Rozvíjení matematické gramotnosti s využitím inovativního modulu systematického rozvoje akcelerovaných žáků 1. až 3. tříd

Eva Nováková
Růžena Blažková

MASARYKOVA
UNIVERZITA

Rozvíjení matematické gramotnosti s využitím inovativního modulu systematického rozvoje akcelerovaných žáků 1. až 3. tříd

Metodický text pro učitele

Eva Nováková, Růžena Blažková

Masarykova univerzita

Brno 2022

Metodický text je výstupem řešení projektu CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_076/0016366 „Výzkumně ověřený inovativní model identifikace a rozvoje matematicky nadaných žáků základních škol (VOIM)“, odpovědná řešitelka doc. PhDr. Šárka Portešová, Ph.D.

Recenze:
RNDr. Eva Zelendová, Ph.D.

ISBN 978-80-280-0271-8

Obsah

I. Úvod

Modul systematického rozvoje akcelerovaných žáků v matematice tvoří podstatnou složku projektu VOIM (Výzkumně ověřený inovativní model identifikace a rozvoje matematicky nadaných žáků základních škol), řešeného ve spolupráci Fakulty sociálních studií a Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Navazuje na proces identifikace matematicky nadaných žáků založeném na screeningu jejich míry akcelerace a odhadu potenciálu jejich rozvoje. Modul je zaměřen na tvorbu, analýzu a ověření uceleného souboru podnětných materiálů, které by prostřednictvím konkrétní a podrobně rozpracované metodiky žáky systematicky vedly k podpoře jejich matematického nadání v běžné škole, tedy v heterogenní skupině žáků.

Autorský tým ve složení Eva Nováková a Růžena Blažková (tvorba pracovních listů, námětů pro scénáře k videím), Matěj Smetana (tvorba scénáře k videím, tvorba videí), Petra Bušková (grafická úprava pracovních listů, revize pracovních listů), Jindřiška Svobodová (revize pracovních listů) vytvořil na základě dlouhodobých zkušeností zadání úloh z vybraných tematických okruhů. Tým vycházel ze skutečnosti potvrzované pedagogickou praxí, že úloha může být pro nadaného žáka velmi atraktivní a přitažlivá, pokud je propojena s jeho reálným životem, a pokud nějak souvisí s tématem, o které se intenzivně zajímá. Nadaný žák často žádá úlohy vyšší kognitivní náročnosti, ale také úlohy s hravým, dětským kontextem, úlohy, jež mají pozadí například pohádkové, z oblasti sci-fi, ty totiž umožňují uplatnit kreativitu a humor. Uvedené skutečnosti byly při tvorbě a úpravách úloh zohledněny.

K rozvoji matematické gramotnosti[1] akcelerovaných žáků byl v rámci řešení projektu zpracován soubor materiálů, jehož součástí je

a) 60 pracovních listů ve třech úrovních obtížnosti k 20 tématům,
b) soubor výukových videí k vybraným tématům,
c) metodický text pro učitele obsahující komentáře k pracovním listům a videím, doporučené pomůcky a reflexi zkušeností, které získaly v průběhu ověřování učitelky ve třídách na participujících školách.

Rozvojový materiál je určen především matematicky nadaným žákům prvních ročníků, kteří rádi přemýšlejí, bádají, objevují nové poznatky (nejen) z oblasti matematiky. Videa i pracovní listy však mohou být vhodně využity i ve vyšších ročnících základní školy. Pracovní listy obsahují sady úloh navazujících na video k příslušnému tématu. Úlohy vyšší

[1] Matematická gramotnost (MG) je schopnost uplatnit získané vědomosti, dovednosti, návyky, postoje a hodnoty při řešení nejrůznějších úkolů a životních situací s čistě matematickým obsahem až k takovým, ve kterých není matematický obsah zpočátku zřejmý, a je na řešiteli, aby ho v nich rozpoznal. Úroveň matematické gramotnosti se projeví, když jsou matematické znalosti a dovednosti používány k vymezení, formulování a řešení problémů z různých oblastí a kontextů a k interpretaci jejich řešení s využitím matematiky (Bendl, V. et al. (2020): *Matematická gramotnost v uzlových bodech vzdělávání*. Praha: NPI).

kognitivní náročnosti tematicky přesahují základní učivo dané RVP ZV. Obvykle vyžadují od akcelerovaných žáků kromě osvojených matematických znalostí také vyšší úroveň logického a kritického myšlení.

Pracovní listy si bude možné stáhnout z webového rozhraní, vytisknout je a zpracovávat přímo v lavici. S úlohami je možné pracovat v sadě prezentované pracovním listem nebo je zařazovat jednotlivě jako samostatnou práci. Úlohy vyžadují jistou úroveň čtenářské gramotnosti. V případě potřeby je možná a vítaná dopomoc ze strany učitele tak, aby výkon žáka nebyl negativně ovlivněn problémy souvisejícími s organizací výuky ve třídě nebo s neporozuměním úlohám. Učitelé budou díky analýze výkonu žáků v pracovních listech moci pravidelně a průběžně sledovat a vyhodnocovat jejich pokrok i proces učení.

Pracovní listy jsou koncipovány tak, aby umožňovaly individuální práci. Žákům vybraným na základě výsledků testu a v souladu s nominací učitele je umožněno diferencovaně řešit náročnější úlohy obvykle přesahující vzdělávací obsah příslušného ročníku 1. stupně ZŠ. Diferenciace je v pracovních listech nastavena ve dvou úrovních:

a) úlohy v PL jsou zařazeny do tří úrovní obtížnosti, kterým odpovídají varianty V1–V3,
b) obtížnost úloh v jednotlivých pracovních listech graduje od nejméně obtížné po nejnáročnější, obvykle z rozšiřujícího učiva,
c) u některých témat se obtížnější úlohy prolínají s jednoduššími, standardními či úlohami jiného charakteru, aby nebyla sada úloh pro žáky příliš náročná nebo jednotvárná.

Úlohy v pracovních listech vycházejí z aktuálních kurikulárních dokumentů (RVP ZV, 2021), ale očekávané výstupy na některých místech rozšiřují a přesahují. V souladu s cílovým zaměřením vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace jsou žáci vedeni k rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů, k rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů.

Každý pracovní list je doplněn sebeevaluačními prvky dvojího druhu. U každé úlohy je trojice obdélníků různé výšky, takzvané schody náročnosti úloh. U první úlohy jsou označeny celými slovy (lehká, střední, těžká, u následujících úloh pouze počátečním písmenem L, S, T). Vybarvením příslušného obdélníku žáci hodnotí, jak byla úloha náročná. Skrze zadanou úlohu tak dochází k posouzení vlastního výkonu. Na konci každého pracovního listu pak žáci vybarvují jednoho ze tří smajlíků ☹😐☺, čímž vyjadřují, jak se jim celý pracovní list líbil.

K jednotlivým tématům byla zpracována videa. Délka jednotlivých videí je přibližně 10 minut. Zpracování je provedeno profesionálním výtvarníkem ve spolupráci se členkami autorského kolektivu, které garantovaly věcnou správnost a metodickou přiměřenost obsahu videí. Videa jsou koncipována tak, aby osvojování nového učiva a rozšiřování dosavadních poznatků žáky bylo založeno na konstruktivistických principech, bylo motivační a umožňovalo uplatnění interaktivních prvků. Ve všech tématech jsou uplatněny dva jednotící prvky:

a) každou videolekci provází postavičky dvou hvězdiček Fí a Tau,
b) v každém tématu jsou zařazeny elementy z historie matematiky (obvykle prezentované významnými matematiky minulosti), které dětem přístupnou a motivačně vhodnou formou zasazují poznatky do „světa matematiky“.

II. Přehled témat a jejich metodické rozpracování

1 Sčítání a odčítání

Čtyři početní výkony (početní operace) – sčítání, odčítání, násobení a dělení („beze zbytku“, tj. dělení v oboru násobilky) jsou tradičním a základním učivem 1. stupně základní školy.

Sčítání je v oboru přirozených čísel *neomezeně proveditelné*: součtem libovolných přirozených čísel označovaných jako sčítanci je opět číslo přirozené. *Odčítání* v oboru přirozených čísel neomezeně proveditelné není: v oboru přirozených čísel není možné odečíst od menšího čísla číslo větší.

Představa početní operace se zprvu opírá o manipulativní činnosti a o různé interpretace početních operací: sčítání jako sjednocení a přidávání, odčítání jako ubírání.

Číselný obor (*obor numerace*), ve kterém se sčítání a odčítání provádí, se postupně rozšiřuje: do 20 (obvykle v 1. ročníku), do100 (obvykle ve 2. ročníku), později do 1 000 a v celém oboru přirozených čísel. Sčítání je *komutativní* (sčítance lze zaměnit: $a + b = b + a$) a *asociativní* (sčítance lze sdružovat: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Kromě těchto vlastností operace sčítání poznávají žáci 1. stupně ZŠ číslo 0 (nula) jako *neutrální* (*nulový*) prvek sčítání ($a + 0 = 0 + a = a$). Žáci při výpočtech poznávají a využívají vzájemné souvislosti obou opačných operací, sčítání a odčítání jsou operace navzájem inverzní.
V rozvojovém materiálu je ve shodě s cíli RVP ZV kladen důraz na *významové porozumění* operacím (umět operaci propojit s reálnou situací).

<u>Očekávané výstupy RVP ZV (2021)</u> pro 1. stupeň ZŠ jsou k danému tématu formulovány takto: žák

- provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly (sčítá, odčítá, násobí a dělí),
- čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- uplatňuje počtářské dovednosti i v rozšířeném oboru numerace (do 100, do 1 000) při numerických výpočtů zpaměti a písemně,
- provádí kontrolu správnosti výpočtu (opakováním výpočtu, záměnou sčítanců, inverzním/obráceným početním výkonem),
- poznává a využívá vzájemné souvislosti operací sčítání a odčítání a vlastnosti početních operací (komutativnost, asociativnost),
- využívá početních výhod, což umožňuje efektivně využívat osvojený matematický aparát, směřovat ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci.

Téma navazuje na učivo 1. třídy a dále je rozšiřuje. Již v diagnostickém testu žáci prokázali, že zvládají sčítání a odčítání v oboru do 20, a to i s přechodem přes základ 10. Velmi často se jedná o vytvoření vlastních žákovských strategií, které jim umožňují úspěšně vyřešit úlohy tohoto typu. Pro procvičení početních operací slouží pracovní listy. Video se nevěnuje pouhému objasnění postupu výpočtu jednotlivých typů příkladů na sčítání a odčítání v oboru přirozených čísel do 100. Zabývá se také tématem počítání s výhodou, které ilustruje využití komutativnosti a asociativnosti operace sčítání. Žáci tak využívají „klasického“ sčítání a odčítání v nových situacích. Se záměnou a sdružováním sčítanců se nejprve setkávají v řešené úloze na sčítání tří sčítanců v oboru do 30 (*2 + 15 + 8 =*). Zkušenosti ukazují, že pro žáky není snadné zvládnout přechod od počítání v číselném oboru do 20 k analogickým příkladům v číselném oboru do 100. Nejobtížnější se pak ukazují typy příkladů s přechodem přes základ 10. Proto byla zařazena druhá úloha, která je zaměřena na různé postupy sčítání dvou přirozených čísel v oboru do 100 s přechodem přes základ 10 (*38 + 26 =*). Žáci tak mohou uplatnit vlastní přístup k řešení, ale zároveň se mohou identifikovat s některým z nabízených přístupů. Zároveň jim tato situace nabízí možnost uvažování o různých postupech řešení, jejich správnosti, výhodnosti použití i vlastní preference. V následující úloze již žáci opět samostatně řeší zadání (*47 + 1 + 16 + 3 + 14 =*). Poté jim Fí a Tau představují různé přístupy k řešení, které jsou založeny na využití výhodnosti sdružování a záměny sčítanců. Závěr je doplněn o známou historickou úlohu. Traduje se, že nadaný matematik C. F. Gauss jako žák dostal za úkol sečíst čísla od 1 do 100. Stejný úkol dostávají ve videu i naši žáci. Po samotném výpočtu se dozvídají, jakým způsobem údajně situaci řešil slavný matematik. Jde opět o aplikaci počítání s výhodou, ale v tomto případě jde zároveň o součet členů aritmetické posloupnosti. Tuto skutečnost asi žáci reflektovat nebudou, ale může jim posloužit jako prekoncept při pozdějším bádání.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. Kromě tématu sčítání a odčítání se zde setkávání s elementárním šifrováním, kde výsledek je zašifrován v písmenech české abecedy. Při výpočtu žáci mohou pracovat jak s odhadem výsledků, tak s lingvistickou stránkou. Mnohdy při řešení příkladů odhadují názvy a poté kontrolují volbu písmene vypočítáním příslušného příkladu. Řešením úloh jsou názvy měst (V1), řek (V2) a pohoří (V3). Žáci tak nepracují pouze v kontextu matematickém, ale využívají zde interdisciplinárních vztahů. Celkově tato tematika přesahuje učivo 1. třídy, mnohdy však čerpá ze širokého zájmu žáků, jejich cestovatelských zkušeností. Může zároveň posloužit i jako podnět pro jejich další rozvoj. Pro větší komplexnost uchopení úloh byla zvolena i práce s mapou. To může být pro některé žáky zcela nové. Nejde zde ovšem o práci se slepou mapou, ale o inspiraci pro vyhledání objektů v reálné mapě či spíše inspiraci pro práci s mapou obecně. V pracovních listech je dále využito vlastivědných znalostí pro řešení úloh typu „zebra“,[2] kdy z daných informací žáci vyvozují jednotlivé odpovědi. Přiřazují například

[2]Označují se tak zajímavé logické kombinatorické úlohy různé obtížnosti, které vyžadují správně k sobě přiřadit prvky na základě několika (zdánlivě nepostačujících) informací.

obrázky k názvům měst, názvy řek přiřazují tokům ve slepé mapě, přiřazují pohoří a jejich nejvyšší vrcholy. Varianty V1 a V2 pracovních listů jsou zakončeny úlohou, která vede žáky k vlastnímu zašifrování slov.

V prvním pracovním listu (V1) žáci pracují v číselném oboru do 20, sčítají a odčítají s přechodem přes základ 10. V druhém pracovním listu (V2) pracují v číselném oboru do 100 a v třetím pracovním listu (V3) do 1000.

Pomůcky

Jako podpora pro výpočty či jejich kontrolu se jeví jako vhodné využití klasických pomůcek manipulativního charakteru (reálné předměty, počitadlo, Montessori banka atd.). Při práci s vlastivědným obsahem úloh je vhodné poskytnout žákům mapu České republiky, encyklopedie, internet pro vyhledání potřebných informací.

Zkušenosti z ověřování

Při absolvování didaktického testu žáci prokázali různou míru zvládnutí sčítání a odčítání v různých číselných oborech (do 20, 100, 1000) s přechodem přes základ 10. V pracovních listech se ukázalo, že v mnoha případech není toto učivo ukotvené. Z tohoto faktu plyne nutnost průběžného opakování a procvičování učiva. Důležité je dbát na dobré porozumění postupům a schopnost využití v aplikačních úlohách. Velmi často se vyskytovaly tyto chyby typické pro daný číselný obor:

Varianta V1, počítání do 20

14 – 6 = 9, 15 – 8 = 8, 9 + 8 = 14, někdy šlo o záměnu operace (8 + 12 = 4)

Varianta V2, počítání do 100

39 + 9 = 49, 24 + 26 = 53, 27 + 22 = 48, 72 – 54 = 14, 81 – 68 = 14, 41 – 28 = 14, 65 – 51 = 50, někdy šlo o záměnu operace (34 – 14 = 48)

Varianta V3, počítání do 1 000

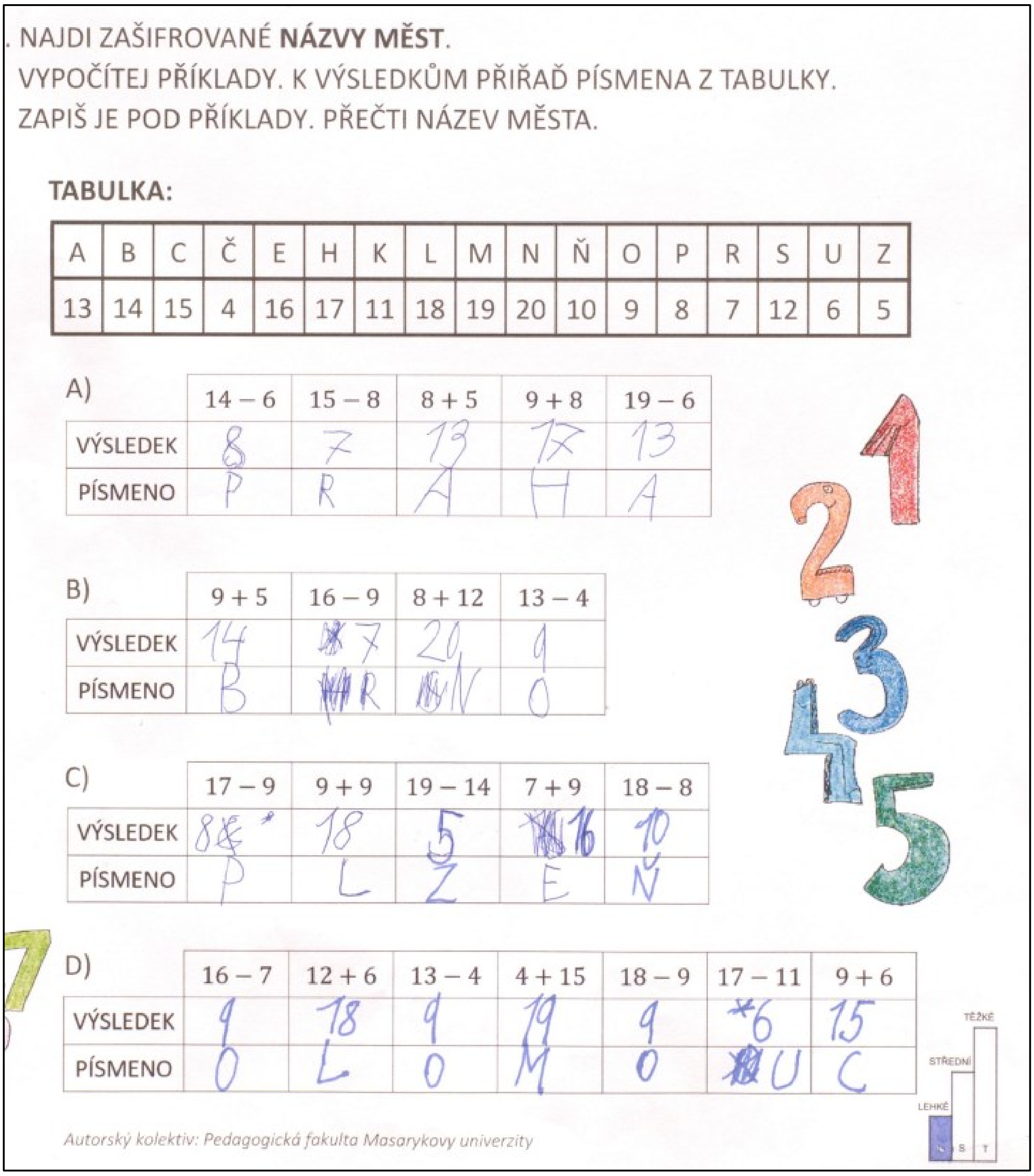
200 – 60 = 240, 260 + 280 = 440, někdy šlo o záměnu operace (500 – 10 = 510).

