm{b})$	komutativita = (2)
5.	$\exists y\ (\mathrm{a}=y)$	I∃ (4)
6.	$\mathrm{F}(\mathrm{a})$	MP (3,5)

29)

Dokažte $\mathrm{P}(\mathrm{b}), \neg\forall x\ ((x=\mathrm{b})\rightarrow \mathrm{P}(x)) \vdash \neg \mathrm{P}(\mathrm{b})$:

1.	$\mathrm{P}(\mathrm{b})$	předpoklad
2.	$\neg\forall x\ ((x=\mathrm{b})\rightarrow \mathrm{P}(x))$	předpoklad
3.	$\exists x\ \neg((x=\mathrm{b})\rightarrow \mathrm{P}(x))$	DM (2)
4.	$\exists x\ \neg(\neg(x=\mathrm{b})\vee \mathrm{P}(x))$	převod → na ∨ (3)
5.	$\exists x\ (\neg\neg(x=\mathrm{b})\wedge\neg \mathrm{P}(x))$	DM-VL (4)
6.	$\exists x\ ((x=\mathrm{b})\wedge\neg \mathrm{P}(x))$	¬¬ (5)
7.	$(\mathrm{a}=\mathrm{b})\wedge\neg \mathrm{P}(\mathrm{a})$	E∃ (6)
8.	$(\mathrm{a}=\mathrm{b})$	Simp (7)
9.	$\neg \mathrm{P}(\mathrm{a})$	Simp (7)
10.	$\neg \mathrm{P}(\mathrm{b})$	E= (8,9)

30)

Dokažte $\vdash (t_1=t_2)\rightarrow((t_2=t_3)\rightarrow(t_1=t_3))$, tj. zákon tranzitivity identity:

1.	$(t_1=t_2)$	předpoklad
2.	$(t_2=t_3)$	předpoklad
3.	$(t_1=t_3)$	E= (1,2; na základě 1 dosazujeme do $(x=t_3)$)
4.	$\vdash ((t_2=t_3)\rightarrow(t_1=t_3))$	VD (2,3)
5.	$\vdash (t_1=t_2)\rightarrow((t_2=t_3)\rightarrow(t_1=t_3))$	VD (1,4)

31)

Dokažte $F(a)\wedge\forall x\,(F(x)\rightarrow(x=a)), (a\neq b), G(b) \vdash \exists x\,(G(x)\wedge\neg F(x))$:

1.	$F(a)\wedge\forall x\,(F(x)\rightarrow(x=a))$	předpoklad
2.	$(a\neq b)$	předpoklad
3.	$G(b)$	předpoklad
4.	$\forall x\,(F(x)\rightarrow(x=a))$	Simp (1)
5.	$F(b)\rightarrow(b=a)$	UI (4)
6.	$(b\neq a)$	komutativita = (2)
7.	$\neg F(b)$	MT (5,6)
9.	$G(b)\wedge\neg F(b)$	Pravidlo zavedení $\wedge$ (3,7)
10.	$\exists x\,(G(x)\wedge\neg F(x))$	I$\exists$ (8)

17.5 Gentzenovská dedukce

Připomeňme si, že gentzenovská přirozená dedukce vychází ze sekvenčního kalkulu Gerharda Gentzena. Jednotkami důkazů jsou *sekventy*, jež jsou obecně tvaru:

$$\Gamma, A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B,$$

kde Γ je konečná množina formulí. (Někdy ke Γ přibíráme ne nutně disjunktní množinu Δ.) Znak „⇒“ je obdobou dokazovátka „⊢“, ovšem na rozdíl od něho coby metaznaku hilbertovské dedukce je v gentzenovské přirozené dedukci zadán systémově. $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B$ je ekvivalentní s $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$. Na rozdíl od hilbertovské (přirozené) dedukce je každý řádek, tedy každý sekvent logicky pravdivý.

Aby byl každý sekvent logicky pravdivý, nesmí se nalevo vyskytovat nadbytečné předpoklady. Proto se snažíme v důkazu pracovně použité předpoklady v následujících krocích přesouvat napravo od ⇒. Předpoklady volíme obvykle tak, abychom dekomponovali složitější formuli na jednodušší tvary, které pak přeskupíme na hledanou formuli.

Gentzenovská dedukce používá jeden hlavní axiom:

$\Gamma, A \Rightarrow A$ *Základní axiom* (ZA)

Deduktivní síla totiž leží na odvozovacích pravidlech, jichž je v gentzenovské dedukci používána celá řada.

Za výchozí, tj. nedokazovaná, pravidla VL jsou obvykle volena ta následující. Písmeno „I“ zkracuje „introdukce“ (tj. „zavedení“), písmeno „E“ zkracuje „eliminace“. Připomeňme si, že např. I→ je de facto VD a E→ je de facto MP.

I∧

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A\ ;\ \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B}$$

E∧

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow A \text{ (či } B\text{)}}$$

I→

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

E→

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A\ ;\ \Delta \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}$$

I∨

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \text{ (či } B\text{)}}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$$

E∨

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C\ ;\ \Delta_1, B \Rightarrow C\ ;\ \Delta_2 \Rightarrow A \vee B}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow C}$$

I¬

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B\ ;\ \Delta, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \neg A}$$

E¬

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B\ ;\ \Delta \Rightarrow \neg B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}$$

I↔

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B\ ;\ \Delta \Rightarrow B \rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \leftrightarrow B}$$

E↔

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \leftrightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B \text{ (či } B \rightarrow A\text{)}}$$

K těmto pravidlům z prostředí VL nyní přibereme (zde rovněž nedokazovaná) pravidla pro zacházení s kvantifikátory. Je možné lehce uvidět, že I∀ je vlastně Pravidlem generalizace, E∀ je pravidlem odpovídajícím Axiomu specifikace, I∃ je pravidlem odpovídajícím pravidlu existenční generalizace.

I∀

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall x\, A}$$

Podmínka: proměnná x se nevyskytuje volně v žádné z formulí v Γ.

E∀

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \forall x\, A}{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}$$

(Podmínka: term t musí být korektně substituovatelný za x, tj. $A[t/x]$.)

I∃

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x\, A(x)}$$

(Podmínka: term t musí být korektně substituovatelný za x, tj. $A[t/x]$.)

E∃

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \exists x\, A(x);\ \Delta, A[\mathrm{c}/x] \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}$$

Podmínka: při aplikaci E∃ musíme za proměnnou x substituovat vždy novou konstantu c, jež se nevyskytuje v žádné z formulí v Γ, ani v $\exists x\, A(x)$, ani v C.

Proč pravidla pro kvantifikátory vyžadují takové omezující podmínky, jsme si vysvětlili již výše v sekci 17.3.

Rovnou si systém pravidel rozšíříme o pravidla pro identitu. První odpovídá Axiomu identity, resp. Pravidlu zavedení =, druhé je vlastně Leibnizovým pravidlem pro identitu (v kapitole o přirozené dedukci, 17.3 jsme však uvedli Pravidlo eliminace =, jež je poněkud jiné).

Axiom identity

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow (t=t)}$$

Pravidlo identity

$$\frac{\Gamma \Rightarrow (t_1=t_2)}{\Gamma \Rightarrow (A[t_1/x] \leftrightarrow A[t_2/x])}$$

17.6 Příklady – důkazy v gentzenovském systému dedukce

1)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow A[t/x] \rightarrow \exists x\, A$, tj. zákon existenční generalizace:

1.	$\Gamma, A[t/x] \Rightarrow A[t/x]$	ZA
2.	$\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \exists x\, A$	I$\exists$ (1)
3.	$\Gamma \Rightarrow A[t/x] \rightarrow \exists x\, A$	I$\rightarrow$

2)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow \forall x\, \mathrm{P}(x) \rightarrow \exists x\, \mathrm{P}(x)$, tj. zákon partikularizace:

1.	$\Gamma, \forall x\, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \forall x\, \mathrm{P}(x)$	ZA
2.	$\Gamma, \forall x\, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)$	E$\forall$ (1) (naším *t* je *x*)
3.	$\Gamma, \forall x\, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \exists x\, \mathrm{P}(x)$	I$\exists$ (2)
4.	$\Gamma \Rightarrow \forall x\, \mathrm{P}(x) \rightarrow \exists x\, \mathrm{P}(x)$	I$\rightarrow$ (3)

3)

Dokažte $\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$, tj. pravidlo eliminace $\forall$ z konsekventu:

1.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x))$	ZA
2.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x)), \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)$	ZA
3.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x)), \mathrm{P}(x) \Rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x)$	E$\rightarrow$ (1,2)
4.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x)), \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$	E$\forall$ (3) (naším *t* je *x*)
5.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\, \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$	I$\rightarrow$ (4)

4)

Dokažte $\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \rightarrow \exists x\, \mathrm{Q}(x))$, tj. pravidlo zavedení $\exists$ do konsekventu:

1.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$	ZA
2.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x)), \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x)$	ZA
3.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x)), \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)$	E$\rightarrow$ (1,2)
4.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x)), \mathrm{P}(x) \Rightarrow \exists x\, \mathrm{Q}(x)$	I$\exists$ (3)
5.	$\Gamma, (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \rightarrow \exists x\, \mathrm{Q}(x))$	I$\rightarrow$ (4)

5)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$:

1.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, P(x)$	ZA
2.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow P(x)$	E$\forall$ (1) (naším *t* je x)
3.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))$	I$\vee$ (2)
4.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	I$\vee$ (3)
5.	$\Gamma \Rightarrow \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	I$\rightarrow$ (4)

6)

Dokažte $\Gamma, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x))$, tj. pravidlo zavedení $\forall$ do antecedentu:

1.	$\Gamma, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))$	ZA
2.	$\Gamma, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, P(x)$	ZA
3.	$\Gamma, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow P(x)$	E$\forall$ (2) (naším *t* je x)
4.	$\Gamma, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x)$	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	$\Gamma, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x))$	I$\rightarrow$ (4)

7)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$:

1.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	ZA
2.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, P(x)$	ZA
3.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))$	E$\forall$ (1) (naším *t* je x)
4.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow P(x)$	E$\forall$ (2) (naším *t* je x)
5.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x)$	E$\rightarrow$ (3,4)
6.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)$	I$\forall$ (5)
7.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$	I$\rightarrow$ (6)

8)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$, tj. zákon distribuce $\exists$ přes $\wedge$:

1.	$\Gamma, \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$	ZA
2.	$\Gamma, \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow P(a) \wedge Q(a)$	E$\exists$ (1)
3.	$\Gamma, \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow P(a)$	E$\wedge$ (2)
4.	$\Gamma, \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow Q(a)$	E$\wedge$ (2)

5.	$\Gamma, \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\, P(x)$	I$\exists$ (3)
6.	$\Gamma, \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\, Q(x)$	I$\exists$ (4)
7.	$\Gamma, \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$	I$\wedge$ (5,6)
8.	$\Gamma \Rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$	I$\rightarrow$ (7)

9)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x))$:

1.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	ZA
2.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, P(x)$	ZA
3.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x) \Rightarrow P(a)$	E$\exists$ (2)
4.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x) \Rightarrow P(a) \rightarrow Q(a)$	E$\forall$ (1)
5.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x) \Rightarrow Q(a)$	E$\rightarrow$ (4,3)
6.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)$	I$\exists$ (5)
7.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	I$\rightarrow$ (6)
8.	$\Gamma \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x))$	I$\rightarrow$ (7)

10)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$, tj. zákon distribuce $\forall$ přes $\rightarrow$:

1.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	ZA
2.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow P(x) \rightarrow Q(x)$	E$\forall$ (1) (naším *t* je *x*)
3.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, P(x)$	ZA
4.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow P(x)$	E$\forall$ (3) (naším *t* je *x*)
5.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x)$	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)$	I$\forall$ (5)
7.	$\Gamma, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$	I$\rightarrow$ (6)
8.	$\Gamma \Rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$	I$\rightarrow$ (7)

11)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$:

1.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, P(x)$	ZA
2.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow P(x)$	E$\forall$ (1) (naším *t* je *x*)
3.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow P(x) \vee Q(x)$	I$\vee$ (2)
4.	$\Gamma, \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	I$\forall$ (3)
5.	$\Gamma, \forall x\, P(x), \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)$	ZA

6.	$\Gamma, \forall x\, P(x), \forall x\, Q(x) \Rightarrow Q(x)$	E$\forall$ (5) (naším *t* je *x*)
7.	$\Gamma, \forall x\, P(x), \forall x\, Q(x) \Rightarrow P(x) \vee Q(x)$	I$\vee$ (6)
8.	$\Gamma, \forall x\, P(x), \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	I$\forall$ (7)
9.	$\Gamma, (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	důkaz rozborem možností
10.	$\Gamma \Rightarrow (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	I$\rightarrow$ (9)

Důkaz rozborem možností:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C\, ; \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow C}$$

12)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow ((t_1 = t_2) \rightarrow (t_2 = t_1))$:

1.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow (t_1 = t_2)$	ZA
2.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow ((t_1 = t_1) \leftrightarrow (t_2 = t_1))$	Pravidlo identity (1; naší $A[t/x]$ je $(x = t_1)$)
3.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow ((t_1 = t_1) \rightarrow (t_2 = t_1))$	E$\leftrightarrow$ (2)
4.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow (t_1 = t_1)$	Axiom identity
5.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow (t_2 = t_1)$	E$\rightarrow$ (3,4)
5.	$\Gamma \Rightarrow (t_1 = t_2) \rightarrow (t_2 = t_1)$	I$\rightarrow$ (5)

13)

Dokažte $\Gamma \Rightarrow (t_1 = t_2) \rightarrow ((t_2 = t_3) \rightarrow (t_1 = t_3))$, tj. zákon tranzitivity =:

1.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow (t_1 = t_2)$	ZA
2.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow ((t_1 = t_3) \leftrightarrow (t_2 = t_3))$	Pravidlo identity (1; naší $A[t/x]$ je $(x = t_3)$)
3.	$\Gamma, (t_1 = t_2) \Rightarrow ((t_2 = t_3) \rightarrow (t_1 = t_3))$	E$\leftrightarrow$ (2)
4.	$\Gamma \Rightarrow (t_1 = t_2) \rightarrow ((t_2 = t_3) \rightarrow (t_1 = t_3))$	I$\rightarrow$ (3)

17.7 Metoda sémantických tabel

Nyní si připomeneme a pak rozšíříme metodu dokazování pomocí *sémantických tabel* (angl. „semantic tableaux“), stručně *tablovou metodu*, kterou prezentujeme v podobě *sémantických stromů* (angl. „tree proofs“).

Při dokazování formulí se jedná o dokazování sporem, neboť při dokazování závěru z premis se zužitkovává negace závěru. (Metoda se však dá použít například i k hledání modelu formule, což si ukážeme níže.) *Věta o důkazu sporem* říká, že formule A, tj. závěr, je dokazatelná z množiny předpokladů T, tj. $T \vdash A$, právě tehdy, když $T \cup \{\neg A\} \vdash \neg(B \rightarrow B)$ (spor). Sémanticky vzato to znamená, že jakmile ukážeme, že množina $T \cup \{\neg A\}$ je nesplnitelnou množinou formulí (čili neexistuje interpretace, při níž by všechny prvky T a též formule $\neg A$ byly pravdivé), tak A vyplývá z T, tj. $T \vDash A$ (čili: úsudek $T \therefore A$ je platný). Například $\{A \rightarrow B, A\} \vDash B$, protože množina $\{A \rightarrow B, A, \neg B\}$ je nesplnitelná. Jinými slovy, dokazujeme, že jsou-li předpoklady pravdivé, závěr nemůže být nepravdivý.

Při dokazování seřadíme pod sebe ty formule, jež jsou předpoklady. Do jejich soupisu připojíme i negaci formule, již máme z těchto předpokladů dokázat, tedy negaci závěru. Strom rozvíjíme od kořene směrem dolů k listům, přičemž hořejší formule postupně dekomponujeme na jednodušší formule, jež řadíme níže pomocí uváděných pravidel. Při tomto aplikujeme níže uváděná pravidla pro dekomponování. Tato pravidla jsou dvojího druhu, větvící a nevětvící. Ta pravidla, která strom nevětví, volíme přednostně. To proto, že v každé větvi musíme dekomponovat všechny ty formule, jež nebyly výše v dané větvi dekomponovány (u formulí začínajících $\forall$ je to trochu jinak, viz níže). Dále je vhodné přednostně dekomponovat nejdříve ty formule, jejichž hlavním operátorem není kvantifikátor, ale nějaká výroková spojka. Samozřejmě, že usilujeme o brzké uzavírání větví.

Zde je příklad snažící se dokázat $\mathrm{F(a)} \vdash \forall x\, (\mathrm{F}(x) \wedge \exists y\, \mathrm{F}(y))$ (tj. vlastně ověřit úsudek jehož jedinou premisou je formule nalevo od $\vdash$):

1.		$F(b)$		předpoklad
2.		$\neg\forall x\ (F(x)\wedge\exists y\ F(y))$	✓	negace závěru
		$\mid$		
3.		$\exists x\ \neg(F(x)\wedge\exists y\ F(y))$	✓a	$\neg\forall$ (2)
		$\mid$		
4.		$\neg(F(a)\wedge\exists y\ F(y))$	✓	$\exists$ (3)
		/ \		
5.	$\neg F(a)$	$\neg\exists y\ F(y)$ ✓		$\neg\wedge$ (4)
	o	$\mid$		
6.		$\forall y\ \neg F(y)$ \a,\b		$\neg\exists$ (5)
		$\mid$		
7.		$\neg F(a)$		$\forall$ (6)
		$\mid$		
8.		$\neg F(b)$		$\forall$ (6)
		×		

Jak lze doložit konfrontací s níže uváděným seznam pravidel, tento jednoduchý stromový důkaz si vyžadoval přesný postup jejich aplikace. Například negovanou konjunkci $\neg(F(a)\wedge\exists y\ F(y))$ nešlo dekomponovat ani dříve, ani později (k dekompozici bylo užito pravidlo značené „$\neg\wedge$“). Jiné důkazy naopak nejsou v pořadí aplikaci pravidel striktní, ale obecně vzato je dokazování v rámci PL méně volné než dokazování v rámci VL. Na naší ukázce si nyní dále všimněme toho, že se důkaz větvil (některé důkazy se nevětví). Jak už bylo řečeno, větvení se snažíme pokud možno vyhnout jednak uplatněním nevětvících pravidel, jednak volbou pravidel, která vedou k brzkému uzavírání větví.

Znak „✓“ indikuje, že daná formule byla níže v důkazu dekomponována. Složené formule, jež nejsou označeny pomocí „✓“, jsme povinni dekomponovat, přičemž v každé větvi musí být dekomponovány všechny formule označené „✓“. Dekomponovat nelze atomické formule a jejich negace. Dále nejsou znakem „✓“ označovány formule začínající nenegovaným obecným kvantifikátorem; to proto, že je dovoleno generovat nekonečně mnoho jejich instancí, například z $\forall x\ \neg F(x)$ generovat $\neg F(a)$, $\neg F(b)$, atd. K problému uvádění konstant jako „a“ či „b“ se vrátíme níže po uvedení příslušných pravidel.

Znak „o“ (někteří autoři používají „$\uparrow$“, někteří nic) značí, že daná *větev* je *otevřená* (a taky ukončitelná, k tomu níže), tj. existuje interpretace, která splňuje množinu formulí uvedenou v dané větvi. Znak „×“ (někteří píší „$\perp$“, jiní formuli podtrhují) indikuje, že daná *větev* je *uzavřená*, což znamená, že daná množina formulí je nesplnitelná. Nesplnitelná je pochopitelně ta množina formulí vyskytující se na nějaké větvi, v níž je přítomna jednoduchá nebo složená formule A a zároveň $\neg A$.

Přeneseně pak říkáme, že *strom* je *otevřený*, pokud obsahuje alespoň jednu ukončenou otevřenou větev; jinak je *uzavřený*. Tuto terminologii zpřesníme níže. Rovněž přehled pomocné symboliky v anotacích srov. níže.

Nyní si ještě stručně řekněme, že metoda sémantických tabel se dá využít i k nalezení interpretace, je-li jaká, jež splňuje nějakou množinu formulí. V našem příkladu výše je to $\Im(F)=\{\neg\alpha,\beta\}$, kterou lze vyčíst z atomických formulí nebo jejich negací a to v otevřené větvi důkazu.

Metoda sémantických tabel se dá rovněž využít k ověřování logické pravdivosti formulí. Strom přitom rozvíjíme jen od negace prověřované formule, neboť předpoklady tu nejsou žádné.

Zde je seznam odvozovacích pravidel z prostředí VL. Některá z nich předpokládají De Morganovy zákony či převod implikace na disjunkci. Je tomu tak proto, že rozvětvení složené formule odpovídá disjunkci, kdežto dekompozice složené formule na formule, jež jsou zařazeny za sebou, odpovídá konjunkci.

$\wedge$

$$\begin{array}{c} A\wedge B \\ : \\ | \\ A \\ B \end{array}$$

$\neg\wedge$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A\wedge B) & \\ & : & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

$\vee$

$$\begin{array}{ccc} & A\vee B & \\ & : & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array}$$

$\neg\vee$

$$\begin{array}{c} \neg(A\vee B) \\ : \\ | \\ \neg A \\ \neg B \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} & A\rightarrow B & \\ & : & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & B \end{array}$$

$\neg\rightarrow$

$$\begin{array}{c} \neg(A\rightarrow B) \\ : \\ | \\ A \\ \neg B \end{array}$$

$\leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} & A\leftrightarrow B & \\ & : & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ B & & \neg B \end{array}$$

$\neg\leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A\leftrightarrow B) & \\ & : & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ \neg B & & B \end{array}$$

$\neg\neg$

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ : \\ | \\ A \end{array}$$

Už v přirozené dedukci a gentzenovské dedukci jsme zmiňovali (popř. i dokázali) pravidla pro záměnu kvantifikátorů, nebo pravidla jejich eliminace. Zde jsou jejich obdoby.