Řešení úloh typu zebra bylo velmi závislé na čtenářské vyspělosti žáků a efektivnosti způsobu záznamu řešení úlohy. Významná zde byla zkušenost s různými řešitelskými strategiemi, záznamy řešení úloh.

S některými pojmy, které byly zařazeny v pracovních listech, se žáci dosud nesetkali. Čerpali zde převážně z vlastních zkušeností. Reakce žáků byly velmi individuální. Někteří se například ptali, co je to Labe, pramen, orloj, hora, hranice, Hradčany. Pro některé žáky byly pojmy jasné, projevovali radost a nadšení z návratu k vlastním zážitkům, z uplatnění znalostí z oborů jejich zájmu („Nejvíc se mi líbil ten zeměpis.“). Při tvoření úloh na konci listu bylo pro některé žáky složité vrátit se k šifrovací tabulce na začátku pracovního listu. Bylo by proto možné tuto úlohu zařadit hned po první úloze.

<u>Ukázka žákovských řešení úloh</u>

P1 V1, úloha 1


. NAJDI ZAŠIFROVANÉ **NÁZVY MĚST**.
VYPOČÍTEJ PŘÍKLADY. K VÝSLEDKŮM PŘIŘAĎ PÍSMENA Z TABULKY.
ZAPIŠ JE POD PŘÍKLADY. PŘEČTI NÁZEV MĚSTA.

TABULKA:

A	B	C	Č	E	H	K	L	M	N	Ň	O	P	R	S	U	Z
13	14	15	4	16	17	11	18	19	20	10	9	8	7	12	6	5

A)

	14 − 6	15 − 8	8 + 5	9 + 8	19 − 6
VÝSLEDEK	8	7	13	17	13
PÍSMENO	P	R	A	H	A

B)

	9 + 5	16 − 9	8 + 12	13 − 4
VÝSLEDEK	14	7	20	9
PÍSMENO	B	R	N	O

C)

	17 − 9	9 + 9	19 − 14	7 + 9	18 − 8
VÝSLEDEK	8	18	5	16	10
PÍSMENO	P	L	Z	E	Ň

D)

	16 − 7	12 + 6	13 − 4	4 + 15	18 − 9	17 − 11	9 + 6
VÝSLEDEK	9	18	9	19	9	6	15
PÍSMENO	O	L	O	M	O	U	C

Autorský kolektiv: Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity

Žáci zvládali sčítání a odčítání s různou měrou chybovosti. Kontrolou jim často byl název města, řeky či pohoří, který jim vyšel v tajence. Dodatečně tak kontrolovali správnost svých výpočtů.

2 Odčítání a záporná čísla

Odčítání v oboru přirozených čísel *neomezeně proveditelné není*. To znamená, že odečteme-li od čísla *a* (menšence) číslo *b* (menšitele), přičemž platí *a* < *b*, dostaneme záporné číslo (rozdíl), kterým je číslo menší než 0. Při znázorňování na číselné ose jsou obrazy záporných čísel vyznačeny vlevo od 0.

Východiskem pro intuitivní pochopení záporného čísla jsou žákům známé situace z životní praxe: teploměr (teploty „pod nulou“), vodní hladina („pod normál“), dluh.

Očekávaný výstup RVP ZV pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- porozumí významu znaku „−“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose.

Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů: žák

- upevňuje dovednost odčítání přirozených čísel v oboru do 100 v obtížnějších případech s přechodem přes základ,
- prohlubuje intuitivní představu o záporných číslech na základě reálných situací známých z životní praxe,
- využívá ke znázornění a porovnávání kladných a záporných celých čísel číselné osy.

Téma odčítání a záporná čísla je motivováno horským prostředím Šumavy. Nejde zde o objasňování postupu odčítání. Tuto znalost žáci již projevili v absolvování diagnostického testu. Případná potřeba procvičování by měla být řešena mimo tento podpůrný materiál. Z oblasti odčítání dvojciferných čísel se ukazují jako nejobtížnější typy příkladů odčítání s přechodem přes základ 10. Proto byla zařazena úloha, která je zaměřena na různé postupy odčítání dvou přirozených čísel v oboru do 100 s přechodem přes základ 10 (*42 – 17 =*). Žáci mohou uplatnit vlastní strategii řešení, ale zároveň mohou přijmout některé z nabízených přístupů. Zároveň tato situace nabízí možnost uvažování o různých strategiích řešení, jejich správnosti, výhodnosti použití i vlastní preference. Druhá část videa je věnována zavádění záporných čísel. K tomu bylo využito prostředí vysokohorské Jezerní slati na Šumavě, kde i v létě klesají teploty pod bod mrazu. Vycházíme z koncepce, kdy od menšího čísla odčítáme větší číslo. Žákům je zadán úkol (*1 °C – 3 °C*). Nejprve je jim ponechán prostor pro vlastní řešení, poté je úloha modelována na teploměru. Následuje navození reálné situace, kdy žáci řeší úkol (*2 °C – 10 °C*). Opět následuje modelové řešení s využitím teploměru. Zde je ale zdůrazněn přechod přes nulu. V tomto postupu si žáci rozkládají menšitele na číslo, které je rovno menšenci a na další číslo. Využití nuly jako mezníku pro práci s kladnými a zápornými čísly je pro žáky srozumitelnější. Na závěr jsou žákům přiblíženy situace, ve kterých se také setkávají s dalšími koncepty záporných čísel v reálných kontextech (dluhy, období před naším letopočtem aj.).

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. Při řešení úloh nejde o nácvik aritmetických operací se zápornými čísly, ale prohloubení intuitivních představ žáků o záporných číslech, seznámení se zápisem záporných čísel. Žáci se setkávají s různou interpretací záporných čísel. Nejprve doplňují údaj o teplotě do kontextu reálných situací. Jde o rozlišení tří základních situací (teploty nad nulou, nula, pod nulou). Žáci pracují s nabídkou odpovědí, mohou použít vylučovací metodu řešení. V druhé úloze vyznačují zadanou teplotu na teploměru. Vzhledem k přesahu tématu ve vztahu k učivu prvouky v 1. ročníku je zde vyznačen první ukázkový příklad vyznačení teploty. V třetí úloze je využito kombinace reálné situace s vyznačením příslušné teploty na teploměru. U varianty V2 a V3 se jedná o záporné hodnoty. Ve čtvrté úloze jde o vyznačení obrazu celých čísel na číselné ose. Obtížnost úloh v jednotlivých variantách pracovních listů je dána volbou čísel, která jsou na číselné ose vyznačena. V páté úloze žáci doplňují čísla podle zadání s využitím porovnávání v oboru celých čísel. Poslední úloha je věnována představě dětí o teplotách v běžných situacích. Konkrétně pak doplněním činností, které by mohly při dané teplotě vykonávat.

Pomůcky

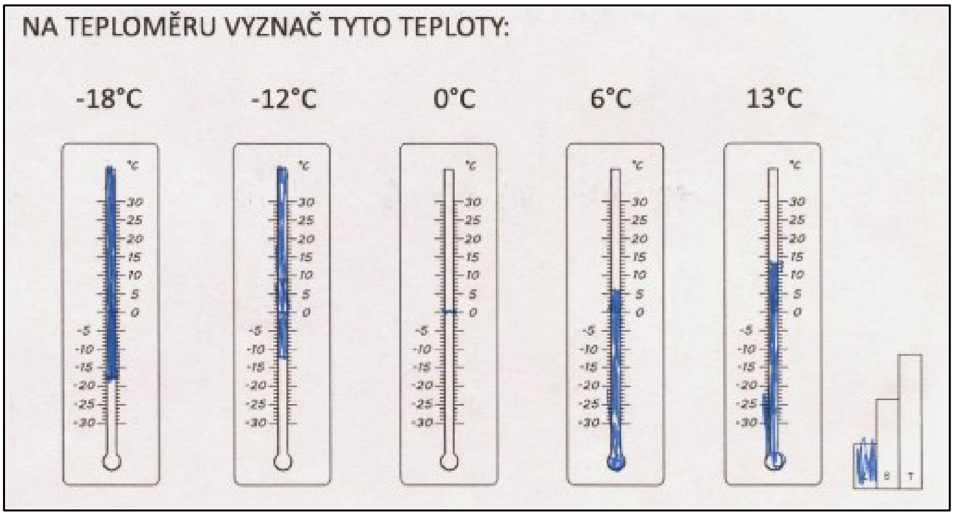
Teploměr, číselná osa.

Zkušenosti z ověřování

Z ověřování jednoznačně vyplynula skutečnost, že všichni žáci mají nějakou zkušenost se zápornými čísly, i když se s označením „záporné číslo“ dosud nesetkali. Zároveň se ukázalo, že jejich chápání záporných čísel je zcela intuitivní. Často se ukazuje, že nerozumí dobře konceptu záporného čísla, nedovedou ho zapsat, vyznačit na číselné ose, je pro ně obtížné pracovat se zápornými čísly v reálném kontextu. Velmi často se vyskytovaly obtíže typické pro rozšíření oboru přirozených čísel na čísla celá.
Se zápornými čísly zacházejí jako s čísly přirozenými. („Líbí se mi číslo –7, protože je mi 7 roků; líbí se mi číslo –100, mám rád 100“). V první úloze volili čísla vylučovací metodou. V některých případech však zvolili „nevhodná“ čísla. Tato chyba často pramenila z neporozumění některým pojmům (tání, mrzne, minimální, maximální, teplota pod nulou) i z nízké čtenářské gramotnosti. Při znázorňování čísel na teploměru vybarvovali někteří žáci stupnici teploměru shora. Při znázorňování čísel na číselné ose správně napsali absolutní hodnotu, ale již neuvedli znaménko minus. Nerozumí uspořádání celých čísel. Neustále byli ovlivňováni uspořádáním čísel přirozených. Neví, že –9 je větší než –10. Čísla větší než –10, zapíší např. –20, –11, –12. Když počítali příklad na odčítání v oboru přirozených čísel 22 – 7, zapsali rozdíl –5, –15. Zde je patrný velký vliv kontextu celých čísel, v kterém v daném pracovním listě počítali. Odráží se zde žákovské očekávání výsledků. Vhodné je využití reálných situací, se kterými se žáci setkávají v běžném životě. V zimě mrzne, záporná čísla při hrách, dluhy, období před naším letopočtem aj. Tematika má významný interdisciplinární přesah.

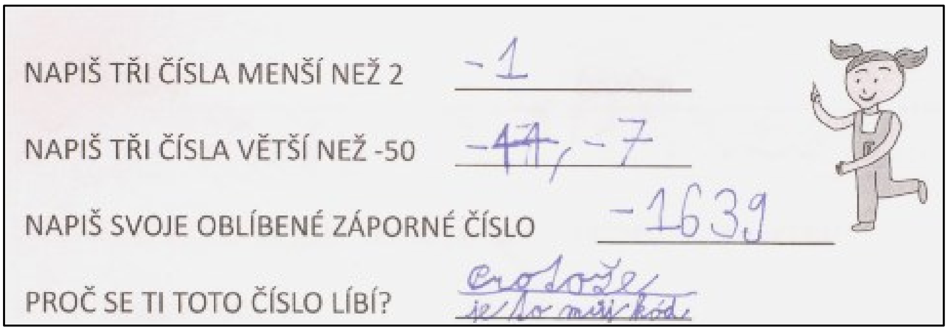
Ukázka žákovských řešení úloh

P2 V3, úloha 2

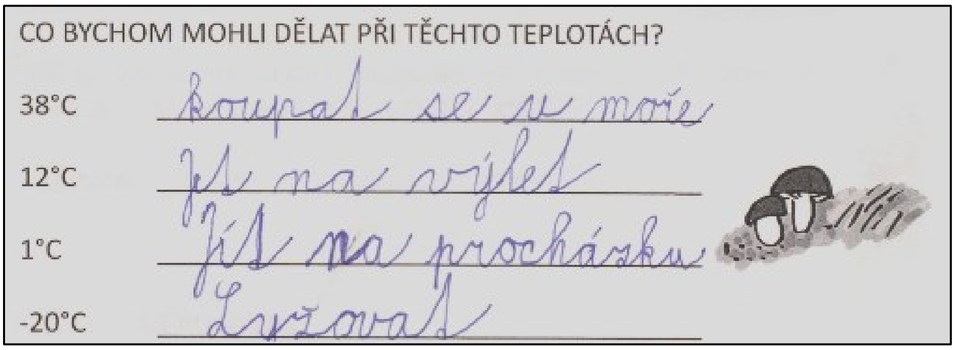


Pokud žáci nemají jasnou představu o fungování teploměru, vyznačují často danou hodnotu různým způsobem. Na všech teploměrech je správně nalezena naměřená hodnota, ale vyznačení je správné pouze v posledních dvou případech. Zde žák pracuje na nejtěžší variantě pracovního listu (V3), kde nebyl uveden vzor. Ve variantě V1 a V2 je na prvním teploměru hodnota vyznačena. Žáci tak mohou pracovat podle vzoru.

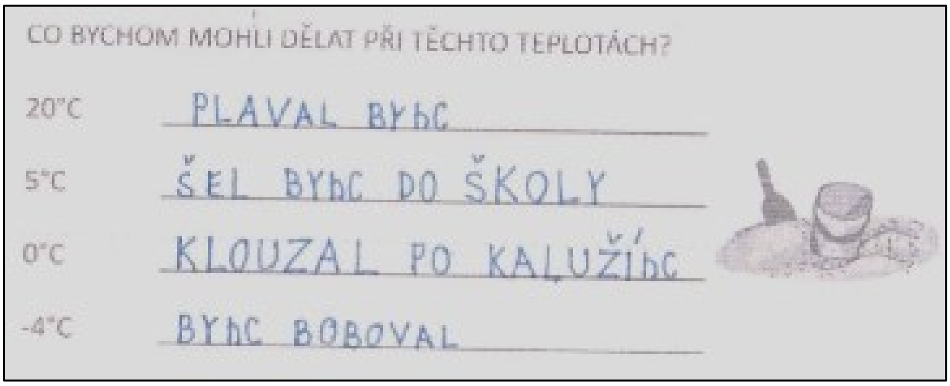
P2 V3, úloha 5



P2 V3, úloha 6



P2 V1, úloha 6


CO BYCHOM MOHLI DĚLAT PŘI TĚCHTO TEPLOTÁCH?

20°C PLAVAL BYCH

5°C ŠEL BYCH DO ŠKOLY

0°C KLOUZAL PO KALUŽÍCH

-4°C BYCH BOBOVAL

V řešení úloh se projevovala různá míra porozumění zápornému číslu i zvýšené nároky na psaný projev žáků.

3 Geometrické útvary

Na základní školu žák přichází s geometrickými představami (prekoncepty), které většinou získal právě v konkrétním reálném světě a v preprimárním vzdělávání. Během vzdělávání na základní škole by si je měl zpřesnit, upevnit a získat další základní geometrické znalosti, dovednosti a návyky. Téma rozvíjí žákovské znalosti 2D geometrie a seznamuje s dalšími čtyřúhelníky. Rozlišuje se *rovinný útvar* (2D – útvar dimenze 2) a *prostorový útvar* (3D – útvar dimenze 3), což je doprovázeno příslušnou geometrickou terminologií a symbolikou. V úlohách se uplatňují manipulativní činnosti – stavby z kostek, dokončování prostorových a rovinných vzorů, rozpoznání těles podle jejich 2D reprezentací, propedeutika shodností a souměrností.

Očekávané výstupy RVP ZV pro 1. stupeň ZŠ jsou k danému tématu (stejně jako k dalším tématům věnovaným geometrii v rovině a v prostoru) formulovány takto: žák

- rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa, nachází v realitě jejich reprezentaci,
- rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině,
- určí osu souměrnosti překládáním papíru.

Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů: žák

- upevňuje představy o základních geometrických tvarech (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh) a rozšiřuje je o další 2D geometrické útvary (kosočtverec, kosodélník, lichoběžník, deltoid),
- aplikuje znalosti o jednotlivých rovinných útvarech a prohlubuje je při řešení úloh,
- objevuje vztah mezi 2D a 3D útvary, navzájem je rozlišuje.

Ve videu se pro téma o geometrických útvarech vychází z žákům známého 3D prostředí, ve kterém se pohybují od narození. Při vytváření přestav v geometrii je pro žáky obtížné orientovat se v prostoru i v rovině a jejich prostupnosti, vzájemné souvislosti. Například zobrazení těles v rovině prostřednictvím některého zobrazení (např. volného rovnoběžného promítání) je pro žáky obtížné. Ve videu se žáci přesunou do vesmíru. Setkávají se s tělesy, na kterých je modelován vztah roviny a prostoru. Konkrétně pak jsou představovány rovinné útvary, které tvoří stěny vybraných těles. Žáci se tak seznámí s otiskem stěny krychle, kterým je čtverec. Dále zjišťují počet stěn čtyřstěnu. Jeho stěny jsou čtyři rovnostranné trojúhelníky. Pozorují stěny kvádru, kterými jsou obdélníky. U pravidelného čtyřbokého jehlanu si všímají základny, kterou je čtverec a pobočných stěn, kterými jsou rovnoramenné trojúhelníky.