$\neg\forall$ $\neg\forall x\, A$: | $\exists x\, \neg A$	$\neg\exists$ $\neg\exists x\, A$: | $\forall x\, \neg A$
$\forall$ $\forall x\, A$: | $A[\mathrm{c}/x]$	$\exists$ $\exists x\, A$: | $A[\mathrm{c}/x]$
Podmínka: konstanta c je ve větvi již použita (jinak je c zaváděna jako zcela nová).	Podmínka: konstanta c je ve větvi zaváděna jako zcela nová.

(Po chvilce zamyšlení zjistíme, že dvě pravidla v prvním řádku by šlo nahradit pomocí efektivnějších pravidel $\neg\forall x\, A$ / $\neg A[\mathrm{c}/x]$ a $\neg\exists x\, A$ / $\neg A[\mathrm{c}/x]$, jejichž závěry jsou podmíněny v příslušném pořadí stejně jako naše pravidla $\forall$ a $\exists$. Každé z těchto efektivních pravidel tedy jaksi sdružuje dohromady pravidla uváděná ve sloupcích. Ještě dodejme, že pravidlo $\forall$ patří mezi tzv. γ-*pravidla* a pravidlo $\exists$ patří mezi tzv. δ-*pravidla*.)

S podmínkami omezujícími aplikaci pravidel jako $\forall$ a $\exists$ jsme se setkali už výše v sekcích o přirozené a gentzenovské dedukci. Nová konstanta musí být užita při aplikaci $\exists$ proto, že pravdivost $\exists x\, A(x)$ způsobuje nějaký objekt, jehož jméno z $\exists x\, A(x)$ neznáme; proto nejsme oprávněni postulovat, že je to objekt určitého jména, což bychom činili zaváděním nějaké konkrétní konstanty. Abychom zjistili, že konstanta je nová, hledáme směrem nahoru v dané větvi, zda se tam nevyskytuje. Pokud se ve větvi vyskytuje například „a“, nelze použít při eliminaci $\exists$ konstantu „a“, ale konstantu „b“, samozřejmě pokud je tato „b“ nová. Zde je schematický příklad, v němž si též ukážeme, jak a kde značit novost konstanty při eliminaci $\exists$:

1.	$\forall y\ (F(y) \vee G(a))$		daná formule; ta už obsahuje konstantu „a“
2.	$\neg \forall x\ F(x)$	✓	negace závěru
	$\vert$		
3.	$\exists x\ \neg F(x)$	✓b	$\neg \forall$ (2); „✓b“ vyznačuje, že formule byla níže
	$\vert$		dekomponována, a přitom byla užita nová
4.	$F(b)$		konstanta „b“ (užití „a“ vedoucí k „F(a)“ by
	$\vert$		bylo chybou)

Při eliminaci $\forall$ užíváme pokud možno starou konstantu, tj. konstantu, jež už byla výše ve větvi uvedena. Důležité také je, že pravidlo eliminace $\forall$ umožňuje opakované použití, tedy tvorbu nových konkrétních instancí. Proto nedáváme zatržítko „✓“ a mluvíme raději o použití, nikoli o dekompozici, dané formule. Zde je ukázka (to, že je čára $\vert$ například v kroku 2. přerušena, je jen výsledkem typografického zjednodušení, v daném kroku je myšlena jedna nepřerušovaná čára):

1.	$\neg P(a)$		daná formule
	$\vert$		
2.	$\exists x \forall y\ (R(x,y) \wedge P(x))$	✓b	daná formule; „✓b“ vyznačuje, že
	$\vert$		formule byla níže dekomponována,
	$\vert$		a přitom byla užita nová konstanta „b“
3.	$\forall y\ (R(b,y) \wedge P(b))$	\a,\b	$\exists$ (2); „\a“ nevyznačuje, že formule
	$\vert$		byla dekomponována, ale že je
	$\vert$		někde níže použita její instance
	$\vert$		obsahující (starou) konstantu „a“;
	$\vert$		podobně pro „\b“
4.	$R(b,a) \wedge P(b)$	✓	$\forall$ (3); instance formule 3., kdy „a“ je
	$\vert$		stará konstanta
5.	$R(b,b) \wedge P(b)$	✓	$\forall$ (3); jiná instance formule 3 díky „b“
	$\vert$		

Pokud můžeme v důkaze volit mezi aplikací pravidel $\forall$ a $\exists$, přednostně volíme pravidlo $\exists$, neboť to důkaz nevyhnutelně rozšiřuje o novou konstantu. Kdybychom už před tím aplikací $\forall$ zavedli novou konstantu, museli bychom při aplikaci $\exists$ zavést další; když ale začneme pravidlem $\exists$, tak zavedeme novou konstantu, kterou při následné aplikaci pravidla $\forall$ můžeme znovu využít, aniž bychom museli zavádět další konstantu.

Zde je přehled pomocného značení formulí:

- ✓ formuli jsme dekomponovali (a proto ji už nelze znovu dekomponovat)
- formule buďto a) jde použít znovu, neboť je to formule začínající nenegovaným obecným kvantifikátorem, anebo se jedná b) o (negovanou či nenegovanou) atomickou formuli, anebo je c) větev záhy uzavřena, takže formuli není třeba dekomponovat
- ✓a formuli jsme dekomponovali a zavedli jsme přitom novou konstantu „a"
- \a formuli jsme použili a zavedli jsme přitom novou konstantu „a", pokud tato už nebyla dříve zavedena, přičemž v takovémto případě by se jednalo o starou konstantu

A zde je přehled značení větví:

- o takto označená větev je dokončená a otevřená
- ničím neoznačená větev je nedokončená (možná je neukončitelná)
- × takto označená větev je dokončená a uzavřená

Nyní si ukážeme, že některé stromy nelze uzavřít. Zde je často uváděný příklad:

1.	$\forall x \exists y\ R(x,y)$	\a,\b,...	předpoklad
	|		
2.	$\exists y\ R(a,y)$	✓b	UI (1)
	|		
3.	R(a,b)		E∃ (2)
	|		
4.	$\exists y\ R(b,y)$	✓c	UI (1)
	|		
5.	R(b,c)		E∃ (4)
	|		
	...		

Takto metoda sémantických tabel zrcadlí Churchův teorém o nerozhodnutelnosti polyadického (tj. relačního) fragmentu PL1 (viz výše sekci 15.5).

Tím se zároveň dostáváme k obecným logickým vlastnostem této důkazové metody. Jakožto systém je důkazová metoda sémantických tabel:

- korektní – formule A dokazatelná T metodou sémantických tabel je logicky pravdivá formule, tj. $T \vDash A$
- úplná je ale jen částečně:

i. pokud A je sémantickým důsledkem (vyplývá z) T, tj. $T \vDash A$, tak A je dokazatelná danou metodou, tj. existuje příslušný stromový důkaz (tablo)

ii. pokud A není sémantickým důsledkem (nevyplývá z) T, tj. $T \nvDash A$, tak k A může, ale nemusí existovat příslušný stromový důkaz (tablo); důkaz neexistuje jen pro některé množiny formulí obsahující relační predikáty.

Z hlediska vyhodnocování stromových *důkazů* pak platí, že:

- *uzavřený* stromový důkaz A z T znamená $T \vDash A$
- *otevřený* (a *dokončený*) stromový důkaz A z T znamená $T \nvDash A$
- *neukončitelný* stromový důkaz A z T neznamená, že $T \nvDash A$

Takže *větev* je a) *uzavřená*, nebo b) *otevřená a dokončená*, c) *nedokončená*, přičemž případ c) zahrnuje také to, že d) je *neukončitelná*.

To, že je otevřená větev dokončená, poznáme z toho, že i) každá dekomponovatelná formule je dekomponována a tedy zaškrtnuta zatržítkem „✓“, nebo ii) každá formule začínající (nenegovaným) obecným kvantifikátorem je uplatněna, přičemž každá konstanta vyskytující se v dané větvi je přítomna v jedné instanci (tj. uplatnění) této obecně kvantifikované formule. V zájmu naplnění podmínky ii) se snažíme udržovat množství konstant ve větvi co nejmenší, abychom pro ně nemuseli vyrábět instance obecně kvantifikované formule.

Úplně nakonec doplníme pravidla pro identitu:

$=$

$$\begin{array}{c} (t_1 = t_2) \\ \vdots \\ | \\ A[t_1/x] \end{array} \qquad \begin{array}{c} (t_1 = t_2) \\ \vdots \\ | \\ A[t_2/x] \end{array}$$

$\neg =$

$$\begin{array}{c} \neg(t = t) \\ \times \end{array}$$

17.8 Příklady – důkazy metodou sémantických tabel

1)

Dokažte $\forall x\ P(x) \vdash P(a)$:

1.	$\forall x\ P(x)$	\a	předpoklad
2.	$\neg P(a)$		negace závěru
	|		
3.	$P(a)$		$\forall$ (1)
	×		

Daná inference $\forall x\ P(x) \vdash P(a)$ platí. (Neexistuje totiž ukončená otevřená větev tohoto důkazu sporem, tj. neexistuje model množiny formulí $T \cup \{\neg A\}$, kde T jsou dané předpoklady a A daný závěr. Obdobně níže.)

2)

Dokažte $\exists x\ P(x) \vdash \neg P(a)$:

1.	$\exists x\ P(x)$	✓a	předpoklad
2.	$\neg\neg P(a)$	✓	negace závěru
	|		
3.	$P(a)$		$\neg\neg$ (2)
	|		
4.	$P(b)$		$\exists$ (1)
	o		

Daná inference $\exists x\ P(x) \vdash \neg P(a)$ neplatí. (Existuje totiž ukončená otevřená větev tohoto důkazu sporem, tj. existuje model množiny formulí $T \cup \{\neg A\}$, kde T jsou dané předpoklady a A daný závěr. Obdobně níže.)

3)

Dokažte $\forall x\ P(x) \vdash \neg\exists x\ \neg P(x)$:

1.	$\forall x\ P(x)$	\a	předpoklad
2.	$\neg\neg\exists x\ \neg P(x)$	✓	negace závěru
	|		
3.	$\exists x\ \neg P(x)$	✓a	$\neg\neg$ (2)
	|		
4.	$\neg$P(a)		$\exists$ (3)
	|		
5.	P(a)		$\forall$ (1)
	×		

Daná inference platí.

4)

Dokažte $R(a,b) \vdash \exists x\ R(x,b)$:

1.	R(a,b)		předpoklad
2.	$\neg\exists x\ R(x,b)$	✓	negace závěru
	|		
3.	$\forall x\ \neg R(x,b)$	\a	$\neg\exists$ (2)
	|		
4.	$\neg$R(a,b)		$\forall$ (3)
	×		

Daná inference platí.

5)

Dokažte $\neg\forall x\, P(x) \vdash \exists x\, \neg P(x)$:

1.	$\neg\forall x\, P(x)$	✓	předpoklad
2.	$\neg\exists x\, \neg P(x)$	✓	negace závěru
	$\vert$		
3.	$\exists x\, \neg P(x)$	✓a	$\neg\forall$ (1)
	$\vert$		
4.	$\neg P(a)$		$\exists$ (3)
	$\vert$		
5.	$\forall x\, \neg\neg P(x)$	\a	$\neg\exists$ (2)
	$\vert$		
6.	$\neg\neg P(a)$		$\forall$ (5)
	×		

Daná inference platí.

6)

Dokažte $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$:

1.	$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$		✓a	předpoklad
2.	$\neg(\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$		✓	negace závěru
	$\vert$			
3.	$P(a) \wedge Q(a)$		✓	$\exists$ (1)
	$\vert$			
4.	$P(a)$			$\wedge$ (3)
5.	$Q(a)$			$\wedge$ (3)
	/	\		
6.	$\neg\exists x\, P(x)$ ✓	$\neg\exists x\, Q(x)$ ✓		$\neg\wedge$ (2)
	$\vert$	$\vert$		
7.	$\forall x\, \neg P(x)$ \a	$\forall x\, \neg Q(x)$ \a		(2x) $\neg\exists$ (6)
	$\vert$	$\vert$		
8.	$\neg P(a)$	$\neg Q\,(a)$		(2x) $\forall$ (7)
	×	×		

Daná inference platí.

7)

Dokažte $\forall x\,(F(x) \lor G(x)) \vdash (\forall x\,F(x) \lor \forall x\,G(x))$:

1.	$\forall x\,(F(x) \lor G(x))$	\a,\b	předpoklad
2.	$\neg(\forall x\,F(x) \lor \forall x\,G(x))$	✓	negace závěru
	|		
3.	$\neg\forall x\,F(x)$	✓	$\neg\lor$ (2)
4.	$\neg\forall x\,G(x)$	✓	$\neg\lor$ (2)
	|		
5.	$\exists x\,\neg F(x)$	✓a	$\neg\forall$ (4)
6.	$\exists x\,\neg G(x)$	✓b	$\neg\forall$ (4)
	|		
7.	$\neg F(a)$		$\exists$ (5)
8.	$\neg G(b)$		$\exists$ (6)
	|		
9.	$F(a) \lor G(a)$	✓	$\forall$ (1)
	/ \		
10.	$F(a)$ $G(a)$		$\lor$ (9)
	× |		
11.	$F(b) \lor G(b)$ ✓		$\forall$ (1)
	/ \		
12.	$F(b)$ $G(b)$		$\lor$ (11)
	o ×		

Daná inference neplatí.

8)

Dokažte $\forall x\ (F(x)\rightarrow G(x)),\ \exists x\ \neg G(x) \vdash \exists x\ \neg F(x)$:

1.	$\forall x\ (F(x)\rightarrow G(x))$	\a	předpoklad
2.	$\exists x\ \neg G(x)$	✓a	předpoklad
3.	$\neg\exists x\ \neg F(x)$	✓	negace závěru
	|		
4.	$\neg G(a)$		$\exists$ (2)
	|		
5.	$F(a)\rightarrow G(a)$	✓	$\forall$ (1)
	|		
6.	$\forall x\ \neg\neg F(x)$	\a	$\neg\exists$ (3)
	|		
7.	$\neg\neg F(a)$	✓	$\forall$ (6)
	|		
8.	$F(a)$		$\neg\neg$ (6) (tento krok může být vynechán)
	/ \		
9.	$\neg F(a)$ $G(a)$		$\rightarrow$ (5)
	× ×		

Daná inference platí.

9)

Dokažte $\forall x\,(F(x)\lor G(x)) \vdash (\forall x\,(F(x)\lor\forall x\,G(x)))$:

1.	$\forall x\,(F(x)\lor G(x))$	\a,\b	předpoklad
2.	$\neg(\forall x\,(F(x)\lor\forall x\,G(x)))$	✓	negace závěru
	|		
3.	$\neg\forall x\,F(x)$	✓	$\neg\lor$ (2)
4.	$\neg\forall x\,G(x)$	✓	$\neg\lor$ (2)
	|		
5.	$\exists x\,\neg F(x)$	✓a	$\neg\forall$ (3)
	|		
6.	$\exists x\,\neg G(x)$	✓b	$\neg\forall$ (4)
	|		
7.	$\neg F(a)$		$\exists$ (5)
	|		
8.	$\neg G(b)$		$\exists$ (6)
	|		
9.	$F(a)\lor G(a)$	✓	$\forall$ (1)
	/ \		
10.	$F(a)$ $G(a)$		$\lor$ (9)
	× |		
11.	$F(b)\lor G(b)$ ✓		$\forall$ (1)
	/ \		
12.	$F(b)$ $G(b)$		$\lor$ (11)
	o ×		

Daná inference neplatí.

10)

Dokažte $\exists x\, F(x) \wedge \exists x\, G(x) \vdash \exists x\, (F(x) \wedge G(x))$:

1.	$\exists x\, F(x) \wedge \exists x\, G(x)$	✓	předpoklad
2.	$\neg \exists x\, (F(x) \wedge G(x))$	✓	negace závěru
	|		
3.	$\exists x\, F(x)$	✓a	$\wedge$ (1)
4.	$\exists x\, G(x)$	✓b	$\wedge$ (1)
	|		
5.	F(a)		$\exists$ (3)
	|		
6.	G(b)		$\exists$ (4)
	|		
7.	$\forall x\, \neg (F(x) \wedge G(x))$	$\backslash$a,$\backslash$b	$\neg\exists$ (2)
	|		
8.	$\neg(F(a) \wedge G(a))$	✓	$\forall$ (7)
	/ \		
9.	$\neg F(a)$ $\neg G(a)$		$\neg\wedge$ (8)
	× |		
10.	$\neg(F(b) \wedge G(b))$ ✓		$\forall$ (7)
	/ \		
11.	$\neg F(b)$ $\neg G(b)$		$\neg\wedge$ (10)
	o ×		

Daná inference neplatí.

11)

Dokažte $\forall x\,(M(x) \rightarrow M(a)),\ \neg M(a) \vdash \neg\exists x\, M(x)$:

1.	$\forall x\,(M(x) \rightarrow M(a))$	\a,\b	předpoklad
2.	$\neg M(a)$		předpoklad
3.	$\neg\neg\exists x\, M(x)$	✓	negace závěru
4.	$\exists x\, M(x)$	✓b	¬¬ (3)
5.	$M(b)$		∃ (4)
6.	$M(a) \rightarrow M(a)$	✓	∀ (1)
7.	$\neg M(a)$ $M(a)$ ×		→ (6)
8.	$M(b) \rightarrow M(a)$ ✓		∀ (1)
9.	$\neg M(b)$ × $M(a)$ ×		→ (8)

Daná inference platí.

12)

Dokažte $\neg\forall x\, G(x) \rightarrow \exists y\, F(y,a),\ \forall x\, \neg F(x,x) \vdash \exists z\, (G(z) \wedge F(z,z))$:

1.	$\neg\forall x\, G(x) \rightarrow \exists y\, F(y,a)$		✓	předpoklad
2.	$\forall x\, \neg F(x,x)$		\a	předpoklad
3.	$\neg\exists z\, (G(z) \wedge F(z,z))$		✓	negace závěru
	|			
4.	$\forall z\, \neg(G(z) \wedge F(z,z))$		\b	$\neg\exists$ (3)
	/	\		
5.	$\neg\neg\forall x\, G(x)$ ✓	$\exists y\, F(y,a))$ ✓a		$\rightarrow$ (1)
	|	|		
6.	$\forall x\, G(x)$ \b	F(a,a)		$\neg\neg$ (5); $\exists$ (5)
	|	|		
7.	G(b)	$\neg$F(a,a)		$\forall$ (6); $\forall$ (2)
	|	×		
8.	$\neg$(G(b)$\wedge$F(b,b)) ✓			$\forall$ (4)
	/ \			
9.	$\neg$(G(b) $\neg$F(b,b))			$\neg\wedge$ (8)
	× o			

Daná inference neplatí.

13)

Dokažte $\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x)),\ \neg\exists x\,G(x) \vdash \neg\exists x\,F(x)$:

1.	$\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$	\a	předpoklad
2.	$\neg\exists x\,G(x)$	✓	předpoklad
3.	$\neg\exists x\,F(x)$	✓	negace závěru
4.	$\exists x\,F(x)$	✓a	$\neg\neg$ (3)
5.	$F(a)$		$\exists$ (4)
6.	$\forall x\,\neg G(x)$	\a	$\neg\exists$ (2)
7.	$\neg G(a)$		$\forall$ (6)
8.	$F(a) \rightarrow G(a)$	✓	$\forall$ (1)
9.	$\neg F(a)$ $G(a)$		$\rightarrow$ (8)
	× ×		

Daná inference platí.

14)

Dokažte $\forall x \exists y\ (F(x) \wedge G(y)) \vdash \exists y \forall x\ (F(x) \wedge G(x))$:

1.	$\forall x \exists y\ (F(x) \wedge G(y))$	\a	předpoklad
2.	$\neg \exists y \forall x\ (F(x) \wedge G(y))$	✓	negace závěru
	|		
3.	$\exists y\ (F(a) \wedge G(y))$	✓b	$\forall$ (1)
	|		
4.	$F(a) \wedge G(b)$	✓	$\exists$ (3)
	|		
5.	$F(a)$		$\wedge$ (4)
6.	$G(b)$		$\wedge$ (4)
	|		
7.	$\forall y \neg \forall x\ (F(x) \wedge G(y))$	✓	$\neg\exists$ (2)
	|		
8.	$\forall y \exists x\ \neg(F(x) \wedge G(y))$	\b	$\neg\forall$ (3)
	|		
9.	$\exists x\ \neg(F(x) \wedge G(b))$	✓c	$\forall$ (8)
	|		
10.	$\neg(F(c) \wedge G(b))$	✓	$\exists$ (9)
	/ \		
11.	$\neg F(c)$ $\neg G(b)$		$\neg\wedge$ (6)
	o ×		

Daná inference neplatí.

15)

Zjistěte, zda je logicky pravdivá formule $\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists x\, P(x))$:

1.	$\neg \forall x\,(P(x) \rightarrow \exists x\, P(x))$	✓	negace dané formule
	|		
2.	$\exists x\, \neg (P(x) \rightarrow \exists x\, P(x))$	✓a	$\neg \forall$ (1)
	|		
3.	$\neg (P(a) \rightarrow \exists x\, P(x))$	✓	$\exists$ (2)
	|		
4.	$P(a)$		$\neg \rightarrow$ (3)
5.	$\neg \exists x\, P(x)$	✓	$\neg \rightarrow$ (3)
	|		
6.	$\forall x\, \neg P(x)$	\a	$\neg \exists$ (5)
	|		
7.	$\neg P(a)$		$\forall$ (6)
	×		

Daná formule je logicky pravdivá.

16)

Zjistěte, zda je logicky pravdivá formule $\forall x\,(A(y)\to B(x))\to(A(y)\to\forall x\,B(x))$:

1.	$\neg(\forall x\,(A(y)\to B(x))\to(A(y)\to\forall x\,B(x)))$	✓	negace dané formule
2.	$\forall x\,(A(y)\to B(x))$	\a	$\neg\to$ (1)
3.	$\neg(A(y)\to\forall x\,B(x))$	✓	$\neg\to$ (1)
4.	$A(y)$		$\neg\to$ (3)
5.	$\neg\forall x\,B(x)$	✓	$\neg\to$ (3)
6.	$\exists x\,\neg B(x)$	✓a	$\neg\forall$ (5)
7.	$\neg B(a)$		$\exists$ (6)
8.	$A(y)\to B(a)$	✓	$\forall$ (2)
9.	$\neg A(y)$ $B(a)$		$\to$ (8)
	× ×		

Daná formule je logicky pravdivá.