V druhé části videa Fí a Tau kreslí některé rovinné útvary pomocí hvězd, ve kterých se vyskytují vrcholy modelovaných rovinných útvarů. V tuto chvíli je pracováno s hvězdným pozadím jako s rovinou. Fí a Tau nejprve nakreslí obrys čtverce a připomenou, že má čtyři vrcholy a čtyři stejně dlouhé strany. Tento popis mnohdy žáci považují za dostačující pro jednoznačné vymezení čtverce. To však nestačí. Proto následuje scéna, kdy Tau kreslí rovinný útvar, který má čtyři vrcholy a čtyři stejně dlouhé strany, ale není to čtverec. Tau ale útvar za čtverec považuje. Fí připomene, že nemá shodné všechny vnitřní úhly. Nazve útvar kosočtvercem. Ten má shodné protější úhly, ale nemá shodné sousední úhly. Trojúhelník je zde demonstrován jako obrázek střechy domečku. Tau nakreslí domeček, kdy pro jeho kresbu použije obdélník a lichoběžník. Zatím není explicitně vyjádřeno, že pro čtverec a obdélník platí, že sousední strany jsou navzájem kolmé a protější strany jsou rovnoběžné. V části motivované rozbitou raketou žáci pracují s překrýváním rovinných útvarů. V této situaci tvoří stěny jednotlivých dílů rakety. Následující úkol zaměřený na vyhledání obdélníků je ukázkou vyhledání správné odpovědi z nabízených řešení. Díly rakety jsou posléze pojmenovány (krychle, komolý jehlan, kvádr, čtyřboký jehlan). Další část videa uvádí obraz Františka Kupky, který žáky přivede do světa výtvarného umění první poloviny 20. století, do takzvané geometrické abstrakce. Cílem úlohy, kdy jsou žáci dotázáni, zda lze spočítat obdélníky na obraze, není v tuto chvíli určit počet všech obdélníků, ale rozvinout úvahu nad situací, kdy za obdélník považujeme pouze obdélník, který vidíme celý, nebo lze za obdélník považovat i útvar, kterého vidíme jenom část, ale dokážeme si představit jeho doplnění na obdélník. Žáci tak mohou počítat pouze „celé“ obdélníky nebo počítat obdélníky, které se překrývají. Závěrečná část videa poukazuje na různé reprezentace těles z reálného života. Dostáváme se do geograficky vzdálenějších oblastí, ale daná stavba je vždy demonstrována na fotografii. V ní je zachycen pouze jeden způsob zobrazení, který nemusí být žákům srozumitelný. Zároveň je nutné si uvědomit, že se nejedná o abstraktní geometrická tělesa, ale o reálné objekty, které nám je připomínají.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují řešením úloh v pracovních listech. Pracovní listy začínají úlohami, ve kterých žáci přiřazují k obrázku daného geometrického útvaru jeho název. V druhé a třetí variantě obtížnosti se žáci setkávají s pětiúhelníkem a šestiúhelníkem. Tyto pojmy ale nemusí aktivně znát. Při uplatnění dosavadních znalostí a znalostí z videa mohou tyto útvary určit vylučovací metodou. V druhých úlohách žáci vybarvují zadané geometrické útvary. V mnohých případech tak vidí pouze část útvaru a musí si představit, jak může být tento útvar dokončen. Při vybarvování útvarů by zároveň měli respektovat pořadí položených útvarů. V následujících úlohách žáci určují počet útvarů, které vidí na obrázku. Situace se stává obtížnější, když útvary mohou vzniknout spojením jiných útvarů, což může být vnímáno také tak, že se útvary překrývají. V dalších úlohách je využito prostředí videa, kdy jsou vrcholy geometrických útvarů znázorněny ve hvězdách. Jde ale o obtížnější situaci, kdy mají žáci dány skupiny hvězd a dokreslují zadané geometrické útvary s využitím všech zakreslených hvězd. Uplatňují vlastnosti geometrických útvarů, aniž by je formulovali slovně. Žáci si zde musí představit konkrétní útvar a provést s ním mentální manipulaci, kdy mění polohu útvarů v návaznosti na dané podmínky. Výsledný útvar žáci mohou narýsovat. Žádoucí je také řešení, kdy žáci útvar načrtnou. V závěrečné části pracovních listů vyhledávají žáci reprezentace rovinných geometrických útvarů v realitě.

Pomůcky

V pracovním listu V3 je nutné pracovat s barevným zadáním poslední úlohy. Je možné, že v odstínech šedé by jednotlivé části nebyly rozlišitelné. Obecně lze ale říci, že barevný tisk u žáků zvyšoval motivaci k práci a činil práci přehlednější. Při veškeré vyučovací činnosti by bylo vhodné, aby žáci měli dostatečný počet různých modelů rovinných geometrických útvarů, kterým je věnována ve videu a pracovních listech pozornost.

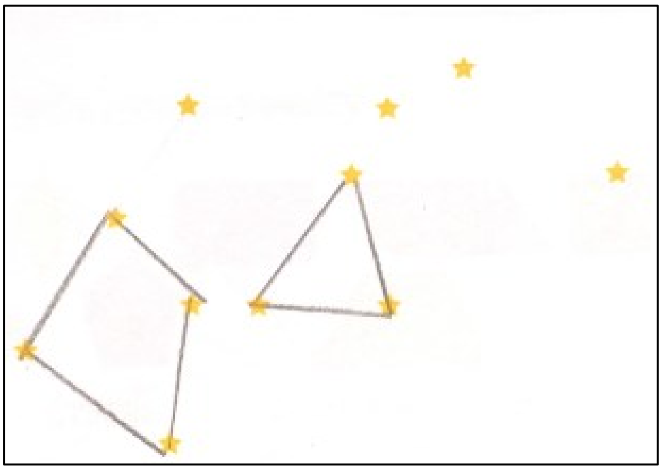
Zkušenosti z ověřování

V tomto tématu se ukázalo vhodné vytištění pracovních listů barevně. Žáci v 1. třídě nemají zcela ukotvené pojmosloví ani představy o geometrických útvarech. Ve videu byly žákům představeny geometrické útvary jako kosočtverec, lichoběžník, ale nemůžeme předpokládat, že tímto by mohla být dostatečně vytvořena představa daných útvarů. To se ukázalo při vypracování pracovních listů. Žáci se sami k videu zpravidla nevraceli a obraceli se s žádostí o pomoc na paní učitelku. Problémy jim činilo přiřazení názvů geometrických tvarů, kdy zaměňovali čtverec za kosočtverec, kosodélník za lichoběžník, kosodélník za kosočtverec, elipsu za kruh. Obtížné pro žáky bylo pracovat s geometrickými útvary v různých polohách. Někteří žáci se ptali, zda mohou být útvary pootočeny.
V druhých úlohách v pracovních listech žáci vybarvovali geometrické útvary podle zadání. Pokud nejsou žáci na tento typ úlohy a způsob uvažování (viz text výše) zvyklí, často dokreslují libovolně tvary. Případně společné části vybarvují oběma barvami. Někteří chlapci neradi vybarvovali, proto by bylo dobré domluvit si s takovými žáky jiné kódování odpovědi.
Při určování počtu geometrických tvarů v obrázku domečků se zahrádkami se jevilo jako nejobtížnější vyhledání všech obdélníků. Zde by bylo dobré hledat vhodný způsob záznamu. Pokud se žáci s tímto typem úlohy nesetkali, je třeba zvolit pro začátek jednodušší varianty zadání.
Nejobtížnější se jevily úlohy, kdy žáci dotvářeli geometrické útvary při zadání vrcholů geometrických útvarů v obrázcích hvězd. Podstatné je zde rozvinutí úvah o možnosti či nutnosti společných vrcholů geometrických útvarů vzhledem k zadaným podmínkám. Další obtíže žákům činilo využití všech hvězd, překrývání útvarů. Ukázalo se, že v některých aplikačních úlohách bylo pro žáky obtížné pracovat i se základními geometrickými útvary.

Ukázka žákovských řešení úloh

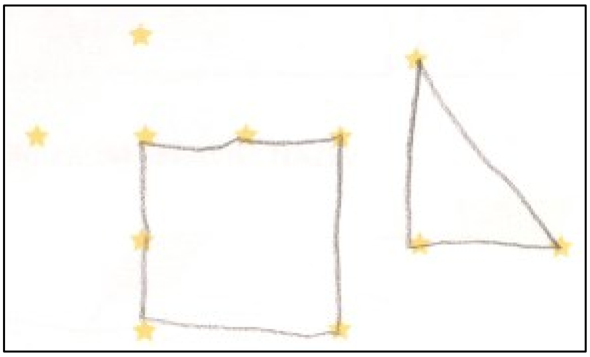
P3 V2, úloha 5

Správné řešení. Vidíme zde, že žák zvládl úlohu řešit náčrtkem.



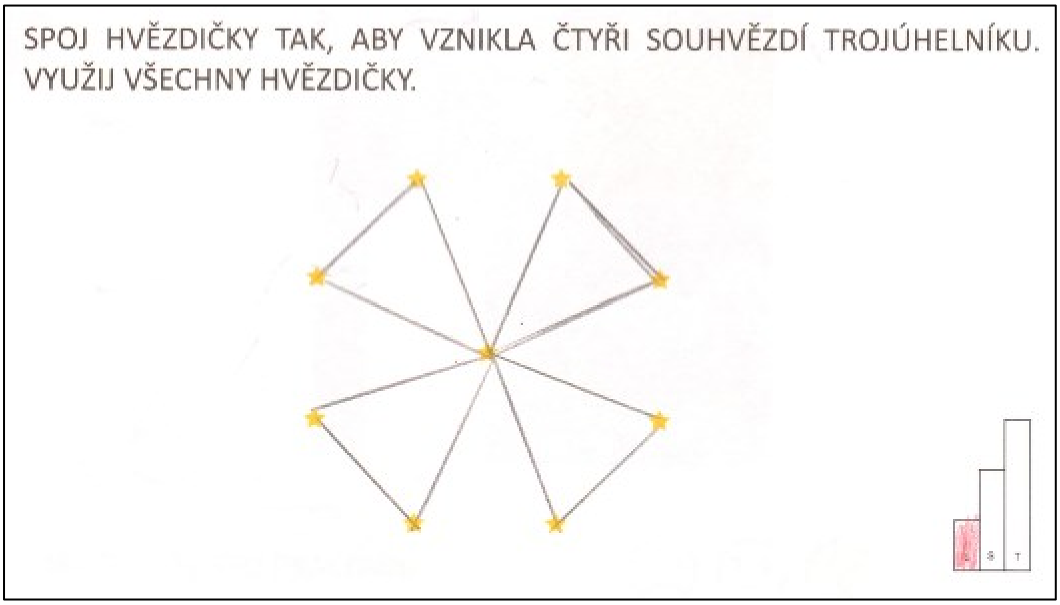
Žák vytvořil dva izolované útvary. Ze zbylých hvězd již čtverec nemohl načrtnout. Nedokázal mezi hvězdami identifikovat vrcholy čtverce, nalezl ale čtyřúhelník, u kterého se může při prvním pohledu zdát, že má dva vnitřní úhly pravé.

P3 V3, úloha 5

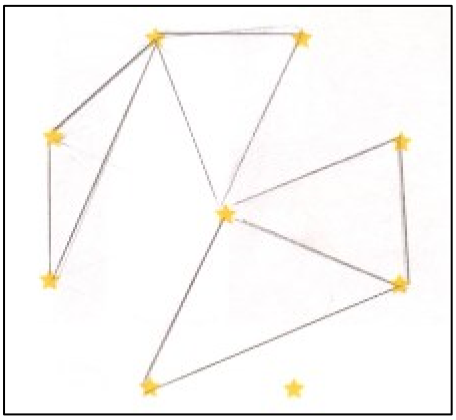


Ukázalo se, že pro žáky je obtížné pracovat s různými polohami geometrických útvarů. V našem případě s různými polohami čtverce.

P3 V3, úloha 4

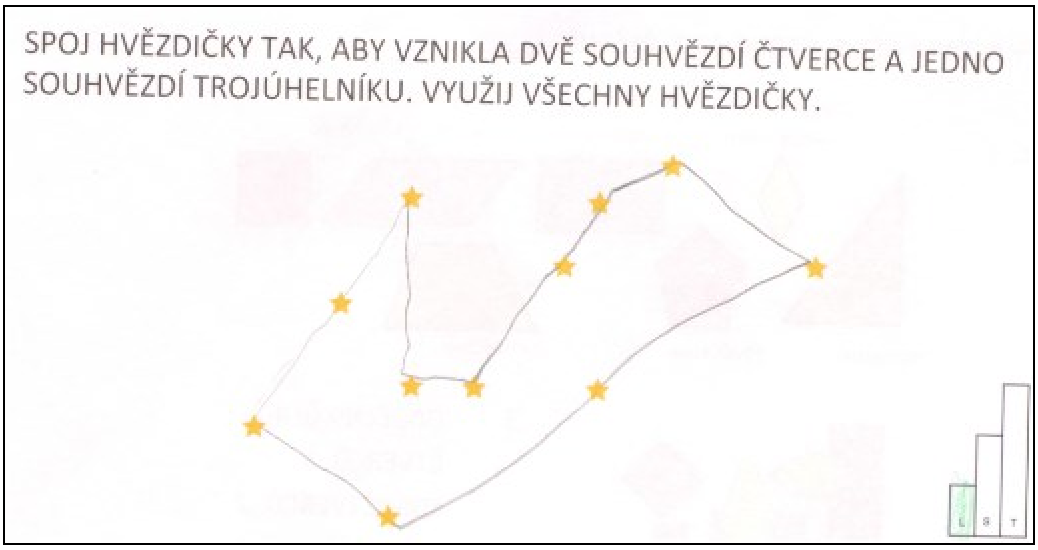


V ukázce vidíme jedno ze správných řešení, ve kterém žák využil pravidelného umístění trojúhleníků, zakresluje přibližně stejné trojúhleníky.



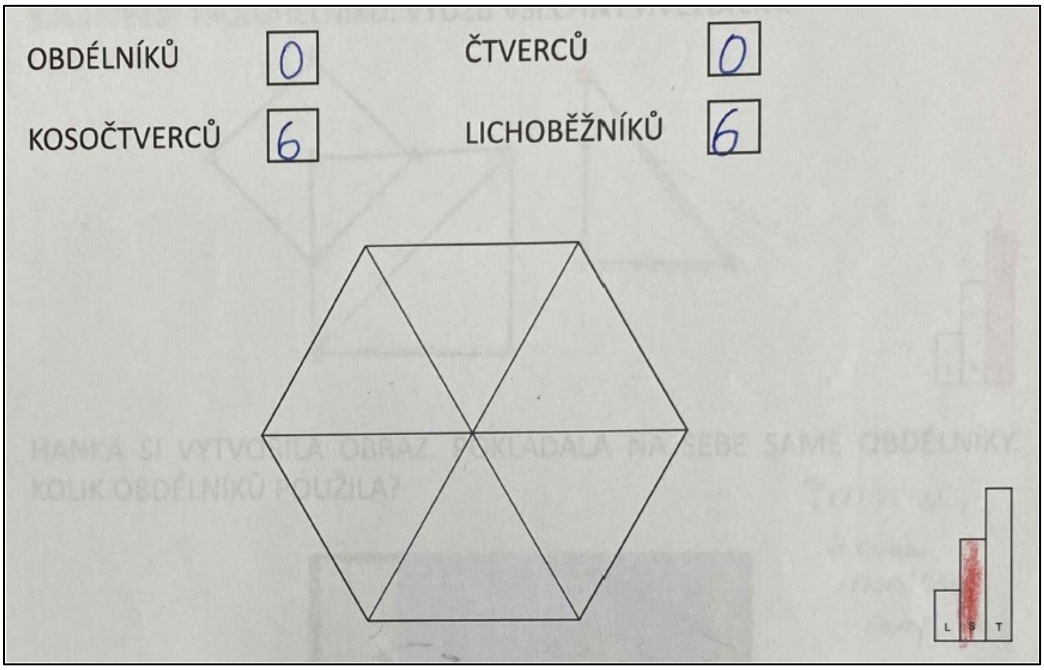
V řešení vidíme, že žák zakreslil čtyři různé trojúhleníky, avšak nevyužil všech hvězdiček. Vhodné by bylo v diskusi vést žáka k identifikaci problému a úpravě stávajícího řešení.

P3 V2, úloha 5



Žák splnil podmínku spojení všech hvězdiček, ale vytvořil tak pouze jedno souhvězdí bez zakreslení souhvězdí čtverců a trojúhelníku.

P3 V3, úloha 3



Jedná se o správné řešení. Při úlohách tohoto typu musí být jasné, že žák dobře rozumí použitým geometrickým pojmům. V tomto případě vidíme, že žák dokáže útvary identifikovat v různých polohách, umí si zadaný útvar rozložit.

4 Násobení

Násobení je další z početních operací, kterou si žák osvojuje, jejíž vlastnosti poznává a aplikuje při výpočtech. Vycházíme z představy násobení jako opakovaného sčítání, tj. sčítání několika sobě rovných sčítanců. Násobení je komutativní (*záměna činitelů*: $a \cdot b = b \cdot a$), asociativní (*sdružování činitelů*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, je distributivní vzhledem ke sčítání: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$. Kromě těchto vlastností operací poznávají žáci 1. stupně ZŠ číslo 0 jako *agresivní* prvek násobení $(a \cdot 0 = 0, 0 \cdot a = 0)$ a číslo 1 jako *neutrální (jednotkový)* prvek násobení $(a \cdot 1 = a, 1 \cdot a = a)$.

<u>Očekávané výstupy RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ jsou k danému tématu formulovány takto: žák

- zvládne s názorem řady násobků čísel 2 až 10 do 100,
- tvoří a zapisuje příklady na násobení a dělení v oboru do 100.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- si vytváří představu operace násobení jako součtu několika sobě rovných sčítanců s oporou o využití intuitivního chápání násobení (násobek daného čísla) v reálných situacích,
- porozumí podstatě násobení s oporou o názor jako předpokladu osvojování vlastností násobení a příslušné terminologie (násobek, činitel, součin) a symboliky.

V diagnostickém testu většina žáků prokázala intuitivní porozumění operaci násobení. V tuto chvíli je často takové porozumění opřeno o práci s názorem, s konkrétními modely. Z toho vychází zavedení pojmu ve videu. Na základě obrazového znázornění je vyvozena operace násobení jako opakovaného sčítání sobě rovných sčítanců včetně symbolického zápisu. Důležité je zde propojení názoru i zápisu obou operací – násobení a sčítání. Zavedeny jsou zde pojmy násobení, násobek, násobilka, řada násobků. Vyvozena je komutativnost násobení.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. Úvodem pracují s pojmy násobek a řada násobků, doplňují řadu nebo vyhledávají násobky v tabulce čísel. V prvních třech úlohách ve variantě V2 a V3 žáci vybarvují násobky jednotlivých čísel v samostatných tabulkách. V tabulkách jsou vždy vypsána čísla do desetinásobku daného čísla a v některých případech i čísel větších. Žáci tak vytváří řadu násobků a mají možnost sledovat pravidlo vytváření řady nejen z pohledu aritmetického, ale i v propojení s geometrickou stránkou: vytváření vzorů, a to i nad rámec zapsaných čísel. Podporu pro hledání vzorů a rozvoj imaginace představuje i výzva, aby žáci zapsali, co jim uvedený vzor připomíná. Žáci využívají podstaty aritmetické posloupnosti, tj. každé následující číslo je větší o stejnou diferenci. Ve čtvrtých úlohách pracovních listů V2 a V3 mají žáci za úkol napsat vzestupně a sestupně řadu násobků dvojic čísel 4 a 6, 3 a 7. Můžeme zde zkoumat různé zákonitosti. Například sledovat zajímavou vlastnost dvojic čísel, kdy na místě jednotek jsou stejné číslice. Nebo můžeme hledat zákonitost řady, která vznikne sečtením dvou čísel zapsaných vzestupné a sestupné řadě nad sebou. Další úlohy vycházejí z ukázek vyvození násobení na příkladech z reálného života. Ukázky jsou formulovány v podobě slovních úloh. Úlohy 4 a 5 z varianty V1 mají charakter úloh ze zájmové matematiky – hry s čísly.

Pomůcky

Vhodnou oporou pro vyvození násobení je manipulace s konkrétními předměty, se skupinami předmětů (dle volby násobilky – dvojice, trojice atd.), s násobilkovou tabulkou.