17)

Zjistěte, zda je logicky pravdivá formule $(\forall x\ A(x)\rightarrow\forall x\ B(x))\rightarrow\forall x\ (A(x)\rightarrow B(x))$:

1.	$\neg((\forall x\ A(x)\rightarrow\forall x\ B(x))\rightarrow\forall x\ (A(x)\rightarrow B(x)))$		✓	negace dané formule
	|			
	|			
2.	$\forall x\ A(x)\rightarrow\forall x\ B(x)$		✓	$\neg\rightarrow$ (1)
3.	$\neg\forall x\ (A(x)\rightarrow B(x))$		✓	$\neg\rightarrow$ (1)
	|			
4.	$\exists x\ \neg(A(x)\rightarrow B(x))$		✓a	$\neg\forall$ (3)
	|			
5.	$\neg(A(a)\rightarrow B(a))$		✓	$\exists$ (4)
	|			
6.	$A(a)$			$\neg\rightarrow$ (5)
7.	$\neg B(a)$			$\neg\rightarrow$ (5)
	/	\\		
8.	$\neg\forall x\ A(x)$ ✓	$\forall x\ B(x)$ \\a		$\rightarrow$ (2)
	|	|		
9.	$\exists x\ \neg A(x)$ ✓b	$B(a)$		$\neg\forall$ (8); $\forall$ (8)
	|	×		
	$\neg A(b)$			$\exists$ (9)
	o			

Daná formule není logicky pravdivá.

18)

Zjistěte, zda je logicky pravdivá formule $\forall x\forall y\,((x=y)\rightarrow(y=x))$:

1.	$\neg\forall x\forall y\,((x=y)\rightarrow(y=x))$		negace dané formule
	$\mid$		
2.	$\exists x\neg\forall y\,((x=y)\rightarrow(y=x))$	✓a	$\neg\forall$ (1)
	$\mid$		
3.	$\neg\forall y\,((\mathrm{a}=y)\rightarrow(y=\mathrm{a}))$	✓	$\exists$ (2)
	$\mid$		
4.	$\exists y\,\neg((\mathrm{a}=y)\rightarrow(y=\mathrm{a}))$	✓b	$\neg\forall$ (3)
	$\mid$		
5.	$\neg((\mathrm{a}=\mathrm{b})\rightarrow(\mathrm{b}=\mathrm{a}))$	✓	$\exists$ (4)
	$\mid$		
6.	$(\mathrm{a}=\mathrm{b})$		$\neg\rightarrow$ (5)
7.	$\neg(\mathrm{b}=\mathrm{a})$		$\neg\rightarrow$ (5)
	$\mid$		
8.	$\neg(\mathrm{b}=\mathrm{b})$		$=$ (6,7)
	$\times$		

Daná formule je logicky pravdivá.

19)

Najděte model (je-li jaký) množiny formulí $\{\forall x\,(\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists y\,\mathrm{R}(y,x)),\ \forall x\,\mathrm{P}(x)\}$:

1.		$\forall x\,(\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists y\,\mathrm{R}(y,x))$	\a	daná formule
2.		$\forall x\,\mathrm{P}(x)$	\a	daná formule
		$\mid$		
3.		$\mathrm{P}(\mathrm{a})$		$\forall$ (2)
		$\mid$		
4.		$\mathrm{P}(\mathrm{a})\rightarrow\exists y\,\mathrm{R}(y,\mathrm{a})$		$\forall$ (1)
	/	\		
5.	$\neg\mathrm{P}(\mathrm{a})$	$\exists y\,\mathrm{R}(y,\mathrm{a})$ ✓b		$\rightarrow$ (4)
	$\times$	$\mid$		
6.		$\mathrm{R}(\mathrm{b},\mathrm{a})$		$\exists$ (5)
		o		

Model dané množiny formulí zahrnuje $\Im(\mathrm{P})=\{\alpha\}$, $\Im(\mathrm{R})=\{\langle\beta,\alpha\rangle\}$.

20)

Najděte model (je-li jaký) množiny formulí $\{(\exists x\ Q(x) \rightarrow \forall y\ S(y,b)), \exists z\ \neg S(z,b)\}$:

1.	$\exists x\ Q(x) \rightarrow \forall y\ S(y,b)$			daná formule
2.	$\exists z\ \neg S(z,b)$		✓a	daná formule
	|			
3.	$\neg S(a,b)$			$\exists$ (2)
	/	\		
4.	$\neg \exists x\ Q(x)$ ✓	$\forall y\ S(y,b)$ \a		$\neg \forall$ (2)
	|	|		
5.	$\forall x\ \neg Q(x)$ \a,\b	$S(a,b)$		$\neg \exists$ (4); $\forall$ (4)
	|	×		
6.	$\neg Q(a)$			$\forall$ (5)
	|			
7.	$\neg Q(b)$			$\forall$ (5)
	o			

Model dané množiny formulí zahrnuje $\Im(Q)=\{\cancel{\alpha,\beta}\}$, $\Im(S)=\{\cancel{\langle\alpha,\beta\rangle}\}$.

18. PL druhého řádu

V PL2 jsou na rozdíl od PL1 povoleny i predikátové proměnné. Ty nabývají jako hodnoty nějaké množiny, jmenovitě podmnožiny univerza nebo podmnožiny kartézského součinu univerza (tj. relace). Navíc tyto predikátové proměnné mohou být kvantifikovány. Známým příkladem výrazu PL2 je např. zápis Leibnizovy identity nerozlišitelných entit:

$$\forall x \forall y\ (x{=}y) \leftrightarrow \forall P\ (P(x) {\leftrightarrow} P(y)),$$

tedy že pro všechna individua x a y platí, že x a y jsou identická právě tehdy, když mají všechny vlastnosti stejné (P je zde proměnná pro vlastnosti). Předmětem PL2 jsou zejména vlastnosti binárních relací.

Jak už bylo naznačeno, v našich zápisech jsou znaky M, N, O, R, S proměnné pro množiny/třídy či relace. (Jsou to objektové proměnné, nikoli metajazykové proměnné zastupující predikátové symboly.) V našich definicích se proměnné jako např. M (či R) vyskytují ve formulích po obou stranách definičního znaku „$=_{df}$“ volně; předpokládá se přitom, že celá definice je z objektového hlediska formulí tvaru ekvivalence (kdy „$=_{df}$“ zastupuje „$\leftrightarrow$“), jež je uzavřena příslušným obecným kvantifikátorem (kvantifikátory) $\forall M$ (či $\forall R$).

Kromě logiky druhého řádu se někdy hovoří o *logice vyšších řádů* (než 2), někdy se tím míní všech řádů včetně řádu 2. Pod logikou vyššího řádů je tedy myšlena logika umožňující kvantifikaci přes třídy tříd (množiny množin), resp. logika umožňující kvantifikovat přes entity jakéhokoli řádu. Obory proměnných jsou přitom omezovány na entity určitého druhu, na tzv. *sorty* (sorta individuí, sorta tříd individuí, sorta tříd tříd individuí, atd.).

18.1 Třídy

V logice se, zčásti z historických důvodů, množinám říká *třídy* (angl. „classes“). Problematika ukazovaná v této sekci pak bývá někdy nazývána *logika tříd*. V jistém smyslu se nejedná o nic jiného než o překlad jazyka teorie množin, a v ní uváděných poznatků, do jazyka PL. Například si ukážeme, že „$M \cap N$“ lze prostředky PL vyjádřit s pomocí „$(M(x) \land N(x))$“. Z jiného úhlu pohledu, operátor $\cap$ (resp. jeho symbol „$\cap$“) se dá definovat (proto níže „$=_{df}$“) s pomocí „$(M(x) \land N(x))$“.

Všimněme si, že „$M \cap N$“ je infixním zápisem, prefixní „$\cap(M,N)$“ se neužívá. Připomeňme si ještě, že M, N, O jsou libovolné podmnožiny U.

V záhy uváděném přehledu používáme při definování nepříliš povědomé zápisy jako „$(M \cap N)(x)$“. Pro jejich pochopení si uvědomme, že $(M \cap N)$ je nějaká množina O a my proto vlastně zapisujeme, že x patří do O. (Při užití lambda-notace se těmto komplikacím můžeme vyhnout díky λ-operátoru, protože můžeme psát jednoduše např. $\emptyset =_{df} \lambda x\ (M(x) \wedge \neg M(x))$; v PL se naproti tomu vždy musí po stranách „$=_{df}$“ vyskytovat formule, např. „$\emptyset(x) =_{df} (M(x) \wedge \neg M(x))$“.)

Ač na jedné straně hovoříme o definicích symbolů jako např. „$\cap$“, na ontologické rovině se při postulování například $M \cap N$ jedná o stavbu dané třídy, proto můžeme z druhé strany hovořit jako o principech stavby tříd:

Principy stavby tříd (definice třídových operátorů)

Doplněk třídy	$M^C(x)$	$=_{df}$	$\neg M(x)$
Prázdná třída	$\emptyset(x)$	$=_{df}$	$(M(x) \wedge \neg M(x))$
Univerzální třída	$\mathrm{U}(x)$	$=_{df}$	$(M(x) \vee \neg M(x))$
Inkluze tříd	$(M \subseteq N)(x)$	$=_{df}$	$(M(x) \rightarrow N(x))$
Rovnost tříd	$(M = N)(x)$	$=_{df}$	$(M(x) \leftrightarrow N(x))$
Průnik tříd	$(M \cap N)(x)$	$=_{df}$	$(M(x) \wedge N(x))$
Sjednocení tříd	$(M \cup N)(x)$	$=_{df}$	$(M(x) \vee N(x))$

Jistě zde bude užitečné srovnání obdobných notačních prostředků jazyka PL a jazyka teorie množin (tříd):

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
M^C	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$	$=$

Vzhledová podobnost operátorů daných dvou jazyků bude vyšší, když si připomeneme, že „M^C“ bývá mnohdy značeno např. „$-M$“, a dále že „$\rightarrow$“ a „$\leftrightarrow$“ bývají značeny i „$\supset$“ a „$\equiv$“.

V následujícím přehledu uvádíme základní zákony pro operace se třídami (= je proto rovnost mezi třídami), čemuž se někdy říká *algebra tříd*, v logice pak obvykle *kalkul tříd*. Všimněme si zjevné isomorfie těchto zákonů se zákony VL, popř. PL.