Zkušenosti z ověřování

I když žáci zvládají vypočítat úlohy na násobení z reálného života, většinou neznají symbolický zápis a příslušnou terminologii. Ovládají několik málo méně obtížných spojů násobení.

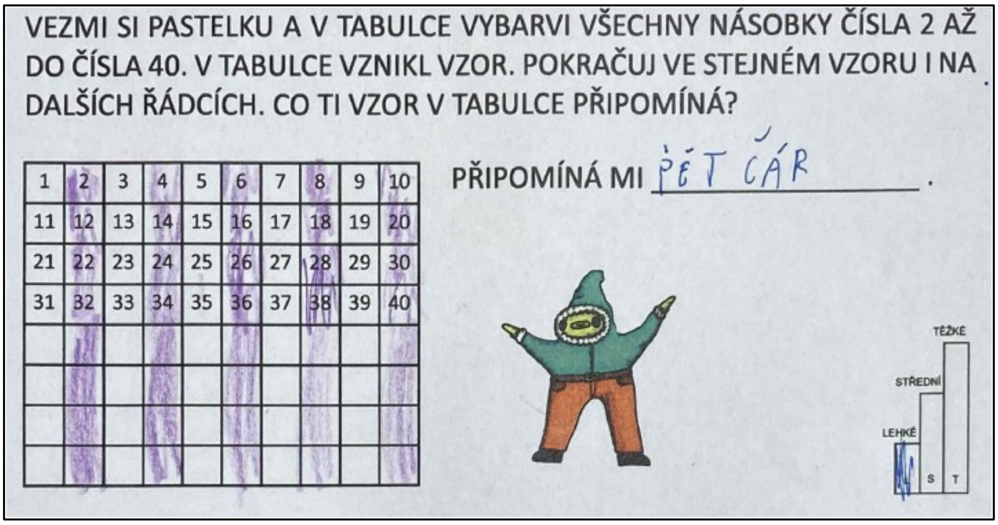
Problém byl s pojmem násobek. Při doplňování tabulek žáci interpretovali zadání různým způsobem. Někteří žáci doplňovali čísla i do prázdných čtverečků, násobky vybarvili. Jiní žáci doplnili tabulku do 100 a vzor již nedokreslovali. Napodobili tak pomůcku stovkové tabule bez hlubšího pochopení. Žáci, kteří úlohy správně vyřešili, uváděli různé náměty, co jim daný vzor připomíná. Například schody, mříž, šachy.

Slovní úlohy řešili žáci většinou bez zápisu aritmetické operace. Odpověď zapsali pouze v podobě čísla. Většinou se jednalo o správné řešení. Jako náročné označili žáci úlohy 4 a 5 z pracovního listu V1, kde měli uplatnit aktivní znalost násobilky pouze při práci s čísly. Nový byl pro žáky postup od známého součinu vyhledat neznámé činitele. Z pracovního listu V3 byla pro žáky náročná čtvrtá úloha. Někteří žáci nerozuměli pojmům vzestupně, sestupně. Vyskytovaly se zde chyby v řadě násobků. Žáci nedokázali vyjádřit souvislost mezi jednotlivými řadami násobků.

Z nejčastějších chyb se objevovala záměna násobení za sčítání, chybné násobilkové spoje.

Ukázka žákovských řešení úloh

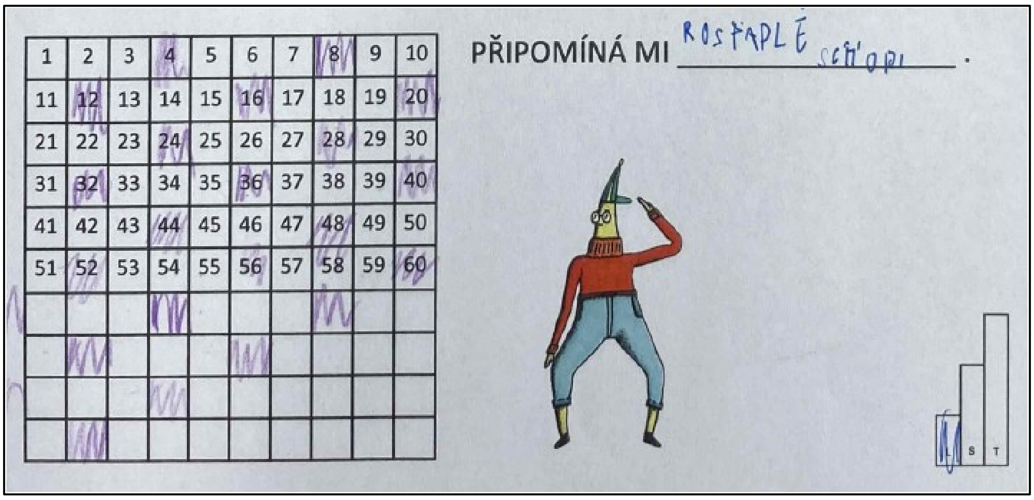
P4 V2, úloha 1


VEZMI SI PASTELKU A V TABULCE VYBARVI VŠECHNY NÁSOBKY ČÍSLA 2 AŽ DO ČÍSLA 40. V TABULCE VZNIKL VZOR. POKRAČUJ VE STEJNÉM VZORU I NA DALŠÍCH ŘÁDCÍCH. CO TI VZOR V TABULCE PŘIPOMÍNÁ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

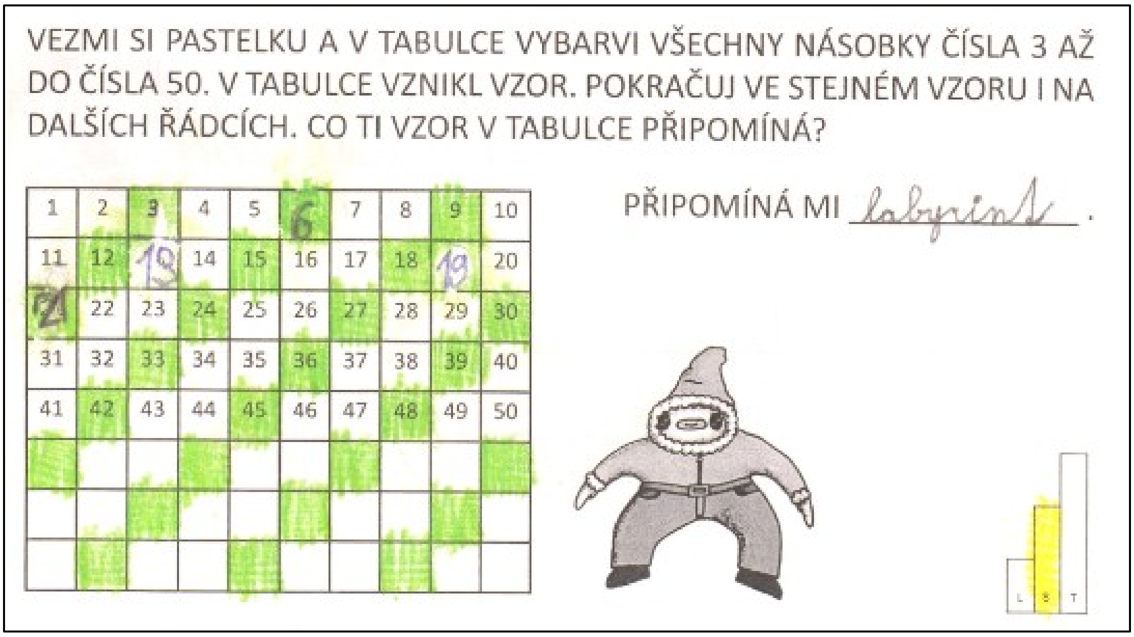
PŘIPOMÍNÁ MI PĚT ČÁR.

P4 V2, úloha 2



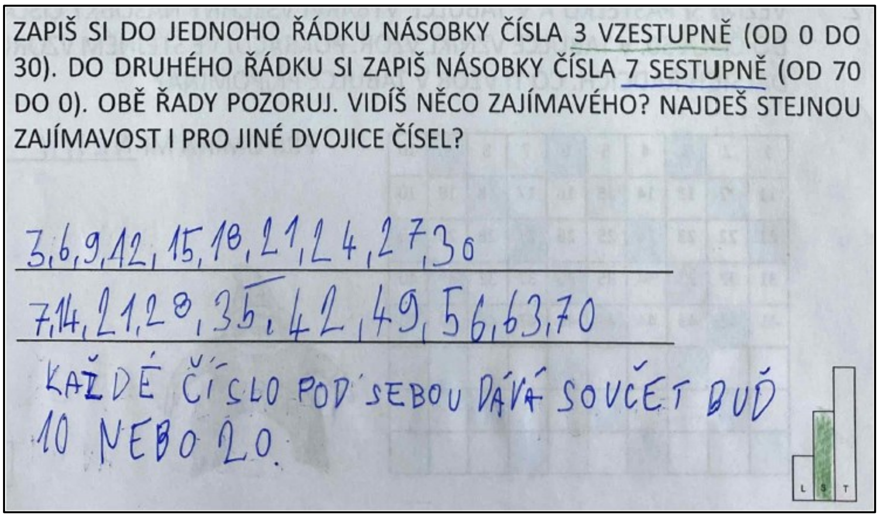
V obou uvedených případech žáci dokázali vybarvit násobky daného čísla a pokračovat ve vzniklém vzoru. Při pojmenovávání vzorů se projevila různá míra imaginace.

P4 V3, úloha 2



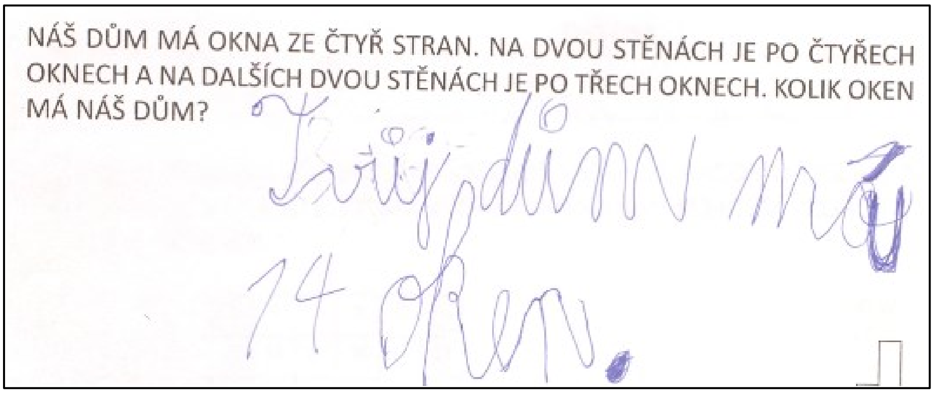
Z ukázky vidíme, že žák své řešení opravoval. Setkáváme se zde s častou chybou, kdy žáci dvojciferná čísla, která mají na místě jednotek 3, 6, 9, považují za násobky tří. V tomto v případě si žák chybu uvědomil a dokázal ji opravit.
V jiném řešení tento vzor žáci nazvali šachovnicí.

P4 V, úloha 4

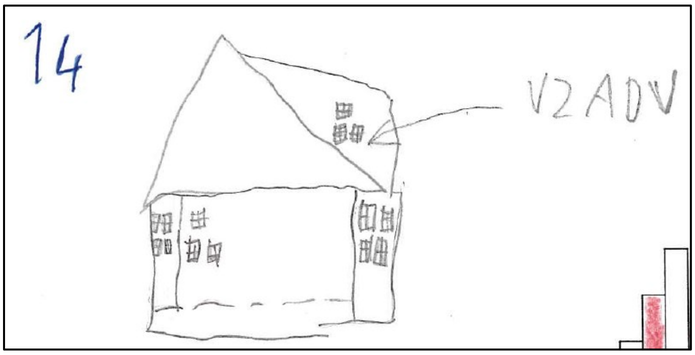


Jeden žák si zapsal obě řady vzestupně a objevil, že součet jednotek čísel zapsaných nad sebou je 10.

P4 V3, úloha 5



Žák řešil úlohu pamětně, bez nutnosti poznámek. Řešení formuloval do odpovědi celou větou. Volbou zájmena žák zohlednil, o čí dům se jedná. Často ovšem žáci odpovídali pouze zapsáním výsledného čísla.



V některých případech můžeme vidět i grafické řešení, kdy žáci nakreslili konkrétní dům a správně uvedli počet oken.

5 Dělení

Dělení v oboru přirozených čísel *neomezeně proveditelné není.* To znamená, že vydělíme-li číslo *a* (dělence) číslem *b* (dělitelem), přičemž platí *a* < *b*, dostaneme číslo (podíl), kterým je zlomek nebo desetinné číslo. V praxi výuky se ovšem žáci setkávají pouze s případy, kdy je podílem celé kladné (přirozené) číslo – *dělení beze zbytku*, (tj. když *a* > *b*, *a* je násobkem *b*) nebo s operací *dělení se zbytkem* (když *a* > *b*, *a* není násobkem *b*). Stejně jako u vytváření představy inverzního vztahu mezi sčítáním a odčítáním se postupně vytváří představa inverzních (opačných) početních operací násobení a dělení. Tu využívají také při *kontrole správnosti výpočtu* (zkoušce).

Očekávaný výstup RVP ZV pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- tvoří a zapisuje příklady na násobení a dělení v oboru do 100.

Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů: žák

- si vytváří představu operace dělení jako rozdělování na stejné části nebo po částech (dělení „podle obsahu“) s oporou o využití intuitivního chápání dělení (rozdělování) v reálných situacích,
- porozumí podstatě dělení s oporou o názor jako předpokladu osvojování vlastností dělení a příslušné terminologie (dělenec, dělitel, podíl) a symboliky.

V následujícím vesmírném příběhu Fí a Tau společně s planetami a hvězdami uvedou žáky do tématu dělení. Žákům je vysvětlena podstata jak *dělení na několik stejných částí* (21 planet se postupně rozděluje ke třem hvězdám), tak *dělení podle obsahu* (21 se rozděluje po třech). Žáci umí již z mateřské školy intuitivně rozdělovat. Důležité je ale rozlišení dělení v případech, kdy se musí jednat o „spravedlivé dělení“. Podstatné je propojení představ se symbolickým zápisem a jeho aktivní používání. Zároveň je aktivně využíváno souvislostí operací násobení a dělení při zkouškách správnosti výpočtů. V druhé části videa je žákům poskytnut vhled do problematiky Eratosthenova síta. Pracují zde s přirozenými čísly do 50. Pomocí násobků přirozených čísel zkoumají jednotlivá čísla, a zjišťují tak, jakými čísly může být dané číslo děleno beze zbytku. Přitom se na konkrétních ukázkách seznamují s pojmem prvočíslo.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech, kde se setkávají s úlohami dvojího charakteru. Jednou skupinou jsou úlohy kalkulativní, které směřují k procvičování spojů na dělení. Žáci porovnávají dva podíly, hledají některé z čísel (dělenec, dělitel, podíl) do příkladů s využitím nabídky odpovědí. Doplňují správné aritmetické operace a jim příslušné symboly. V pracovním listu V3 žáci pracují s pojmem dělení se zbytkem. Druhou skupinou úloh jsou slovní (kontextové) úlohy. V nich žáci uplatňují rozlišení „běžného“ rozdělování bez ambice získání stejných částí a „spravedlivého“ dělení na stejné části. V posledních úlohách pracovních listů V2 a V3 žáci vyhledávají různé dělitele čísel 12 a 24. Úlohy mají více možností řešení. Využívá se žákům blízký kontext hry molekuly a dělení čokolády o 24 dílcích. V šesté úloze V3 je možné pro řešení úlohy využít jako pomůcku papírovou čokoládu.

<u>Pomůcky</u>

Konkrétní předměty, umožňující fyzickou nebo mentální manipulací jejich rozdělování na několik stejných částí nebo po několika stejných částech. Papírová čokoláda ze souboru pomůcek, případně reálná čokoláda zvyšující motivační potenciál. Modely žetonů, figurky, či žáků dané třídy ke hře molekuly při uplatnění dramatizace.

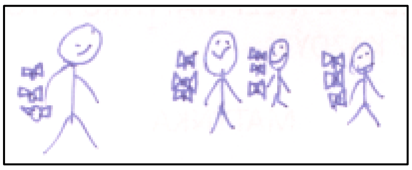
<u>Zkušenosti z ověřování</u>

Při řešení slovních úloh žáci většinou nevyužívali prostor pro zápis řešení (ani příklad, ani obrázek). Uváděli zde pouze jedno číslo jako výsledek.
Jako náročné téma se ukázalo dělení se zbytkem, což odpovídá obvyklému zařazení tohoto tématu až ve 3. ročníku základní školy, tedy po probrání celého tématu násobení a dělení. Mezi nejčastější chyby patřila záměna dělení za odčítání. Častá chybovost mohla plynout z neporozumění operaci dělení. Jako obtížné se ukazovalo zvládnutí zápisu dělení, kdy žáci zaměňovali dělence a dělitele (3 : 24 = 8). Často docházelo k výměně volby obtížnosti varianty pracovního listu z náročnějšího na snadnější.

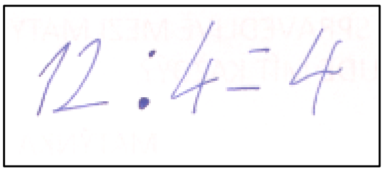
<u>Ukázka žákovských řešení úloh</u>

P5 V1, úloha 3

Jiné řešení.



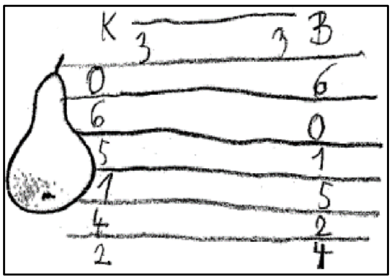
Úlohy, které vycházejí z reálného života žáků a umožňují grafické znázornění či modelaci, bývají žáky řešeny s velkou mírou úspěšnosti.



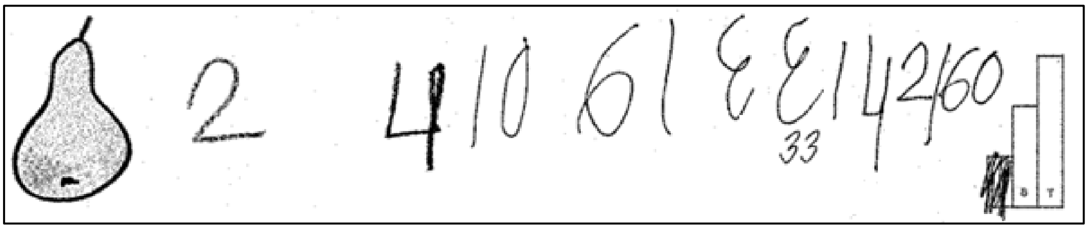
Našli se i žáci, kteří úlohy řešili „pouhým“ zápisem příkladu. V některých případech se jednalo o chybné řešení (ukázka), v některých o správné.

P5 V2, úloha 4

Zadání této úlohy bylo pro žáky neobvyklé, protože úloha je divergentní, má více řešení. Zpravidla žáci uváděli pouze jedno dělení, a to na skupiny po třech hruškách.

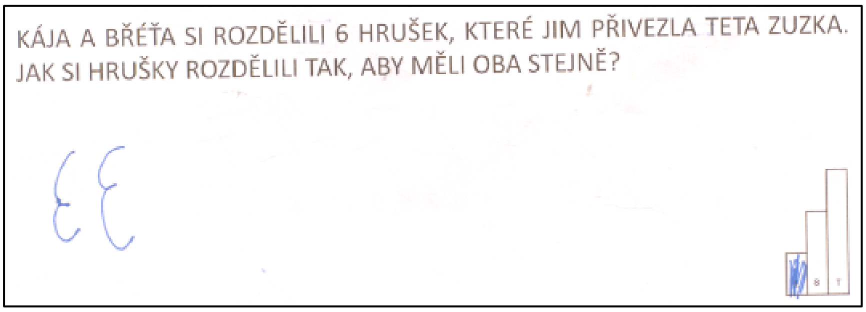


V ukázce žák uvádí všechna řešení, vidíme zde počátek systému zpracování údajů do tabulky.



U dalšího řešení nejsou uvedena všechna řešení (chybí 1, 5 a 5, 1), ale vidíme zde jistou systematičnost postupu. Z řešení je patrné, že žák velmi dobře vnímá kontext úlohy, kdy rozlišuje, zda 2 hrušky dostane Kája a 4 Břéťa, nebo 4 hrušky dostane Kája a 2 Břéťa.

P5 V2, úloha 5



U této úlohy uvádíme správné řešení, čísla 3 a 3. Pro ukázku jsme vybrali stejného žáka jako u úlohy výše. Vidíme, že žák vybral správné řešení. Zároveň je patrné, že žák opakovaně píše trojku stranově obrácenou. Psaní číslic je pro žáky náročné. V průběhu celé první třídy se objevuje stranově obrácené psaní jednostranně orientovaných číslic. Stejně je tomu u písmen.

6 Třídění trojúhelníků

Trojúhelník je jedním ze základních pojmů *rovinné (2D) geometrie* (planimetrie). Téma prohlubuje dosavadní znalosti žáků o trojúhelnících jako částech roviny: trojúhelník má 3 vrcholy (body), kterými je trojúhelník určen, má 3 strany (úsečky) a patří mu všechny body vnitřní oblasti těmito úsečkami určené. Na ukázkách jsou prezentovány a popsány různé *druhy trojúhelníků*: rovnostranný, rovnoramenný, obecný, pravoúhlý. Intuitivně se vytváří představa trojúhelníkové nerovnosti jako podmínky sestrojitelnosti trojúhelníku. Rozvíjí se geometrická terminologie a symbolika (vrchol, strana, vnitřní úhel).

Očekávaný výstup RVP ZV pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a nachází v realitě jejich reprezentaci.

Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů: žák

- si vytvoří správnou představu trojúhelníku včetně jeho vnitřních bodů (nejen hranice),
- rozpozná a rozliší různé typů trojúhelníků podle jejich vlastností (délky stran, velikost vnitřních úhlů) a dovede je pojmenovat,
- třídí trojúhelníky podle délky stran a velikosti vnitřních úhlů.

V prostředí továrny na sušenky se Fí a Tau setkávají s různými typy trojúhelníků. Identifikují je podle chuti, ale zároveň podle tvaru. K tomu využívají vlastností stran a vnitřních úhlů trojúhelníku. Seznamují se s trojúhelníkem rovnostranným, rovnoramenným a různostranným. Dále poznávají pravoúhlý trojúhelník. U rovnostranného trojúhelníku se žáci seznamují se shodností úseček. Na obrázku je zde propedeuticky ilustrována shodnost vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku. V případě rovnoramenného trojúhelníku je vizualizována shodnost dvou stran (ramen) a jiné délky třetí strany (základny). Představena je i vlastnost různostranného trojúhelníku týkající se různých délek jeho stran. Z pohledu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníků je zde zmíněn pravoúhlý trojúhelník, se kterým se žáci často setkávají. Pravý úhel je zde vizualizován. Zároveň je uvedena jeho velikost 90°. V přehledové části se žáci dále setkávají s tříděním trojúhelníků podle stran a podle vnitřních úhlů. Intuitivně s využitím vizualizace žáci přicházejí do kontaktu také s pojmem ostrý a tupý úhel. V závěrečné sadě úkolů žáci vyhledávají různé typy trojúhelníků.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. Začínají vyhledáváním trojúhelníků a jejich vybarvováním. Navazují přiřazováním názvů k jednotlivým typům trojúhelníků. Při přiřazování názvů nemusí jít o jednoznačné přiřazení. Například pravoúhlý trojúhelník můžeme zároveň označit jako různostranný. V třetích úlohách rozdělují mnohoúhelník na trojúhelníky. Cílem čtvrtého úkolu je práce s podmínkou, vyhledávání tvarů daných vlastností. V následujících úlohách žáci aplikují poznatky o vlastnostech trojúhelníků a jejich rozlišení. Zakreslují různé typy trojúhelníků do bodové sítě, kdy každý vrchol trojúhelníku je umístěn do některého bodu sítě. Varianty se liší počtem hledaných možností, pojmenováním trojúhelníků. V šesté úloze žáci vyhledávají různé geometrické útvary, které vidí na obrázku. Využívají zde znalostí z předchozího tématu o geometrických tvarech, kde se setkali s rovinnými útvary, jako je kosočtverec, kosodélník, lichoběžník. Žáci by si měli uvědomit, že je třeba brát v úvahu i útvary, které jsou složené z jiných znázorněných útvarů. Poslední úloha vybízí žáky k tvořivosti, nakreslení vlastního obrázku ze samých trojúhelníků.

Pomůcky

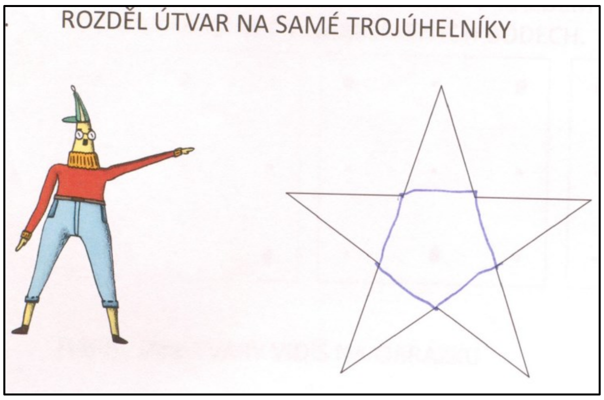
Vylamovací trojúhelníky ze sady pomůcek. Je třeba zajistit, aby žáci měli dostatečný počet různých modelů rovinných geometrických útvarů, kterým je věnována ve videu a pracovních listech pozornost (čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, lichoběžník, deltoid).

Zkušenosti z ověřování

Při vybarvování trojúhelníků žáci někdy nevyhledali všechny trojúhelníky. Někdy si obrázek doplnili tak, aby vznikl trojúhelník. Pojmenování trojúhelníků bylo většinou pro žáky obtížné, názvy zaměňovali. Názvy trojúhelníků nebyly dostatečně ukotveny. Někteří žáci ale projevili dobré porozumění a dokázali klasifikovat jeden trojúhelník jak z pohledu stran, tak vnitřních úhlů. Například pravoúhlý trojúhelník označili zároveň jako různostranný. Při rozdělování útvarů na trojúhelníky se projevila velká rozmanitost. Žáci se dotazovali, zda při rozdělování musí platit, že vrcholy trojúhelníků mohou být pouze stávající vrcholy mnohoúhelníků. Při vyhledávání útvaru s požadovanou vlastností žáci úspěšně pracovali zároveň s několika podmínkami i negací. Při dokreslování trojúhelníků do bodové sítě se nejčastěji vyskytla chyba v záznamu stejného typu trojúhelníku. Někdy šlo dokonce o shodný trojúhelník, ale v jiné poloze. Při vyhledávání různých útvarů v jednom obrazci se žáci soustředili na jednoduché znázorněné útvary a neviděli útvary, které jsou složené z oněch jednoduchých útvarů. Poslední úkol žáci využili pro vyjádření své kreativity. Většina žáků dodržela podmínku pracovat výhradně s tvarem trojúhelníku.

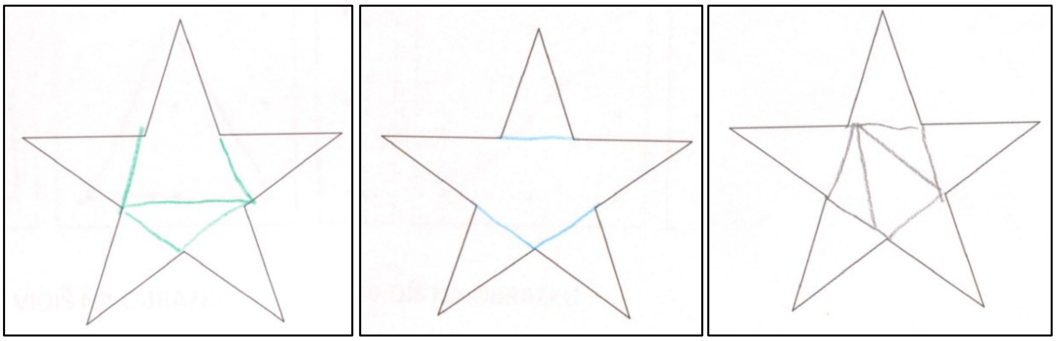
Ukázka žákovských řešení úloh

P6 V1, úloha 3



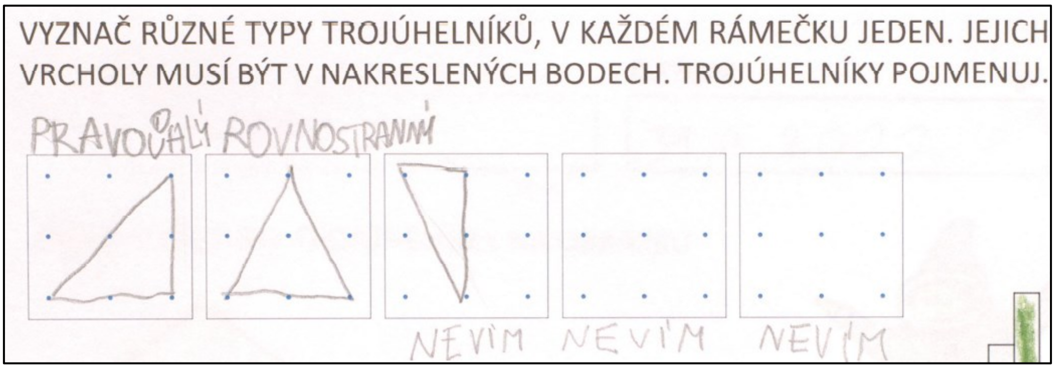
V řešení vidíme, že žákovi po rozdělení útvaru vzniklo pět trojúhelníků a jeden pětiúhelník. Aby bylo řešení správné, bylo by nutné dělení dokončit tak, aby vznikly pouze trojúhleníky.

Dále uvádíme tři správná řešení.

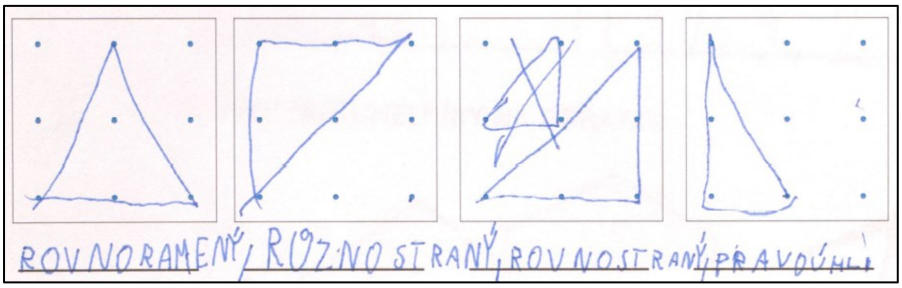


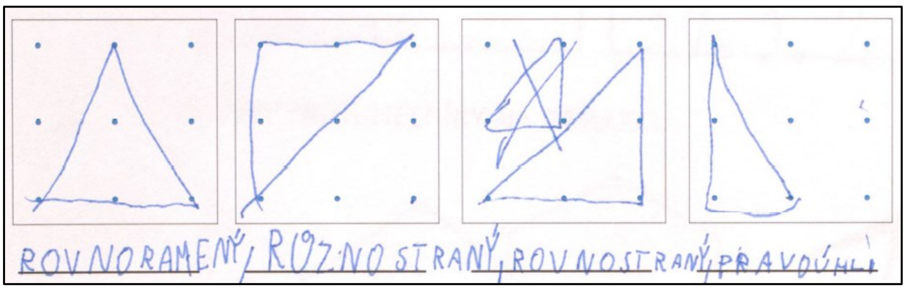
Na obrázku vidíme kreativní přístup žáků v podobě tří různých řešení.

P6 V2, úloha 5



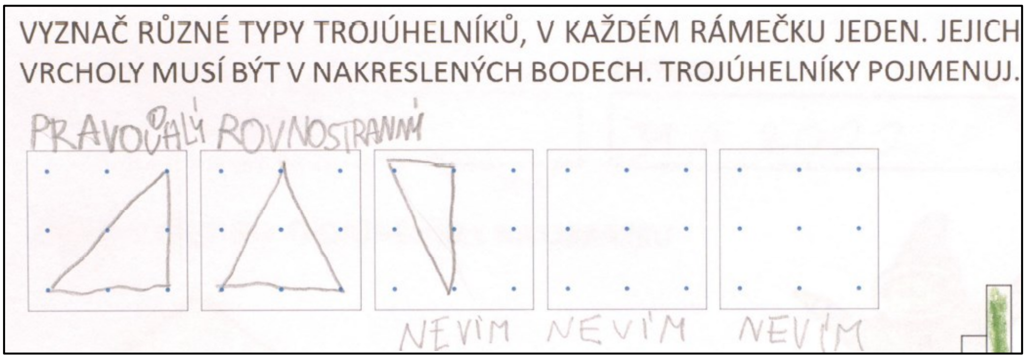
Jiné řešení.





Žáci zakreslili čtyři různé trojúhelníky. V obou případech bylo ale příliš obtížné přiřadit jim správné pojmenování. V prvním případě žák žádné pojmenování neuvedl. V druhém případě správně pojmenoval první a čtvrtý trojúhelník. Lze tedy usuzovat, že nemá dobrou představu o různostranném a rovnostranném trojúhelníku.

P6 V3, úloha 5



Představa pravoúhlého trojúhelníku je velmi často navázána na trojúhelník jako na pomůcku, kterou žáci používají k rýsování, kde vidí pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. To může odrážet realitu, kdy žák označil jako pravoúhlý pouze první z tvarů. Třetí trojúhelník jako pravoúhlý neoznačil. Na druhou stranu je dobré, že žák tuto polohu pravoúhlého obecného trojúhelníku zakreslil.

7 Magické čtverce

Magický čtverec je pojem zejména z rekreační matematiky, patří k nejstarším početním hříčkám. Je to čtvercová tabulka, která má v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách čísla, která dávají stejný součet. Obvykle se každé číslo může vyskytovat v tabulce pouze jednou. Do školské matematiky bývají magické čtverce zařazovány poměrně často, protože poskytují příležitost k rozvíjení dětské tvořivosti, kombinačních schopností a logického myšlení. Jsou využívány v mimotřídních a mimoškolních aktivitách, matematických soutěžích a hrách. Úlohové situace jsou zaměřeny na procvičení operace s přirozenými čísly a rozvoj kombinatorických schopností. Žáci pracují s magickými čtverci řádu tři nebo čtyři. Práce je náročná z pohledu souběžného sledování mnoha jevů (řádky, sloupce, úhlopříčky) v kombinaci s náročným procesem správného provádění operací. Žák musí nejen sčítat čísla, v oboru čísel, který není pro žáka rutinní, ale klíčové je zde volba čísel do jednotlivých pozic tabulky a ověřování správnosti volby, dodržení podmínek součtů v magickém čtverci.

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- rozvíjí a prohlubuje dosavadní dovednosti v práci s tabulkami čísel (pojmy řádek, sloupec, úhlopříčka),
- experimentuje, hledá vhodné strategie doplňování čísel do tabulek, které vedou ke splnění požadavků na magické čtverce.

<u>Pomůcky</u>

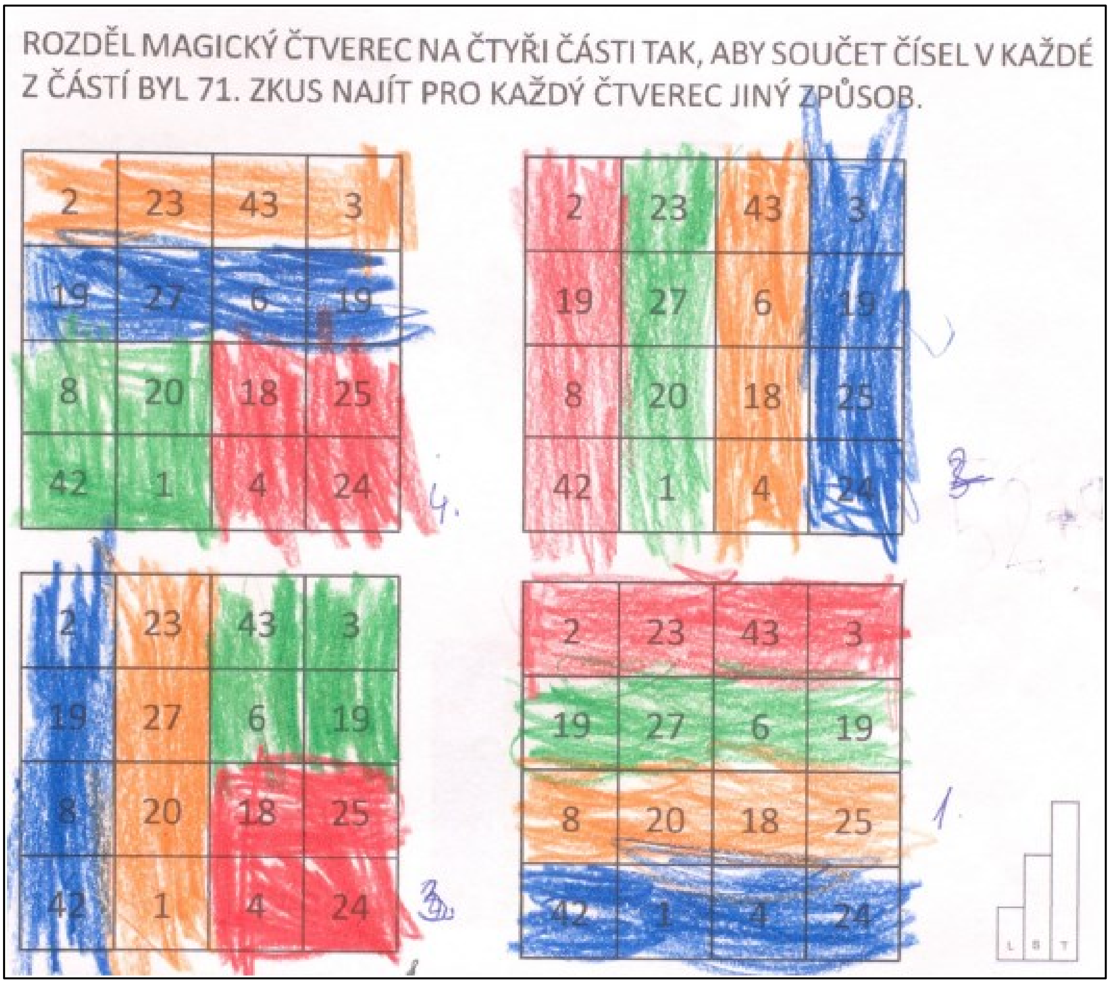
Čtverečky s čísly, které žáci doplňují do magického čtverce. Tabulky se zadáním úloh (nedoplněné čtverce).