Zákony tříd

$(M^{C})^{C}$	=	M	zákon dvojitého komplementu
$M \cap N$	=	$N \cap M$	zákony komutativity
$M \cup N$	=	$N \cup M$	
$(M \cap N) \cap O$	=	$M \cap (N \cap O)$	zákony asociativity
$(M \cup N) \cup O$	=	$M \cup (N \cup O)$	
$M \cap (N \cup O)$	=	$(M \cap N) \cup (M \cap O)$	zákony distributivity
$M \cup (N \cap O)$	=	$(M \cup N) \cap (M \cup O)$	
$M \cap M$	=	M	zákony idempotence
$M \cup M$	=	M	
$M \cap N$	=	$(M^{C} \cup N^{C})^{C}$	De Morganovy zákony tříd
$M \cup N$	=	$(M^{C} \cap N^{C})^{C}$	
$M \cap \emptyset$	=	$\emptyset$	
$M \cup \emptyset$	=	M	
$M \cap \mathrm{U}$	=	M	
$M \cup \mathrm{U}$	=	U	

Zde právě uvedené zákony jsou rovnosti (rovnosti mezi množinami), kromě nich však platí i řada jiných *zákonů tříd*. Například:

$\forall M\ (M \subseteq M)$	zákon reflexivity $\subseteq$
$\forall M \forall N\ ((M \subset N) \wedge (N \subset M) \rightarrow (M = N))$	zákon (slabé) antisymetrie $\subset$
$\forall M \forall N \forall O\ ((M \subset N) \wedge (N \subset O)) \rightarrow (M \subset O)$	zákon tranzitivity $\subset$

V axiomatických teoriích tříd (v logice tříd) jde tudíž dokazovat rozmanité formule týkající se tříd.

Za zmínku stojí, že v teorii tříd lze ověřovat platnost kategorických sylogismů (nejen díky Boolově způsobu formalizace). Například důkaz sylogismu druhu barbara, jehož premisy a závěr jsou formalizovatelné $\forall x\ (M \subseteq P)(x)$, $\forall x\ (S \subseteq M)(x)\ \therefore\ \forall x\ (S \subseteq P)(x)$ využívá kromě univerzální instanciace tranzitivity $S \subseteq M \subseteq P$.

18.2 Cvičení – definice třídových operátorů

1)

Definujte množinové relace a) doplňku (tj. M^C), b) inkluze (tj. $\subseteq$), c) sjednocení (tj. $\cup$), a d) průniku (tj. $\cap$).

2)

Definujte množiny-třídy a) $\emptyset$, b) U; definujte c) relaci = mezi množinami-třídami.

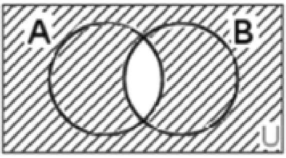
18.2 Řešení – definice třídových operátorů

Srov. výše v sekci 18.1 tabulku „Principy stavby tříd (definice třídových operátorů)“.

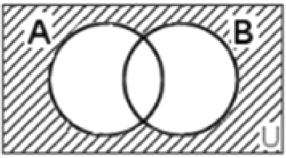
18.3 Cvičení – formální popis množinové situace

Pomocí jazyka PL a ekvivalentně pomocí jazyka teorie množin (resp. tříd) vymezte, přesně v kterých podmnožinách individua jsou. Šraf na daném obrázku ukazuje, kde žádná individua nejsou.

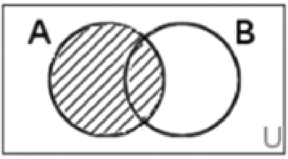
1)



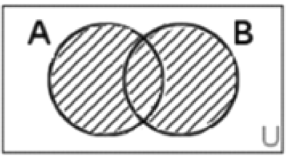
2)



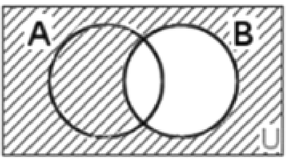
3)



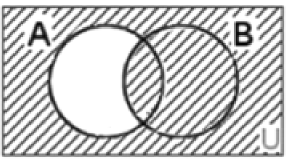
4)



5)



6)



18.3 Řešení – formální popis množinové situace

	Zápis v PL:	Množinový zápis:
1)	$\forall x\,(A(x) \wedge B(x))$	$A \cap B$
2)	$\forall x\,(A(x) \vee B(x))$	$A \cup B$
3)	$\forall x\,\neg A(x)$	$U - A$
4)	$\forall x\,\neg(A(x) \vee B(x))$	$(A \cup B)^C$
5)	$\forall x\,B(x)$	B
6)	$\forall x\,(A(x) \wedge \neg B(x))$	$A \cap B^C$

18.4 Binární relace

O množinovém chápání relací jsme hovořili již výše v sekci 1.2. Tyto n-ární relace nad univerzem U jsou podmnožinami kartézského součinu U^n. Protože jsou relace množiny, většina principů jejich stavby je shodná s principy stavby obyčejných množin. Zajímavější jsou proto až vlastnosti relací.

V našem zápisu relací neužíváme mnohdy používanou infixní notaci (např. „*xRy*“), používáme notaci výše zavedenou v gramatice PL1 pro binární predikátové symboly. Přidáváme druhořádové proměnné pro binární relace, „*R*“ a „*S*“. Z daných kontextů jako např. „$\emptyset(x,y)$“, je zřejmé, že „$\emptyset$“ označuje prázdnou množinou dvojic.

V principech stavby se relace liší od obyčejných množin jen tím, že navíc existují inverzní relace a dále kompozice (skládání) relací.

Principy stavby binárních relací (definice relačních operátorů)

Doplněk relace	$R^{C2}(x,y)$	$=_{df}$	$\neg R(x,y)$
Inverzní relace	$R^{-1}(x,y)$	$=_{df}$	$R(y,x)$
Prázdná relace	$\emptyset(x,y)$	$=_{df}$	$(R(x,y)\wedge\neg R(x,y))$
Univerzální relace	$\mathrm{U}^2(x,y)$	$=_{df}$	$(R(x,y)\vee\neg R(x,y))$
Inkluze relací	$R\subseteq S(x,y)$	$=_{df}$	$(R(x,y)\rightarrow S(x,y))$
Rovnost relací	$R=S(x,y)$	$=_{df}$	$(R(x,y)\leftrightarrow S(x,y))$
Průnik relací	$R\cap S(x,y)$	$=_{df}$	$(R(x,y)\wedge S(x,y))$
Sjednocení relací	$R\cup S(x,y)$	$=_{df}$	$(R(x,y)\vee S(x,y))$
Kompozice relací	$R\circ S(x,y)$	$=_{df}$	$\exists z\,(R(x,z)\wedge S(z,y))$

Inverzní relace je někdy zvána *konverzní relace*. Kompozici relací si nepleťme s relačním součinem a relačním součtem, což jsou starší názvy pro průnik a sjednocení relací (když ale někteří autoři hovoří jen o součinu relací, mohou uvažovat kompozici relací).

Příkladem prázdné relace je ‚nebýt identický se sebou' (pro žádné x totiž neplatí $x\neq x$). Příkladem univerzální relace je ‚být v nějakém vztahu k (něčemu)' (každá entita je alespoň v nějakém vztahu k něčemu). Příkladem k sobě inverzních relací je ‚být potomkem (někoho)'–‚být předkem (někoho)' nebo ‚být rodič (někoho)'–‚být dítě (někoho)'. Příkladem relace v inkluzi je ‚být bratr (někoho)' vzhledem k ‚být příbuzný (někoho)'. Relace ‚být strýc' je definovatelná jako kompozice relací ‚být rodič' a ‚být bratr'; relace ‚být prarodič' je definovatelná jako kompozice relací ‚být rodič' a ‚být rodič'.

Nejdůležitější vlastnosti ze vzápětí uvedeného seznamu indikujeme pomocí „*". Protože se jedná jen o reflexivitu, symetrii a tranzitivitu, umět je definovat nevyžaduje zvláštní logický trénink, stačí jen dostatečné jazykové povědomí. Dále to, že žádná dvojice individuí není v relaci, jež by byla reflexivní / symetrická / tranzitivní, se jazykově nereprezentuje pomocí „anti-", ale pomocí „i-", resp. „a-" (ireflexivita, asymetrie, intranzitivita). Předpona „polo-" (v angl. „non-") znamená, že některé dvojice individuí v dané relaci jsou, některé nejsou.

Vlastnosti binárních relací

Reflexivita	Refl(R)	$=_{df}$	$\forall x\, R(x,x)$	*
Poloreflexivita	Polorefl(R)	$=_{df}$	$\exists x\, R(x,x) \wedge \exists x\, \neg R(x,x)$	
Antireflexivita	Antirefl(R)	$=_{df}$	$\neg \forall x\, R(x,x)$	
Ireflexivita	Irefl(R)	$=_{df}$	$\forall x\, \neg R(x,x)$	
Symetrie	Sym(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$	*
Polosymetrie	Polosym(R)	$=_{df}$	$\exists x \exists y\, (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)$ $\wedge \exists x \exists y\, (R(x,y) \wedge R(y,x))$	
Antisymetrie	Antisym(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y\, ((R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow (x=y))$	
Asymetrie	Asym(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$	
Tranzitivita	Trans(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y \forall z\, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$	*
Polotranzitivita	Polotrans(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y \forall z\, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$ $\wedge \forall x \forall y \forall z\, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow \neg R(x,z))$	
Antitranzitivita	Antitrans(R)	$=_{df}$	$\neg \forall x \forall y \forall z\, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$	
Intranzitivita	Intrans(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y \forall z\, ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow \neg R(x,z))$	
Konexnost	Con(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y\, ((x \neq y) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow R(y,x)))$	
Inkonexnost	Incon(R)	$=_{df}$	$\exists x \exists y\, ((x \neq y) \wedge \neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$	
Euklidovská relace	Eucl(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y \forall z\, ((R(x,y) \wedge R(x,z)) \rightarrow R(y,z))$	
Sériová relace	Serial(R)	$=_{df}$	$\forall x \exists y\, R(x,y)$	
Totální relace	Total(R)	$=_{df}$	$\forall x \forall y\, (R(x,y) \vee R(y,x))$	

Dané vlastnosti vymezují druhy relací, například vlastnost reflexivity vymezuje druh reflexivních relací.

Tranzitivitu lze alternativně definovat např. pomocí $\forall x \forall y \forall z\, ((R(x,y) \rightarrow (R(y,z) \rightarrow R(x,z)))$ kvůli zákonu exportace (VL). Konexnost lze alternativně definovat např. pomocí $\forall x \forall y\, ((x=y) \vee R(x,y) \vee R(y,x))$ (na základě tautologie VL).

Některé relace autoři nazývají jinak. Například totální relace bývá zvána *lineární relace*. Ba co víc, například $\forall x\, R(x,x)$ je někdy považována za definici úplné reflexivity, přičemž za vlastní definici reflexivity je považována až $\forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow R(x,x))$.

Všimněme si, že dané druhy relací nejsou navzájem disjunktní. Například každá asymetrická relace je též antisymetrická (asymetrie navíc zahrnuje ireflexitivitu). Polosymetrie je konjunkcí negace symetrie a negace asymetrie. Pod sériové relace zas spadají reflexivní relace. Atd.

Zde jsou příklady relací určitého druhu. Uvědomme si, že mnoho vztahů či relací má více než jednu z těchto vlastností, čili jsou příkladem více druhů.

- reflexivní: ‚být identický (se sebou)', ‚narcistně se obdivovat'
- poloreflexivní: ‚milovat (někoho)' (někdo nemiluje sám sebe, někdo ano)
- ireflexivní: ‚být ženatý (s někým)', ‚být potomkem (někoho)'
- symetrický: ‚mít se rád navzájem s (někým)', ‚být sourozenec (někoho)'
- polosymetrický: ‚znát (někoho)', ‚mít rád (někoho)'
- antisymetrický: ‚být dělitelný' (v oboru přirozených čísel)
- asymetrický: ‚platonicky milovat (někoho)', ‚být otcem (někoho)'
- tranzitivní: ‚být potomkem (někoho)', ‚být vyšší než (něco)', ‚být podmnožinou', ≤
- polotranzitivní: ‚být kořist' (v potravním řetězci někteří predátoři nejsou kořist)
- antitranzitivní: ‚porazit (někoho) v turnaji' (když x porazil y a y porazil z, x neporazil z)
- intranzitivní: ‚být otcem (někoho)'
- euklidovská: ‚věci y a z, které se rovnají stejnému x, jsou si rovny'
- sériová: ‚mít předka'

Významné jsou následující speciální druhy relací.

Speciální druhy binárních relací

Relace typu ekvivalence (R)	$=_{df}$	$\mathrm{Refl}(R) \wedge \mathrm{Sym}(R) \wedge \mathrm{Trans}(R)$
Částečné parciální uspořádání (R)	$=_{df}$	$\mathrm{Refl}(R) \wedge \mathrm{Antisym}(R) \wedge \mathrm{Trans}(R)$
Ostré uspořádání (R)	$=_{df}$	$\mathrm{Total}(R) \wedge \mathrm{Antisym}\ (R) \wedge \mathrm{Trans}(R)$

Částečné parciální uspořádání (angl. „weak partial order") je někdy nazýváno *kvazi uspořádání*. Příkladem takové relace je relace ≤ na množině přirozených čísel, anebo relace dělení přirozených čísel m a n beze zbytku. (Relace < se od ≤ liší tím, že < je ireflexivní, v důsledku čehož je < ostrým uspořádáním.) Druhů uspořádání je v literatuře definováno více, zde jsme se dále omezili už jen na jednu definici ostrého uspořádání. (Příklad axiomatizace teorie < viz v sekci 16.2, příklad axiomatizace teorie ≤ viz v sekci 16.1.)

Binární relace jsou někdy vyobrazovány *šipkovými diagramy*. Každá šipka ukazuje první a druhý člen nějaké dvojice, která je prvkem nějaké relace. To znamená, že relace je dána množinou šipek. Pokud nějaká šipka propojuje nějakou dvojici individuí, ale je přeškrtnuta, daná dvojice nepatří do dané relace. Pokud nějaká šipka nějakou dvojici individuí nepropojuje, daná dvojice v relaci může být, ale nemusí. Šipka propojující tři individua jako např. α, β, γ reprezentuje dvě dvojice ⟨α,β⟩, ⟨β,γ⟩. Někdy se používá obousměrná šipka, jež nahrazuje dvě jednosměrné šipky vedoucí opačnými směry. Zde jsou ukázky.

Diagram relace R={⟨α,α⟩,⟨β,β⟩,⟨γ,γ⟩}, která je reflexivní:

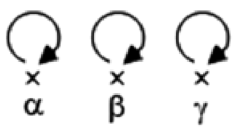
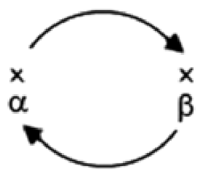
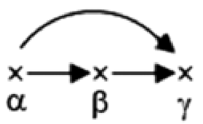


Diagram relace R={⟨α,β⟩,⟨β,α⟩}, která je symetrická:

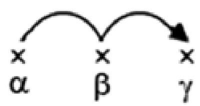


event.

Diagram relace R={⟨α,β⟩,⟨β,γ⟩,⟨α,γ⟩}, která je tranzitivní:



event.



18.5 Příklady – definice binárních relací

Protože vztahy modelujeme jako relace, můžeme v jazyce $PL1^{=}$ pohotově definovat například příbuzenské vztahy. Zde jsou konkrétní příklady:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Matka}(x,y) & =_{\text{df}} & (\check{\text{Z}}\text{ena}(x) \wedge \text{Dítě}(y,x)) \\
\text{Syn}(x,y) & =_{\text{df}} & (\text{Muž}(x) \wedge \text{Dítě}(x,y)) \\
\text{Rodič}(x,y) & =_{\text{df}} & \text{Dítě}(y,x) \\
\text{Prarodič}(x,y) & =_{\text{df}} & \exists z\, (\text{Rodič}(z,y) \wedge \text{Rodič}(x,z)) \\
\text{Sourozenec}(x,y) & =_{\text{df}} & \exists z\, (\text{Dítě}(x,z) \wedge \text{Dítě}(y,z) \wedge (x \neq y)) \\
\text{Bratr}(x,y) & =_{\text{df}} & (\text{Muž}(x) \wedge \text{Sourozenec}(x,y)) \\
\text{NevlastníSestra}(x,y) & =_{\text{df}} & \check{\text{Z}}\text{ena}(x) \wedge \exists! z\, (\text{Rodič}(z,x) \wedge \neg \text{Rodič}(z,y)) \\
\text{Tchán}(x,y) & =_{\text{df}} & \exists z\, (\text{Choť}(z,y) \wedge \text{Otec}(x,z)) \\
\text{Teta}(x,y) & =_{\text{df}} & (\check{\text{Z}}\text{ena}(x) \wedge \exists z\, (\text{Rodič}(z,y) \wedge \text{Sourozenec}(x,z))) \\
\text{Zeť}(x,y) & =_{\text{df}} & (\text{Muž}(x) \wedge \exists z\, (\text{Choť}(x,z) \wedge \text{Dcera}(z,y))) \\
\text{Neteř}(x,y) & =_{\text{df}} & \exists z\, (\text{Dcera}(x,z) \wedge \\
 & & (\text{Sourozenec}(z,y) \vee \exists w\, (\text{Choť}(w,y) \wedge \text{Souroze-} \\
 & & \text{nec}(z,w))))
\end{array}
$$

Všimněme si, že každou z relací ‚být rodič (někoho)‘ a ‚být dítě (někoho)‘ (jež jsou k sobě inverzní) lze s výhodou použít jako základ výstavby axiomatické teorie příbuzenských vztahů. Každá relace tedy může být definována více způsoby. Například relace ‚být otec (někoho)‘ může být definována buď po způsobu definice relace ‚být matka (někoho)‘, anebo s využitím relace ‚být rodič (někoho)‘:

$$\text{Otec}(x,y) \quad =_{\text{df}} \quad (\text{Rodič}(x,y) \wedge \neg \check{\text{Z}}\text{ena}(x))$$

Dále si uvědomme, že unární vztah (tj. vlastně vlastnost) ‚být matka‘ je definovatelný na základě své binární obdoby:

$$\text{Matka}(x) \quad =_{\text{df}} \quad \exists y\, \text{Matka}(x,y)$$

18.6 Cvičení – definice binárních relací

Definujte následující příbuzenské vztahy:

1) ‚být otec (někoho)'
2) ‚být dcera (někoho)'
3) ‚být sestra (někoho)'
4) ‚být tchyně (někoho)'
5) ‚být vnuk (někoho)'
6) ‚být strýc (někoho)'
7) ‚být snacha (někoho)'
8) ‚být synovec (někoho)'

18.6 Řešení – definice binárních relací

1)	Otec(x,y)	$=_{df}$	(Muž$(x)\wedge$Dítě(y,x))
2)	Dcera(x,y)	$=_{df}$	(Žena$(x)\wedge$Dítě(x,y))
3)	Sestra(x,y)	$=_{df}$	(Žena$(x)\wedge$Sourozenec(x,y))
4)	Tchyně(x,y)	$=_{df}$	$\exists z$ (Choť$(z,y)\wedge$Matka(x,z))
5)	Vnuk(x,y)	$=_{df}$	$\exists z$ (Rodič$(z,x)\wedge$Rodič(y,z))
6)	Strýc(x,y)	$=_{df}$	(Muž$(x)\wedge\exists z$ (Rodič$(z,y)\wedge$Sourozenec(x,z)))
7)	Snacha(x,y)	$=_{df}$	(Žena$(x)\wedge\exists z$ (Choť$(x,z)\wedge$Syn(z,y)))
8)	Synovec(x,y)	$=_{df}$	$\exists z$ (Syn$(x,z)\wedge$(Sourozenec(z,y) $\vee\exists w$ (Choť$(w,y)\wedge$Sourozenec(z,w))))

18.7 Cvičení – vlastnosti binárních relací

Definujte uvedené druhy vlastností relací:

1)
a) reflexivita, b) symetrie, c) tranzitivita

2)
a) antireflexivita, b) antisymetrie, c) antitranzitivita

3)
a) poloreflexivita, b) polosymetrie, c) polotranzitivita

4)
a) ireflexivita, b) asymetrie, c) intranzitivita

5)
a) relace typu ekvivalence, b) částečné uspořádání, c) ostré uspořádání

6)
Jsou následující relace i. reflexivní, ii. symetrické, iii. tranzitivní?
a) $=$, b) $\neq$, c) $\leq$, d) $\subset$, e) $\subseteq$.

7)
Uveďte příklad relace, která je:
a) reflexivní, b) symetrická, c) tranzitivní,
d) poloreflexivní, e) polosymetrická, f) polotranzitivní,
g) antireflexivní, f) antisymetrická, i) antitranzitivní,
j) ireflexivní, k) asymetrická, l) intranzitivní.

18.7 Řešení – vlastnosti binárních relací

Srov. výše v sekci 18.5 tabulky „Vlastnosti binárních relací“ a „Druhy speciálních relací“ a kromě definic viz též příklady.

6) a): i. ano, ii. ano, iii. ano; b): i. ne, ii. ano, iii. ano; c): i. ano, ii. ne, iii. ano; d): i. ne, ii. ne, iii. ano; e): i. ano, ii. ne, iii. ano.

Literatura

Česká a slovenská použitá nebo doporučená literatura

Bendová, Kamila (1998): *Sylogistika*. Praha: Karolinum.

Bokr, Josef, Svatek, Jan (2000): *Základy logiky a argumentace pro zájemce o umělou inteligenci, filozofii, práva a učitelství*. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk.

Cmorej, Pavel (2002): *Úvod do logické syntaxe a sémantiky*. Praha: Triton.

Čechák, Vladimír, Berka, Karel, Zapletal, Ivo (1981): *Co víte o moderní logice*. Praha: Horizont.

Duží, Marie (2012): *Logika pro informatiky (a příbuzné obory)*. Ostrava: Vydavatelství VŠB-TU. Ostrava.

Dvořák, Petr, Novák, Lukáš (2011): *Úvod do logiky aristotelské tradice*. Praha: Krystal OP s.r.o.

Gahér, František (2001): *Logika pre každého*. Bratislava: Iris.