<u>Zkušenosti z ověřování</u>

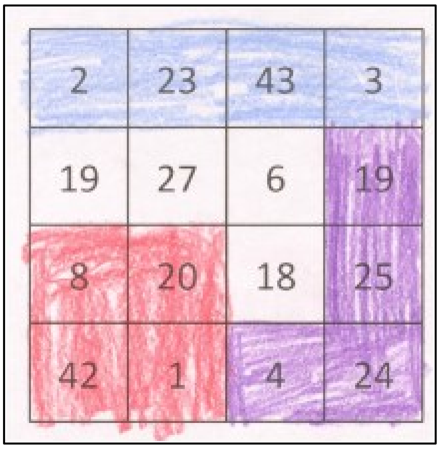
Vzhledem k tomu, že žák nemusí mít zkušenosti s řešením úloh typu sudoku nebo magických čtverců, je první pracovní listy zaměřen na seznámení s tímto typem úloh. Žáci se učí pracovat s jednotlivými podmínkami postupně. Pro některé žáky bylo nutné vysvětlit pojmy řádek, sloupek, úhlopříčka i princip doplňování magických čtverců. Na prvních úlohách žáci mají za úkol sledovat součty čísel v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách a objevit tak princip magických čtverců. V následujících úlohách mají dán součet čísel v řádcích a sloupcích a mají za úkol doplnit vynechaná čísla. V další úloze si žáci musí uvědomit, že součet je dán zapsanými čísly v jednom ze sloupců. Vidíme zde rostoucí míru náročnosti úloh, která je uplatněna v úlohách ve všech třech variantách pracovních listů. Ve variantě V2 a V3 se tak žáci setkávají s úlohami, kde doplňují čtverce z nabízených čísel. V jiných úlohách mají žáci za úkol vyhledat seskupení čísel, který mají požadovaný součet. Není zde explicitně uvedeno, že musí využít řádků, sloupců a úhlopříček. Je zde dá prostor pro žákovu kreativitu. Z průběhu ověřování bylo zřejmé, že je pro žáky náročné sledovat součty čísel v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách. Řešení úloh klade velké nároky na spolehlivé zvládnutí sčítání do 100 s přechodem přes základ 10. Úlohy poskytují prostor pro uplatnění různých řešitelských strategií. Výhodou se ukázala schopnost koncentrace a trpělivost při dokončování úkolů. I přesto, že byly úlohy pro žáky náročné, hodnotili je pozitivně. Úlohy žáky zaujaly. Projevovali přání pracovat samostatně, i když někdy s chybami.

Ukázka žákovských řešení úloh

P7 V2, úloha 3



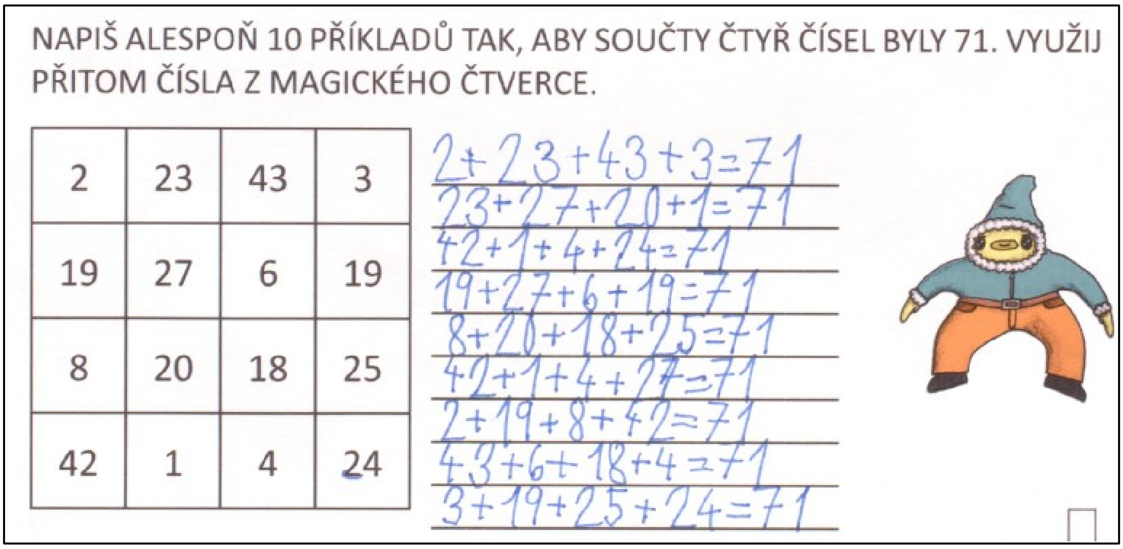
Žák kromě sloupců a řádků našel i další útvary, ve kterých čísla dávají požadovaný součet. Uvedl různá řešení.



2	23	43	3
19	27	6	19
8	20	18	25
42	1	4	24

Někteří žáci dokonce kombinovali tři různé typy útvarů.

P7 V3, úloha 2



NAPIŠ ALESPOŇ 10 PŘÍKLADŮ TAK, ABY SOUČTY ČTYŘ ČÍSEL BYLY 71. VYUŽIJ PŘITOM ČÍSLA Z MAGICKÉHO ČTVERCE.

2	23	43	3
19	27	6	19
8	20	18	25
42	1	4	24

2+23+43+3=71
23+27+20+1=71
42+1+4+24=71
19+27+6+19=71
8+20+18+25=71
42+1+4+27=71
2+19+8+42=71
43+6+18+4=71
3+19+25+24=71

Žák zapsal všechny součty čísel v řádcích a sloupcích. Příklady správně spočítal. Nevyhledal součty v úhlopříčkách a jiných možných seskupení čísel.

8 Mince a bankovky

Téma je zaměřeno na *finanční gramotnost*, na první systematické zkušenosti žáků s peněžní soustavou a se způsoby jejího využívání při řešení řady situací v reálném životě. Finanční gramotnost je považována za významnou složku vzdělávání s potenciálními interdisciplinárními souvislostmi. Podstatný je motivační a formativní aspekt: uvážlivé nakládání s penězi (nákupy, spoření, půjčky, dluhy aj.). Zdůrazňuje se *vztah mezi počtářskou a finanční gramotností.*

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- uplatňuje matematické znalosti při manipulaci s penězi.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- se seznamuje s platnými mincemi a bankovkami, uplatní je k zaplacení požadované částky (nákupy, spoření aj.),
- využívá znalosti početních operací v kontextu reálného života při prvním setkávání s prvky finanční gramotnosti.

Užívání platidel (bankovek a mincí) úzce souvisí s reálným životem. Předpokládáme, že každý z žáků má s placením osobní zkušenost. Z tohoto důvodu nebylo k tomuto tématu zpracováno video. Těžištěm tématu je získání praktických dovedností při práci s penězi s využitím matematického aparátu. Důležitým předpokladem není pouze vlastní zkušenost žáků s placením, ale uplatnění manipulativních činností s modely mincí a bankovek jako základ pro abstraktní práci s čísly v reálném kontextu finanční matematiky.

Při řešení úloh z pracovních listů do jisté míry záleží na zkušenosti žáků s financemi a jejich schopností vnímat hodnotu peněz. Současně s řešením úloh se u žáků rozvíjí finanční gramotnost. V pracovním listu V1 žáci pracují s mincemi v číselném oboru do 100. V prvních dvou úlohách se jedná o rozměňování mincí za jistých podmínek. Společně s třetí úlohou jde především o ukotvení reálií, platidel české měny. Ve čtvrté úloze žáci hledají jiný způsob vyjádření určité hotovosti pomocí různých mincí. Musí zde vnímat velikost překreslených obrysů mincí a využít ji pro hledání vhodných mincí k vyjádření požadované částky. Procvičují zde především sčítání a intuitivně pracují s rovností jako relací. Poslední úloha je nejvíce spjata s běžným životem, kdy žáci „nakupují“. V pracovních listech V2, V3 řeší žáci aplikační a kontextové úlohy. Pracují zde s mincemi i bankovkami. V úlohách mohou žáci využít i odhad výsledku. V posledních úlohách rozhodují, zda mohou zaplatit určité částky pouze danými mincemi bez možnosti vracení. Ve variantě V2 své zjištění zapisují do tabulky. Tento způsob práce může být pro žáky nový, náročný. Je proto nutné rozlišit, zda žákovi činí obtíže práce s tabulkou či samotné řešení úkolu. V pracovních listech je zastoupena tematika úloh nákupů, spoření, placení poplatků za energie. Zařazování úloh tohoto charakteru je pro žáky atraktivní a motivačně významné. Je však úzce propojeno s aktuální situací ve společnosti. Ceny produktů i poplatků jsou velmi proměnlivé, nelze proto považovat stávající zadání úloh obsahující ceny předmětů za konstantní.

Pomůcky

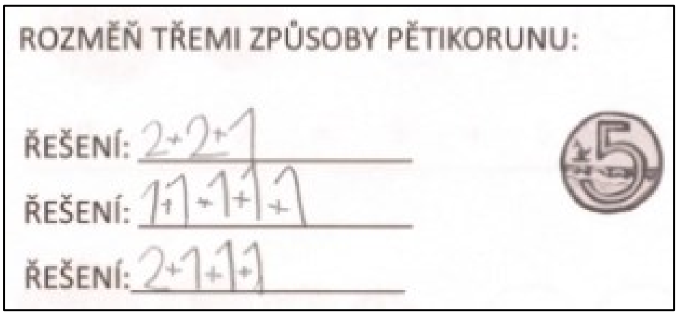
Modely mincí a bankovek.

Zkušenosti z ověřování

Pro většinu žáků je téma financí blízké, atraktivní. Při řešení pracovních listů byli vesměs úspěšní. Pouze v několika případech se objevily následující problémy: V úlohách 1 a 2 žáci zaměňovali rozklad čísla na několik sčítanců za možnost rozměnit částku pomocí jiných mincí (10 = 4 + 4 + 2; 5 = 4 + 1). V druhé úloze V1 žáci často nerespektovali, že mají částku vyjádřit pomocí stejných mincí. Někteří žáci nechápali slovo „rozměň“, což může být spojeno s malou zkušeností s manipulací s mincemi či jejich využitím k platbě i aktuálním trendem platby pomocí karet nebo na internetu. Pro některé žáky bylo problematické vyjádřit půl roku v podobě počtu měsíců. Někteří žáci vyjádřili půl roku jako 5 měsíců, což může být ovlivněno vnímáním délky školního roku. V řešení úloh používala řada žáků odhady.

Ukázka žákovských řešení úloh

P7 V1, úloha 1

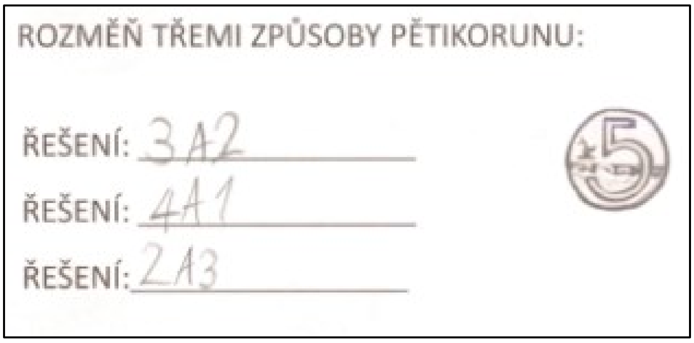

ROZMĚŇ TŘEMI ZPŮSOBY PĚTIKORUNU:

ŘEŠENÍ: 2+2+1

ŘEŠENÍ: 1+1+1+1+1

ŘEŠENÍ: 2+1+1+1

Správné řešení rozměnění pětikoruny žák demonstroval vytvořením příkladů se součtem pět.


ROZMĚŇ TŘEMI ZPŮSOBY PĚTIKORUNU:

ŘEŠENÍ: 3 A 2

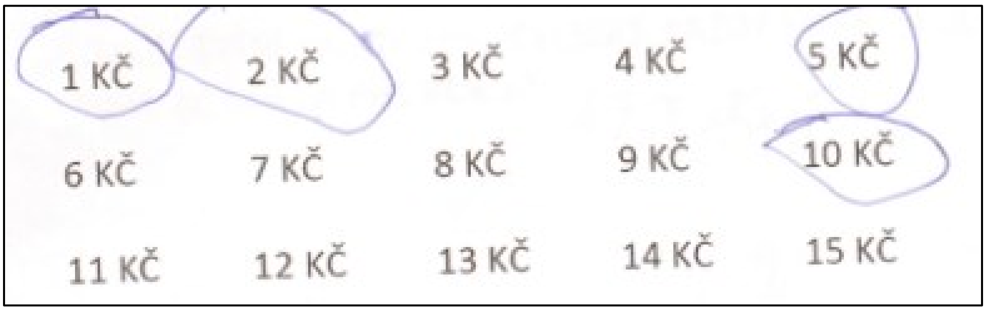
ŘEŠENÍ: 4 A 1

ŘEŠENÍ: 2 A 3

V tomto chybném řešení žák uvedl rozklady čísla pět na dva sčítance. Opomněl zde kontext rozměňování mince. Mince v hodnotě 3 Kč a 4 Kč neexistují.

P7 V3, úloha 6

Z popisu postupu řešení je patrné, že žákyně řešila úlohu experimentem. Nenašla všechna řešení.



Žák zakroužkoval pouze hodnotu znázorněných mincí. Nepracoval se zápornou podmínkou, která je v zadání úlohy.

9 Skládání trojúhelníků

Skládání trojúhelníků je založeno na *fyzických manipulacích s pomůckami*. Zpřesňuje se geometrická terminologie, vytvořené útvary jsou označeny názvy a popsány jejich prvky (vrcholy, strany, vnitřní úhly). Téma vytváří značný prostor pro fantazii a kreativitu žáků, kteří mohou stejný čtyřúhelník vytvořit různými způsoby. Jsou rozvíjeny dosavadní zkušenosti žáků v oblasti rovinné geometrie.

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- objevuje různé možnosti vytvoření čtyřúhelníků skládáním trojúhelníků jako sjednocení dvou nepřekrývajících se trojúhelníků, které mají společnou právě jednu stranu,
- využívá manipulativní činnosti k tvorbě různých čtyřúhelníků.

Videolekce jsou zaměřeny na manipulativní činnosti v souvislosti se skládáním trojúhelníků. Proto by žáci měli mít připravené trojúhelníky ze sady pomůcek a souběžně s videem úlohy řešit. Je vhodné využít pauzování videa. Po vyčerpání tématu (ne řešitele 😊) by mělo být ve videu pokračováno. Při zkoumání nově vzniklých útvarů mohou žáci využít poznatky z tématu Geometrické tvary, včetně pojmenování útvarů. Ve videu je používán termín shodnost. Je zde zaváděn intuitivně na příkladu dvou shodných trojúhelníků, které jsou na obrázcích jednoznačně prezentovány. Žáci navíc pracují se souborem trojúhelníků ze sady pomůcek, kde mají tvar i velikost trojúhelníků předem dány. S vymezením pojmu shodnost se žáci setkávají v prvních úlohách pracovních listů.

Žáci objevují, jakým způsobem mohou vzniknout další geometrické útvary (skládáním a rozkládáním jiných útvarů). Zkoumají možnosti, jak k sobě dva shodné trojúhelníky přiložit, aby se dotýkaly vždy celou stranou. Zároveň mohou objevovat nové útvary a zkoumat jejich vlastnosti. Mohou také prověřit, zda mezi složenými útvary právě vzniklý útvar již existuje, nebo neexistuje. Žáci aktivně využívají otočení, symetrie, posunutí. Jedná se o propedeutiku čtyřúhelníků jako sjednocení dvou nepřekrývajících se trojúhelníků, které mají společnou právě jednu stranu. Žáci skládají různé typy dvou trojúhelníků a sledují, jaké útvary z nich mohou vzniknout. V prvním dílu nejprve skládají dva rovnostranné trojúhelníky, jejichž složením vznikne jedině kosočtverec. O něm se žáci dozvídají, že má shodné protější úhly, ale sousední úhly shodné nejsou. Při skládání dvou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků Archimedes sdělí, že žáci mohou složit tři různé geometrické útvary. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník, kosodélník, čtverec. U kosočtverce je vizualizována vlastnost jeho stran, každé dvě protější strany jsou stejně dlouhé (jsou shodné).

V druhém dílu se navazuje skládáním dvou pravoúhlých různostranných trojúhelníků. Žáci hledají šest různých geometrických útvarů, které z nich mohou složit. Dostávají obdélník, dva různé kosodélníky, dva různé trojúhelníky a deltoid. U deltoidu je vizualizována vlastnost jeho stran. Má dvě dvojice sousedních stran shodných. V dalším úkolu žáci pracují se dvěma rovnoramennými trojúhelníky a mají sestavit tři různé geometrické útvary. Složen je kosočtverec, kosodélník a deltoid. V závěru videa je ukázka dvou zvláštních rozdělení čtverce: Archimedův ostomachion a tangram. Žáci jsou vyzváni k vlastnímu skládání, tvoření z tangramu, který mají v souboru pomůcek. Mohou volně skládat, ale také využít předlohy (s vyznačením všech dílků či obrysu skládaného tvaru).

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech, kde je pozornost věnována skládání, rozkládání útvarů a jejich identifikaci. V prvních úlohách všech pracovních listů je žákům vysvětlena shodnost jako vlastnost geometrických útvarů, které mají stejný tvar i stejnou velikost. Při práci se shodnými trojúhelníky by bylo vhodné žákům ukázat, že shodné trojúhelníky se při přiložení na sebe kryjí. Při práci v pracovních listech žáci využívají zkušenosti z videa se skládáním trojúhelníků. Tentokrát jde ale o rozložení zadaného útvaru na shodné trojúhelníky a identifikaci těchto trojúhelníků z pohledu klasifikace trojúhelníků na základě délek stran. Vyhledávání geometrických útvarů v obrázcích je zaměřeno na uvědomění si počtu všech zakreslených útvarů (jednotlivých i složených). Čtvrté úlohy jsou zaměřeny na výběr útvarů, který mezi ostatní nepatří a na zdůvodnění výběru. Úlohy tohoto typu vedou žáky ke zkoumání útvarů, vyhledávání a posuzování jejich společných či odlišných vlastností. Žáci si mohou uvědomit, že úlohy mají více řešení. Podpořena je tak kreativita žáků, argumentace a samostatnost v rozhodování. Následně žáci rozdělují kosodélník na dva útvary s různými podmínkami zadání. Hledají tak různé varianty rozdělení kosodélníku. Poslední úlohy vedou žáky k volné tvorbě obrázku s podmínkou přítomnosti vybraných tvarů.

Pomůcky

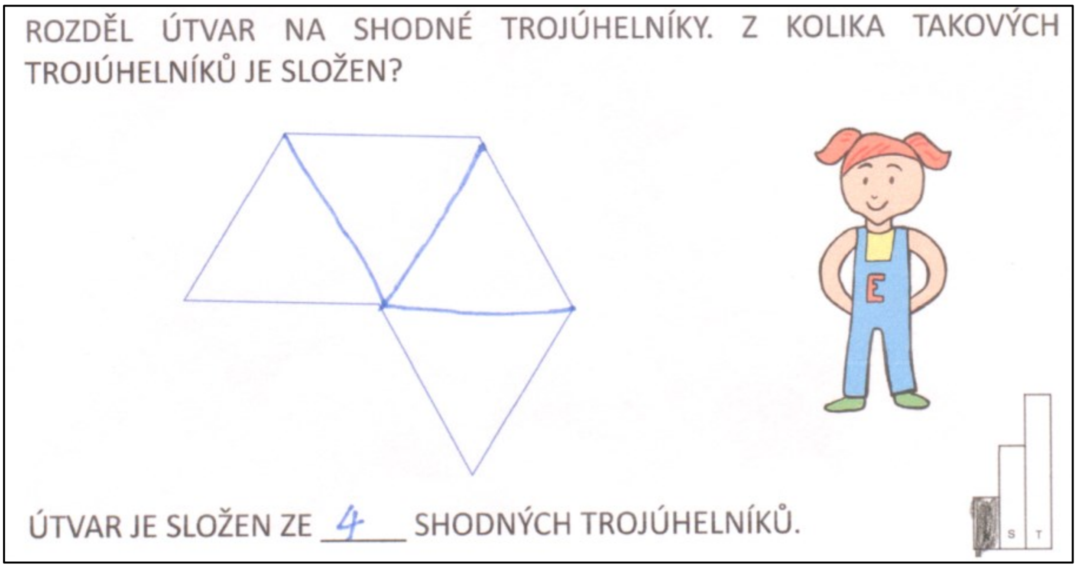
Trojúhelníky ze sady pomůcek, dvojice shodných trojúhelníků, přehled klasifikace trojúhelníků. Vhodné by bylo, aby trojúhelníky měly podobný tvar a stejnou barvu jako ve videu. Papír na zaznamenání složených útvarů. Tangram.

Zkušenosti z ověřování

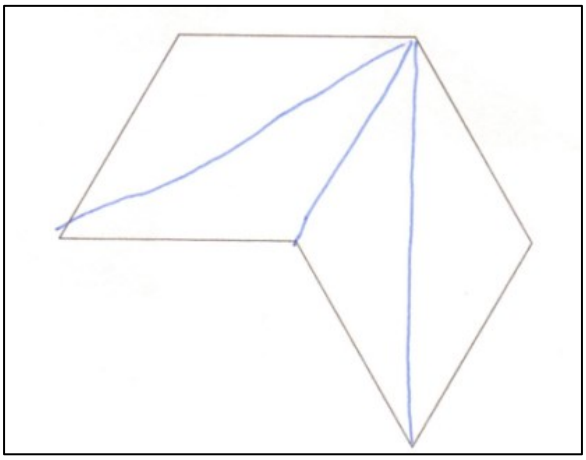
V prvních úlohách žáci většinou útvar správně rozdělili, avšak nesprávně pojmenovali. Při vyhledávání geometrických útvarů v obrázcích žákům činilo obtíže vyhledat všechny objekty, zejména ty, které byly složené z více geometrických útvarů. Při výběru útvarů, který mezi ostatní nepatří, uplatnili žáci velkou invenci. Při zdůvodnění využívali různou měrou geometrickou terminologii. Často využívali vlastní popis, který nebyl přesný, ale vycházel z intuitivních představ žáků. Například pracovní list V1, vyřazení trojúhelníku: „Každý tvar má zahnutou alespoň jednu část, tento ne.“ Pracovní list V2, vyřazení lichoběžníku: „Má jiné strany.“ Pracovní list V3, vyřazení lichoběžníku: „Nemá všechny strany stejně dlouhé jako ostatní tvary.“ Při vyřazení šestiúhelníku: „Jako jediný má šest hran.“ Při vyřazení čtverce: „Nemá šikmé strany.“ Z vyjádření vyplývá, že představa žáků je silně fixována na polohu útvarů. V práci žáků a z jejich slovních vyjádření je patrné, že proces vytváření představ geometrických útvarů není ukončen, jejich představy se nacházejí ve stádiu vývoje. Vyučujícími byla kladně hodnocena pestrost a různorodost úkolů videa i pracovních listů. V následujících úlohách bylo úkolem žáků rozdělit kosodélník na dva útvary. V případě V1, kdy měli žáci ponechánu volnost ve výběru útvarů, volili nejčastěji dva trojúhelníky. Poslední úloha zaměřená na tvorbu obrázků se zadanými útvary byla obtížná i z pohledu grafomotoriky, kdy bylo třeba zohlednit všechny vlastnosti kresleného útvaru. Pro některé žáky bylo například obtížné nakreslit kosočtverec.

__Ukázka žákovských řešení úloh__

P9 V1, úloha 2

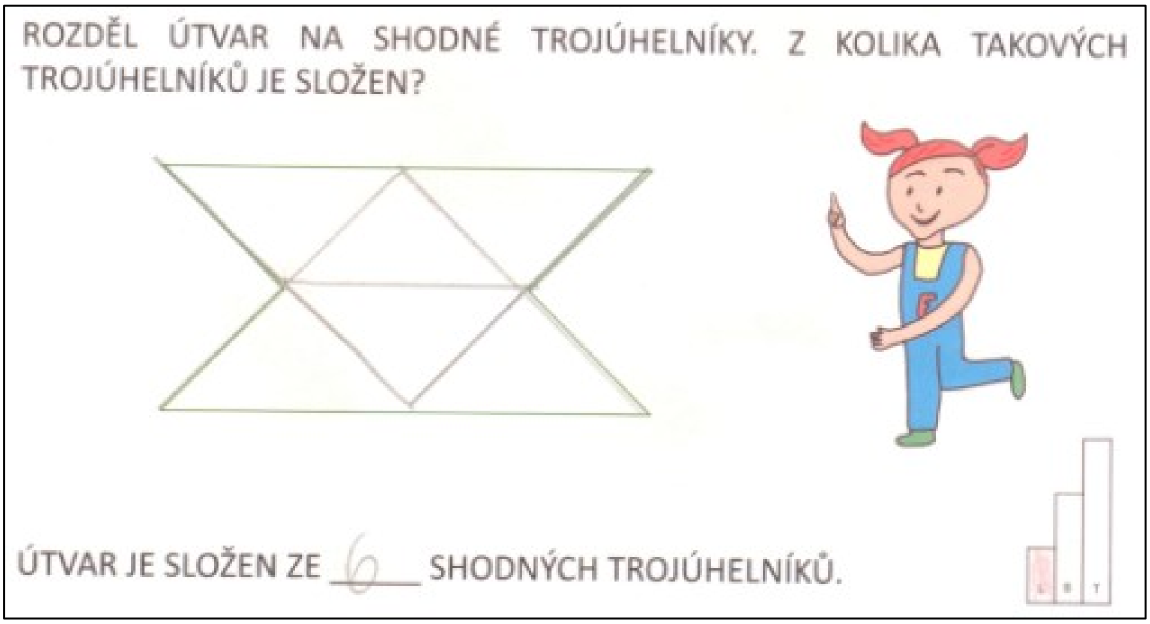


Jiné řešení.



Uvádíme dvě různá správná řešení úlohy.

P9 V3, úloha 2

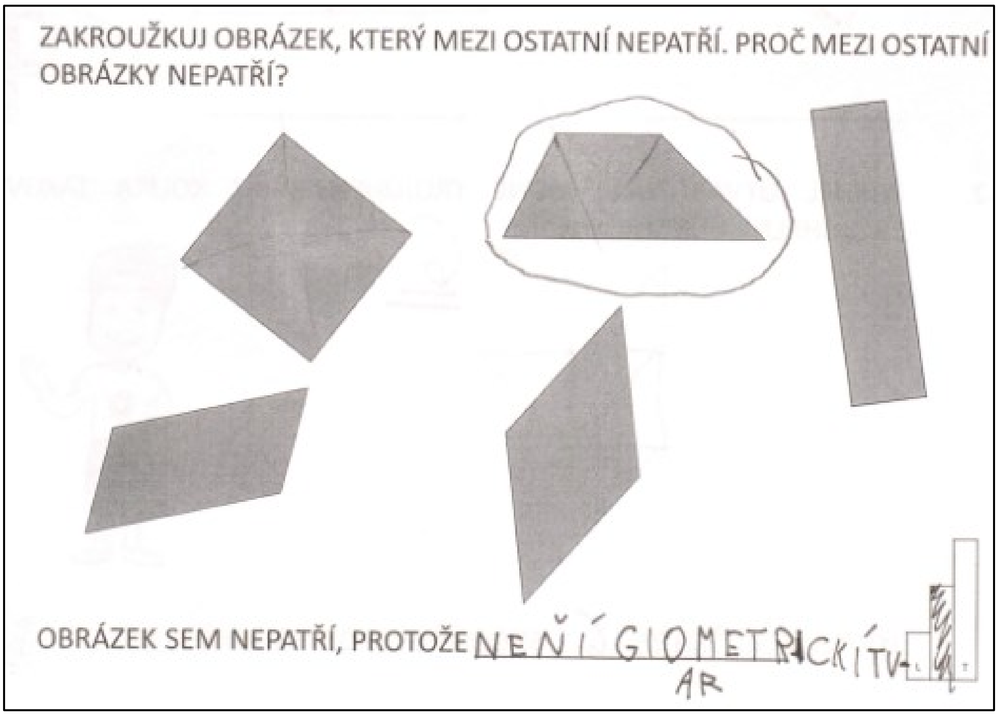


Jiné řešení.

Uvádíme dvě správná řešení úlohy z pohledu geometrie. Vzhledem k tomu, že je řešení vyznačeno náčrtkem, nemůže se jednat o přesné, shodné trojúhelníky. V druhém případě je načrtnuto 46 malých trojúhelníků. V odpovědi je zaznamenáno 47 trojúhelníků. Této chyby můžeme využít k diskusi nad různými možnostmi určení počtu nejmenších trojúhelníků. To vede k využití tématu symetrie, sudých a lichých čísel, závislostí, přeměnu obrazce.

Někteří žáci při řešení úlohy projevovali velkou kreativitu, trpělivost, systematičnost.

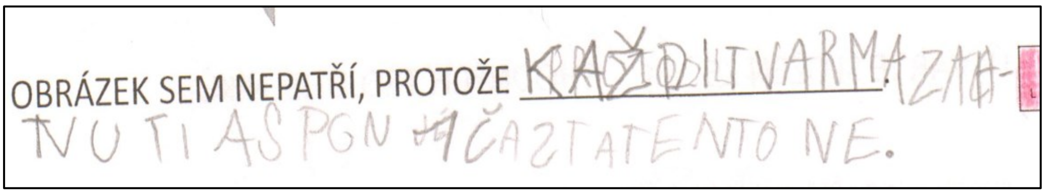
P9 V2, úloha 4



Žák vyloučil lichoběžník, který nepovažuje za geometrický útvar. Tato skutečnost může plynout z frekvence setkávání se s daným tvarem. Je méně obvyklý než rovnoběžníky. Jiný žák vyloučil obdélník, protože „není z trojúhelníků“.

P9 V1, úloha 4

Žák vyloučil trojúhelník. Ostatní útvary chápal jako části kruhu.



10 Neurčité rovnice

Neurčité (diofantovské) rovnice jsou rovnice o dvou nebo více neznámých, jejichž řešením jsou pouze celá čísla. Nesou jméno slavného řeckého matematika Diofanta z Alexandrie, který žil v polovině 3. století n. l. V tématu *se nejedná o řešení rovnic jako takových* (s tímto pojmem se ani nepracuje), ale o řešení úloh, které je možné uvedeným typem rovnic vyjádřit. Tyto úlohy s reálným kontextem jsou řešeny experimentem, objevováním, s oporou o názor, s využitím grafického řešení nebo systematického zkoumání možných řešení se zápisem do tabulky. Žáci se tak mohou setkat s úlohami *divergentního charakteru*[3] překonávající jejich očekávání, že každá úloha musí mít právě jedno řešení. Téma je zařazeno pro značný potenciál badatelských aktivit požadujících čtenářskou gramotnost žáků, porozumění textu a interpretaci řešení.

Očekávaný výstup RVP ZV pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů: žák

- získává první zkušenosti s úlohami, které mají více než jedno řešení, případně více než jeden možný způsob řešení,
- rozvíjí své badatelské aktivity,
- rozvíjí svou schopnost čtení úlohy s porozumění, čtenářskou gramotnost,
- rozvíjí schopnost argumentace a interpretace výsledku.

Ve videu žáci navštíví vesmírnou ZOO, kde pomáhají Diofantovi zjišťovat počet zvířat ve výbězích. Žáci se intuitivně seznamují s řešením úloh rovnicového charakteru, které však nejsou řešeny sestavením rovnic, ale pomocí experimentu nebo aritmeticky. V úlohách jsou známy počty hlav a nohou zvířat ve výbězích. Zároveň je znám počet nohou jednotlivých zvířat. V poslední úloze žáci hledají různá řešení. Jsou vyzváni, aby našli všech sedm řešení. Nosná je zde vlastní žákova volba postupu řešení i samotná volba záznamu řešení úlohy. Vzhledem k tomu, že nepředpokládáme předchozí zkušenosti žáků s řešením těchto úloh, jsou pro vzorové řešení voleny kombinace řešení obrázkem, symbolickým znázorněním nebo aritmetickým zápisem. Vhodné by zde ale také bylo zaznamenat postup řešení například do tabulky.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. Na počátku řeší úlohy, kde rozdělují objekty tak, aby měli všichni (dva lidé) stejně. V druhých úlohách mají žáci prostor pro intuitivní řešení, manipulaci, grafické řešení. V třetích úlohách žáci řeší obdobné úlohy, které byly zařazeny ve videu. Je dán celkový počet nohou nebo koleček, tedy popis objektů (koloběžky, tříkolky, židle a stoly o různém počtu nohou). Úkolem je zjistit počty

---

[3] Připomeňme, že termínem divergentní úlohy se označují takové úlohy, které mají více než jedno řešení.

jednotlivých objektů. Obdobným typem jsou čtvrté úlohy, kde je zadána částka (v korunách) a žáci hledají způsob, jak ji lze přesně zaplatit pomocí dvou druhů mincí. V obou zmíněných případech se jedná o úlohy diofantovského charakteru. Na rozdíl od úloh ve videu zde žáci musí hledat vlastní postup i vlastní záznam řešení úloh. Není zde opora pro řešení v podobě obrázku. Poslední úlohy bychom mohly zařadit do kategorie logických úloh či úloh z rekreační matematiky. Řešení vyžaduje vhled do situace a je obvykle spojeno s vtipem.

Pomůcky

Konkrétní předměty, mince. Možné je vytvořit tabulky pro záznam řešení.

Zkušenosti z ověřování

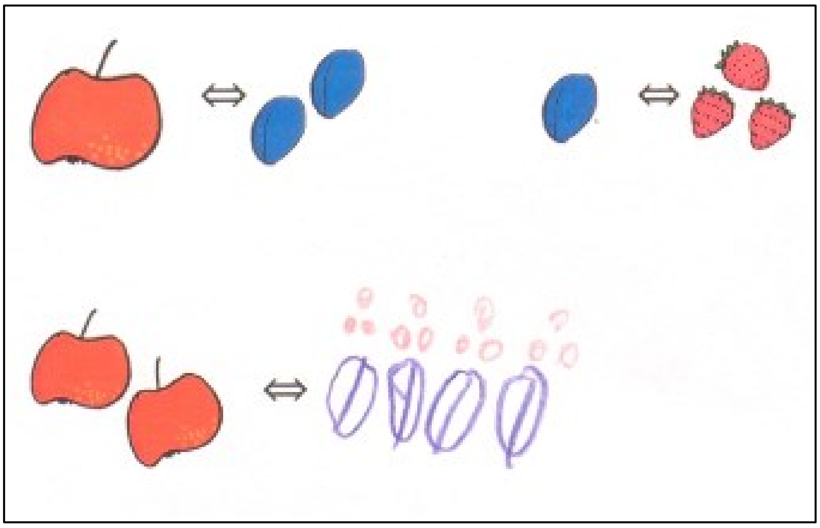
Při řešení tohoto typu úloh v pracovních listech, kde měli žáci prostor pro hledání vlastního postupu i záznamu řešení, se ukázalo, že zpravidla našli jedno z možných řešení. Někteří našli i dvě řešení. Většinou žákům chyběl systém práce, řešení hledali náhodně. Nebyla zde patrná inspirace řešením ve videu. Proto by bylo vhodné naučit žáky s videem pracovat a o jeho průběhu s nimi diskutovat. Zároveň se ukazuje jako velmi náročné (a zvlášť pro žáky v 1. třídě) volit vhodný způsob záznamu řešení. U tohoto typu úloh je patrné, že pamětné řešení celé úlohy (včetně nalezení všech řešení) je mimo možnosti žáků. Písemný záznam je zde nutný. Proto je velmi důležité i nadané žáky vést k hledání různých možností záznamů úloh se zdůrazněním funkčnosti zápisu jako pomocníka pro vlastní úvahy. Pro žáky byly tyto úlohy novým tématem, vedly je k badatelskému přístupu při hledání řešení.