Glivický, Petr (2014): *Logika a teorie množin*. (slidy) http://www.glivicky.cz/web/app.php/download/vyuka-logtemno-2013-logika.pdf

Gregor, Petr (2013): *Výroková a predikátová logika*. (slidy) http://ktiml.mff.cuni.cz/~gregor/logika2013/

Hájek, Petr, Švejdar, Vítězslav (1994): *Matematická logika. Předběžný studijní text*. http://www1.cuni.cz/~svejdar/papers/mate94.pdf

Hromek, Petr (2002): *Logika v příkladech*. Olomouc: Filozofická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci.

Janák, Vladimír (1974, 1976): *Základy formální logiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Jauris, Miroslav (1970): *Logika*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Kučera, Antonín (2009): *Matematická logika. Materiály ke kurzu MA007*. (slidy) http://www.fi.muni.cz/usr/kucera/teaching/logic/logika.pdf

Lukasová, Alena (2003): *Formální logika v umělé inteligenci*. Brno: Computer Press.

Materna, Pavel (1968): *Úvod do logiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Mleziva, Miroslav (1970): *Neklasické logiky*. Praha: Svoboda.

Peliš, Michal (2002): *Logika: učebnice pro přijímací zkoušky na právnické a humanitní fakulty*. Mělník: Amos.

Pezlar, Ivo (2015): *Epistemická logika: úvod se zaměřením na studenty humanitních oborů*. Brno: Masarykova univerzita.
Sochor, Antonín (2001): *Klasická matematická logika*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Nakladatelství Karolinum.
Sochor, Antonín (2011): *Logika pro všechny ochotné myslet*. Praha: Karolinum.
Sousedík, Prokop (1991): *Logika pro studenty humanitních oborů*. Praha: Vyšehrad.
Svatek, Jan, Dostálová, Ludmila (2003): *Logika pro humanistiku*. Dobrá voda: Aleš Čeněk.
Štěpán, Jan (1992): *Logika a logické systémy*. Olomouc: Votobia.
Štěpán, Jan (2001): *Klasická logika*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
Štěpán, Jan (2001): *Logika a právo*. Praha: C. H. Beck.
Štěpánek, Petr (2000): *Meze formální metody*. Praha: Univerzita Karlova.
Štěpánek, Petr (2000): *Predikátová logika*. Praha: Univerzita Karlova.
Štěpánek, Petr (2009): *Výroková a predikátová logika*. (slidy) http://ktiml.mff.cuni.cz/teaching/files/materials/VL1.pdf
Švejdar, Vítězslav (2002): *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Praha: Academia.
Tichý, Pavel (1968): *Logická stavba vědeckého jazyka*. Praha: FF UK.
Trlifajová, Kateřina, Vašata, Daniel (2013): *Matematická logika*. Praha: České vysoké učení technické.
Weinberger, Ota (1993): *Základy právní logiky*. Brno: Masarykova univerzita.
Zastávka, Zdeněk (1998): *Vše, co není zakázáno, se nesmí: O logice formální a neformální*. Praha: Radix, spol. s r. o.
Zouhar, Marián (2008): *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Bratislava: Veda.

Zahraniční použitá nebo doporučená literatura

Allen, Collin, Hand, Michael (2001): *Logic Primer*. (2nd edition). The MIT Press.
Andrews, Peter B. (1986): *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth through Proof*. Academic Press.
Bell, John, Machover, Moshé (1997): *A Course In Mathematical Logic* (4th edition). North Holland.
Ben-Ari, M. (1993): *Mathematical Logic for Computer Science*. Prentice Hall.
Bergmann, Merrie, Moor, James, Nelson, Jack (2014): *The Logic Book*. (6th edition). McGraw-Hill.

Barwise, Jon, Etchemendy, John (1999): *Language, Proof and Logic*. CSLI / Seven Bridges Press.

Bostock, David (1997): *Intermediate Logic*. Oxford University Press.

Curry, Haskell B. (1963/1977): *Foundations of Mathematical Logic*. Dover Publications.

Enderton, Herbert B. (1972): *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press.

Gabbay, Dov M., Guenthner, Franz (2009): *Handbook of Philosophical Logic. Volume 1*. (2nd edition). Springer.

Gensler, Harry J. (2010): *Introduction to Logic*. (2nd edition). Routledge.

Gensler, Harry J., LogiCola. http://www.harryhiker.com/lc/

Goldrei, Derek (2000): *Propositional and Predicate Calculus: A Model of Argument*. Springer.

Jago, Mark (2007): *Formal Logic*. Penrith: Humanities-Ebooks.

Klenk, Virginia (2008): *Understanding Symbolic Logic*. (5th edition). Upper-Saddle River: Pearson Education, Inc.

Leary, Christopher C. (1999): *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. Prentice Hall.

Li, Wei (2010): *Mathematical logic. Foundations for Information Science*. Birkhäuser.

Hausman, Alan, Kahane, Howard, Tidman, Paul (2010): *Logic and Philosophy: A Modern Introduction*. Wadsworth Cengage Learning.

Hodel, Richard E. (2013): *An Introduction to Mathematical Logic*. Dover Books.

Hodges, Wilfrid, Chiswell, Ian (2007): *Mathematical Logic*. Oxford University Press.

Howson, Colin (1997): *Logic with Trees: An Introduction to Symbolic Logic*. Routledge.

Hurley, Patrick J. (2006): *A Concise Introduction to Logic*. (9th edition). Wadsworth Publishing Paperback.

Church, Alonzo (1956): *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press.

Kleene, Stephen C. (1967): *Mathematical Logic*. John Wiley.

Mendelson, Elliot (1964): *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: D. Van Nostrand Company.

Rautenberg, Wolfgang (2010): *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. Springer.

Restall, Greg (2006): *Logic: An Introduction*. Routledge.

Restall, Greg (2013): *Advanced Logic (Kurt Gödel's Greatest Hits)*, http://vimeo.com/album/2262409

Shaw, Laird, Proof Tools: A Symbolic Logic Proof Tree Generator. http://creativeandcritical.net/prooftools/

Shoenfield, Joseph R. (1967): *Mathematical Logic*. Addison-Wesley.
Sider, Theodore (2007): *Logic for Philosophy*. Oxford University Press.
Smith, Peter, Logic Matters, http://www.logicmatters.net/
Smith, Peter (2003): *An Introduction to Formal Logic*. Cambridge University Press.
Smullyan, Raymond M. (1968): *First-order Logic*. Springer-Verlag. / (1979): *Logika prvého rádu*. Bratislava: Alfa.
Stanford Encyclopedia of Philosophy (ed. E. Zalta), http://plato.stanford.edu/ (hesla týkající se logiky).
Tarski, Alfred (1941/1994): *Introduction to Logic: and to the Methodology of Deductive Sciences*. Dover Books / (1966): *Úvod do logiky a metodologie přírodních věd*. Praha: Academia.
Tomassi, Paul (1999): *Logic*. Psychology Press.
Walicki, Michał (2012): *Introduction to Mathematical Logic*. World Scientific.
Wikipedia, https://en.wikipedia.org/ (hesla týkající se logiky).

Rejstřík

A

D

E

F

O

P

R

S

T

U

Rejstřík často užitých symbolů

1	pravdivostní hodnota Pravda
0	pravdivostní hodnota Nepravda
A, B	metaznaky reprezentující libovolné formule PL; pokud jsou uváděny dohromady s proměnnými, např. „$A(x)$“, jde však o znaky reprezentující libovolné predikátové symboly arity 1
$\neg$	negace
$\wedge$	konjunkce
$\vee$	disjunkce
$\rightarrow$	(materiální) implikace
$\leftrightarrow$	ekvivalence
$\uparrow$	Schefferova funkce
$\forall$	obecný kvantifikátor
$\exists$	částečný kvantifikátor
$\therefore$	odděluje premisy a závěr (platného či neplatného) úsudku či úsudkové formy
$/$	odděluje předpoklady a závěr odvozovacího pravidla; ovšem v případech užití „/“ bez mezer, např. „x/y“, indikuje, že x je substituováno za y; konečně v textu psaném běžnou češtinou odděluje „/“ alternativy
$\vdash$	dokazatelnost formule napravo od „$\vdash$“ z množiny formulí nalevo od „$\vdash$“
$\models$	vyplývání, tj. formule napravo od „$\models$“ je sémantický důsledek množiny formulí nalevo od „$\models$“
$\mathfrak{I}$	interpretace, tj. (binární) funkce sémanticky ohodnocující (především) formule
$\mathcal{M}$	struktura, event. model formule nebo množiny formulí či teorie
e	ohodnocení, tj. funkce sémanticky ohodnocující individuové termy (zejm. proměnné)
e'	pozměněné ohodnocení (liší se od e jen v hodnotě pro jednu proměnnou)
$\{\ldots\}$	množina obsahující enumerované prvky
$\langle\ldots\rangle$	uspořádaná n-tice prvků
$\in$	vztah náležení prvku do množiny

$\cap$	vztah průniku dvou množin
$\cup$	vztah sjednocení dvou množin
$\subseteq$	vztah podmnožiny
$=$	vztah rovnosti (dle kontextu: rovnosti množin / pravdivostních hodnot / individuí)
$\emptyset$	znak prázdné množiny
U	znak univerza (domény), tj. univerzální množiny
M^{C}	doplněk množiny M do univerza U
✓	zatržítko indikující, že složená formule byla v sémantickém tablu dekomponována
×	znak indikující uzavření větve sémantického tabla
o	znak indikující ukončení otevřené větve sémantického tabla
$\Rightarrow$	odděluje množiny formulí a formule v sekventech gentzenovské dedukce

Úvod do logiky:
klasická predikátová logika

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

Vydala Masarykova univerzita v roce 2015
1. vydání

Grafický návrh obálky a sazba: GRAFEX-AGENCY s.r.o., Helceletova 16, 602 00 Brno

Tisk: Tiskárna KNOPP, s. r. o., Kubelíkova 1224/42, 130 00 Praha 3

ISBN 978-80-210-7867-3

Kniha *Úvod do logiky: klasická predikátová logika* je druhou částí vícedílného úvodu do logiky, jenž je zaměřen především na humanitní a společenskovědní publikum a další zájemce o logiku. Kromě důležitých poznatků o klasické predikátové logice jako takové je čtenář postupně seznamován jednak s metodami prošetřování sémantických vlastností formulí a metodami formálního dokazování, jednak s aplikacemi tohoto na oblast přirozeného jazyka. V knize najde čtenář rovněž řadu praktických cvičení, v nichž se kromě formálních postupů naučí zejména pohotově budovat ekvivalenty či negace vět a ověřovat platnost úsudků.

Doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D. (nar. 1974 v Brně) dlouhodobě působí na FF MU, kde na Katedře filozofie vyučuje úvod do logiky, filosofickou logiku a témata, v nichž se logika uplatňuje. Publikoval knihy *Jména a deskripce: logicko-sémantická zkoumání* (2009, Nakladatelství Olomouc), *Individua a jejich vlastnosti: studie z intenzionální metafyziky* (2011, Nakladatelství Olomouc), *Pojmy a vědecké teorie* (2014, Masarykova univerzita; spoluautor Petr Kuchyňka), *Úvod do logiky: klasická výroková logika* (2015, Masarykova univerzita).

muni PRESS

ISBN 978-80-210-7867-3

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