Ukázka žákovských řešení úloh

P10 V1, úloha 2

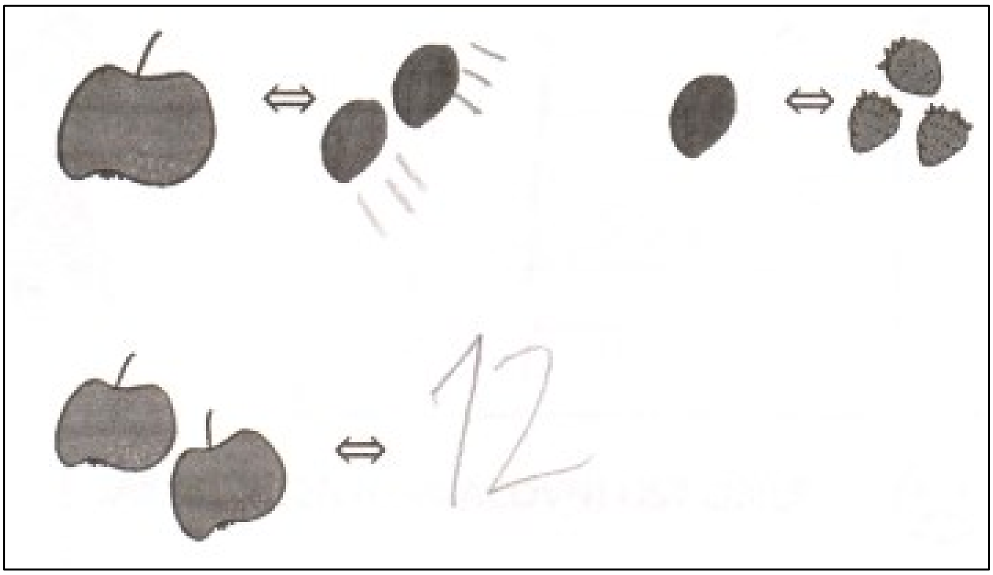
Žák řešil úlohu pomocí představ a zapsal pouze výsledek, číslo 12.

Jiné řešení.



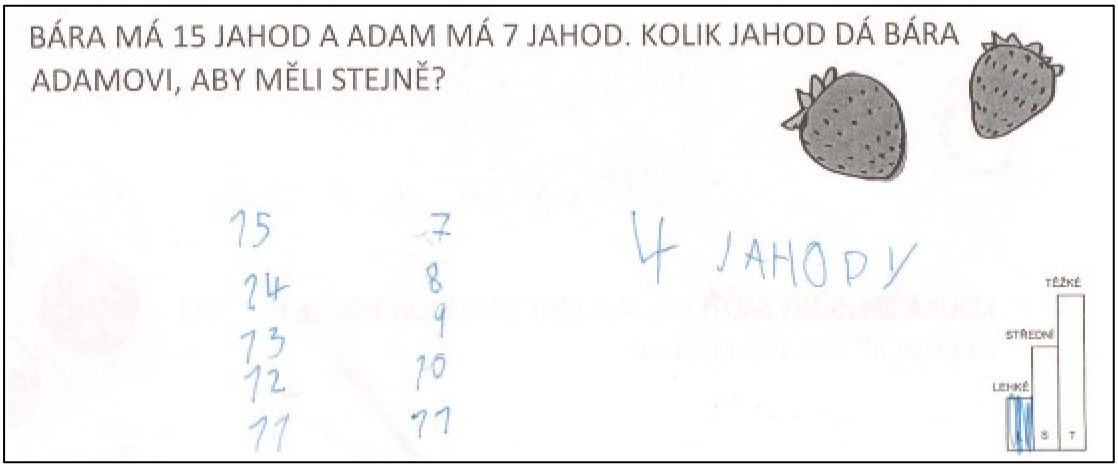
Žák využil grafického znázornění, ve kterém vidíme výměnu jablek za švestky a následně švestek za jahody. Celý proces zakreslil do jediného obrázku, kde může být interpretace sporná (dvě jablka nemají stejnou cenu jako čtyři švestky a dvanáct jahod dohromady). Výsledek nevyjádřil číslem.

Jiné řešení.



Z obrázku je patrná úvaha substituce (jedna švestka má stejnou cenu jako tři jahody), výsledek je zapsán číslem.

P10 V2, úloha 1



Ze záznamu řešení je patrná myšlenková úvaha, která demonstruje přesun jahod od Báry k Adamovi. Žák postupně jedno číslo zmenšuje a druhé zvětšuje, až dostane dvě stejná čísla.

11 Tělesa

Toto téma navazuje na téma Geometrické útvary (3) a dále je rozvíjí. Zásadním způsobem rozvíjí *prostorovou představivost* žáků i jejich *manipulativní (fyzické i mentální) činnosti.* Zkoumání tvaru a velikosti těles vede žáky k řešení úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací, k objevování *reprezentací těles v realitě:* předměty denní potřeby nebo z žákova okolí ve tvaru krychle, jehlanu, koule, válce aj. Téma seznamuje žáky s tříděním těles na oblé a hranaté, s dalšími mnohostěny, s popisem jejich vlastností určování počtu stěn, vrcholů a hran. Zpřesňování používané terminologie směřuje k rozlišení rovinných a prostorových útvarů, například čtverec (2D) jako stěna krychle (3D). Při kódování geometrické informace se využívá vizuální reprezentace těles, ale současně se dává informaci zvuková podoba příslušným názvem tělesa. Žák staví z kostek/krychlí, vytváří prostorové vzory podle 2D plánku, rozpoznává tělesa podle jejich 2D reprezentací. Nejprve z obrázku (fotografie, kresby ve volném rovnoběžném promítání), později za pomoci vhodných pomůcek získává žák první zkušenosti se sítěmi těles. Například se sítí krychle jako mnohoúhelníkem, který je sestaven ze šesti stěn krychle tak, že se z něj po vystřižení z papíru dá krychle sestavit.

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- rozliší rovinné útvary (2D) a tělesa (3D) s využíváním příslušné terminologie rovinné a prostorové geometrie,
- dovede vytvořit stavbu z krychlí podle fotografie nebo jejího zobrazení ve volném rovnoběžném promítání,
- seznámí se se sítěmi těles.

Ve videu se žáci setkávají s volným rovnoběžným zobrazením těles. Seznamují se s jednotlivými tělesy a tvary jejich stěn. Prvním tělesem, které je představeno, je krychle. Na ní jsou ilustrovány pojmy stěna, hrana, vrchol. Je zde poukázáno na souvislost čtverce jako rovinného útvaru a tělesa krychle. Stěnou krychle je čtverec. Krychli lze zobrazit v různých polohách. Nejčastěji se setkáváme se zobrazením ve volném rovnoběžném promítání. Stejně jako v první situaci ve videu bývá krychle zobrazována v pravém nadhledu. To je vhodný způsob zobrazení pro první seznámení se zobrazením krychle do roviny. Nevychází ale z intuitivního chápání žáků, ale ze zkušeností zobrazení krychle „ve světě dospělých“. Pokud by měli žáci sami načrtnout obraz krychle, dostáváme nejrůznější podoby. Jednou z nich může být vyobrazení krychle jako čtverce. I toto zobrazení je správné, ale z jiného úhlu pohledu. V takových situacích je nutné znát interpretaci autora či autorky náčrtku, zda se jedná o čtverec, nebo krychli. V další části videa je vyvozena síť krychle. Žáci poté rozhodují, který z nabízených mnohoúhelníků je sítí a který není sítí krychle. K řešení úlohy mohou využít vlastních pomůcek, různých stavebnic a jednotlivé nabídky prověřit. V úloze se žáci seznámí s pěti sítěmi krychle. Možné je navázat na video a vyhledat všech jedenáct sítí krychle. Dalším tělesem ve videu je kvádr a následuje ukázka sítě kvádru. Postupně se žáci seznamují se čtyřstěnem, jehlanem a jejich sítěmi. Provedena je klasifikace těles na oblá (válec, koule, kužel) a hranatá (krychle, kvádr, čtyřstěn, jehlan). V závěru je uvedena poznámka o Platonových tělesech (čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn).

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. V prvních úlohách pracovních listů žáci přiřazují názvy k obrázkům. Musí zde rozlišit, zda se jedná o rovinné útvary, nebo tělesa. Tělesa jsou zde vyobrazena ve volném rovnoběžném promítání. Druhé úlohy jsou zaměřeny na aktivní používání pojmů vrchol, stěna, hrana. Žáci zjišťují počty vrcholů, stěn a hran u vyobrazených těles, ze kterých by bylo možné vyvozovat další zákonitosti. Třetí, čtvrté a páté úlohy pracují s krychlovými stavbami. V třetích úlohách se žáci seznamují s principem kótovaného půdorysu. Staví stavbu podle plánku a vytvářejí fotografie ze stejného úhlu pohledu, jako je na předlohách. Zachycují tak jednu stavbu z různých stran, což vede žáky k citlivosti na rozlišení toho, zda je některá část stavby viditelná, či není. Ve čtvrtých úlohách mají dán plán stavby a rozhodují, která z vyfotografovaných staveb neodpovídá zadanému plánku. Při rozhodování mohou, ale nemusí využít manipulace s krychlemi a fotografiemi. V pátých úlohách žáci určují, z kolika krychlí je postavena stavba, která je na obrázku znázorněna ve volném rovnoběžném promítání. Zkušenosti z předchozích úkolů vedou žáky k úvahám o minimálním a maximálním počtu krychlí, ze kterých je stavba postavena. V šestých úlohách žáci doplňují věty tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. K tomu využívají pojmů z videa, pracovních listů i nabyté poznatky o tělesech a rovinných útvarech. Tato aktivita je náročná z pohledu ukotvení pojmů z rovinné a prostorové geometrie.

<u>Pomůcky</u>

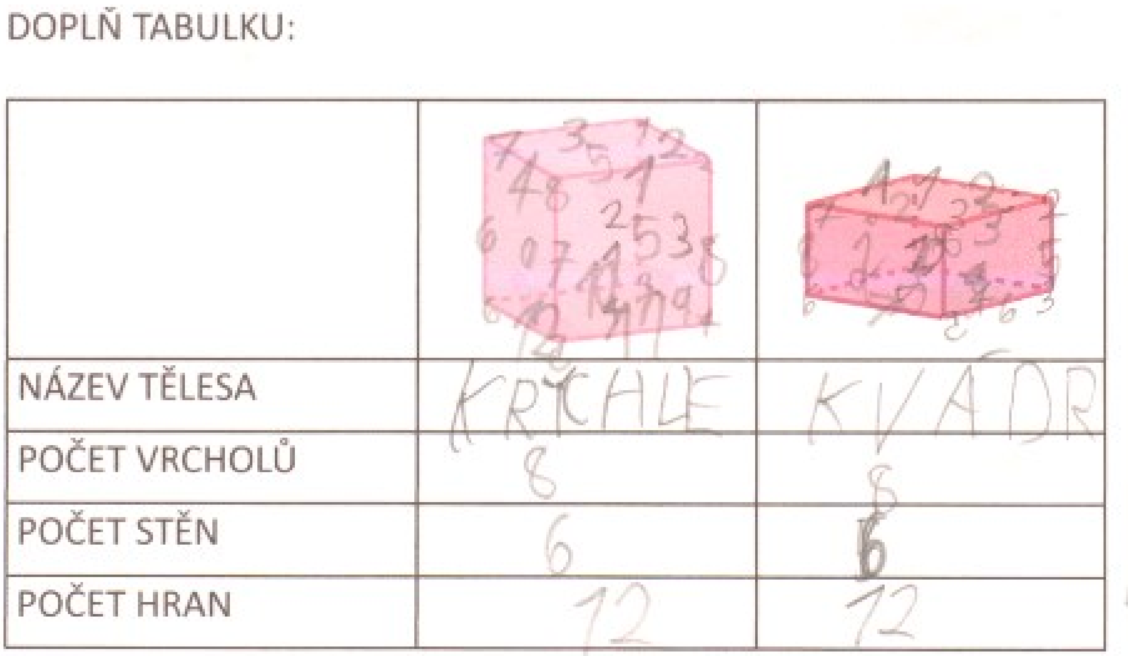
Příslušné rovinné útvary, modely těles. Krychle na krychlové stavby, tablet či jiné zařízení na fotografování.

<u>Zkušenosti z ověřování</u>

V prvních úlohách žáci často zaměňovali terminologii rovinné a prostorové geometrie. V některých případech bylo nutné nechat žáka řešení okomentovat, vysvětlit. Například když spojil slovo obdélník s obrázkem obdélníku i kvádru. Pokud žák používá dané slovo pro označení tělesa, jedná se o chybné řešení. Pokud ale uvažuje o obdélníku, jako stěně kvádru, jedná se o vynikající vhled do rozlišení roviny a prostoru, o použití terminologie. Náročnost druhých úloh se odvíjela od stupně zvládnutí terminologie a od možnosti využít reálná tělesa pro zjišťování údajů. Řešení pouze s pomocí zobrazených těles ve volném rovnoběžném promítání bylo pro žáky obtížné. Nejčastější problémy měli žáci s porozuměním pojmu vrchol, hrana. Někdy považovali za vrchol jediný vrchol daného tělesa, a to buď v případě, že ho chápali například u krychle jako jedinečné pojmenování daného vrcholu, nebo ho u jehlanu vnímali jako jediný hlavní vrchol. Porozumění principu zobrazení krychlových staveb pomocí kótovaného půdorysu nečinilo žákům obtíže. Fotografování je nadchlo, neměli problém najít hledaný pohled na stavbu. Žáci volili různé strategie řešení čtvrtých úloh, různou míru abstrakce. Někteří si stavby vymodelovali a jednotlivé fotografie prověřovali pomocí pořízení fotografie. Některým žákům stačilo postavit stavbu a poté si danou stavbu představili z požadovaných úhlů pohledu. Zajímavé zde bylo, zda žáci otáčeli stavbou, nebo stavbu obcházeli. Někteří žáci dokázali úlohu vyřešit bez použití názoru pouze na základě předloženého plánku stavby a nabízených fotografií. V pátých úlohách se opět vyskytla různorodost v řešení díky různé míře konkrétnosti řešení. Někteří žáci si stavby stavěli, někteří řešili úlohy v představách. Vzhledem k tomu, že byl zadán i půdorys stavby, měly úlohy jedno řešení. Jiná situace by ve V2 a V3 nastala, kdyby plánek nebyl zadán. Stavby by mohly být postaveny z více krychlí. Šesté úlohy byly pro žáky nejnáročnější. Docházelo k záměnám pojmů hrana, stěna (čtyřboký jehlan má 5 hran), jehlan, čtyřstěn a trojúhelník. Vyskytovalo se nepochopení pojmů (trojúhelník má jednu stranu). Docházelo k nesprávné analogii (kvádr má šest stěn a obdélník má šest stran). Pokud měli žáci zkušenosti s prací s rovinnými útvary a tělesy, byli v daných úlohách úspěšnější.

<u>Ukázka žákovských řešení úloh</u>

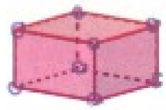
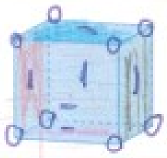
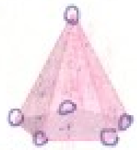
P11 V1, úloha 2



DOPLŇ TABULKU:

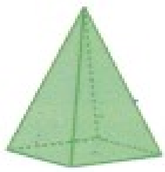
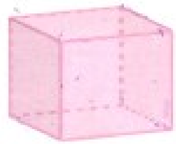
NÁZEV TĚLESA	KRYCHLE	KVÁDR
POČET VRCHOLŮ	8	8
POČET STĚN	6	6
POČET HRAN	12	12

Z obrázku vidíme, že žák správně pojmenoval tělesa. Při určování počtu vrcholů, stěn a hran si pomáhal označením objektů čísly. Je překvapující, že se v obrázku orientoval a úlohu řešil správně. Postupy jsou jedinečné, srozumitelné právě jen pro daného žáka.

				
NÁZEV TĚLESA	KVÁDR	JEHLAN 3 BOKÝ	KVÁDR	6 BOKÝ JEHLAN
POČET VRCHOLŮ	8	4	8	6
POČET STĚN	6	3	6	6
POČET HRAN	9	4	8	6

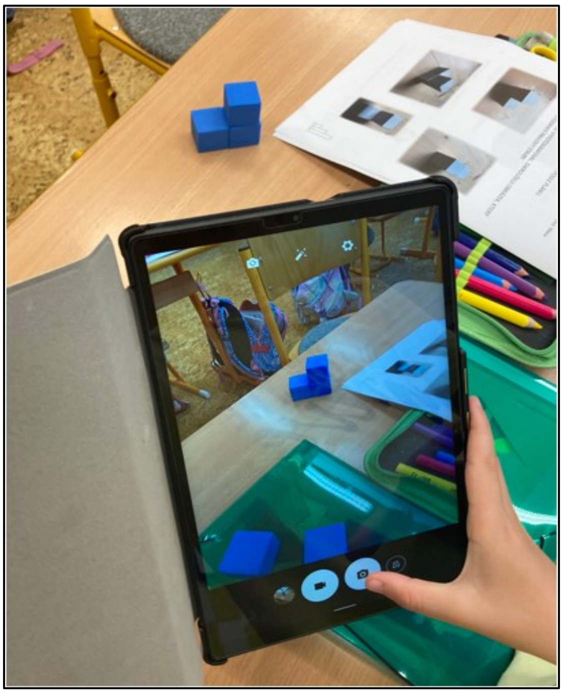
V tabulce vidíme, že názvy některých těles nejsou správné. Žák krychli zaměnil za kvádr a u jehlanu vpravo pětiboký jehlan považoval za šestiboký. Čtyřstěn označil za trojboký jehlan, což odpovídá realitě. Žák si označoval vrcholy pomocí teček, kroužků. Jejich počet určil správně. Stěny čtyřstěnu a krychle vybarvoval různými barvami.

P11 V2, úloha 2

		
NÁZEV TĚLESA	JEHLAN K	KRYCHLE
POČET VRCHOLŮ	1	8
POČET STĚN	5	6
POČET HRAN	8	12

Někteří žáci měli problémy s vrcholy mnohostěnů. V uvedeném řešení žák považoval hlavní vrchol jehlanu za jeho jediný vrchol.

P11 V1, úloha 3



Úlohy zaměřené na práci s tabletem byly součástí všech tří úrovní obtížnosti (V1, V2, V3). Žáci dokázali vytvořit stavbu na základě předložené fotografie, která využívala volného rovnoběžného promítání. Zároveň s úspěchem vytvářeli fotografie své stavby, dokázali nalézt správný pohled na danou stavbu. Při řešení úloh tohoto typu pracovali nejen s nárysem, půdorysem a bokorysem staveb, ale hledali i další pohledy.

P11 V1, úloha 6

DOPLŇ VĚTY:

KRYCHLE MÁ 8 VRCHOLŮ.

TROJÚHELNÍK MÁ 3 STRANY.

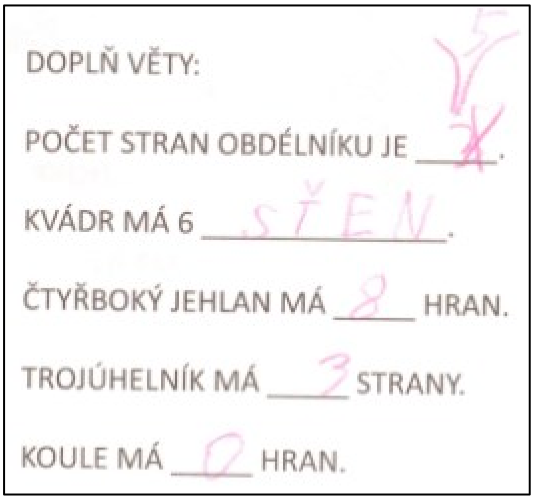
ČTVEREC MÁ ČTYŘI VRCHoLI A SRANI.

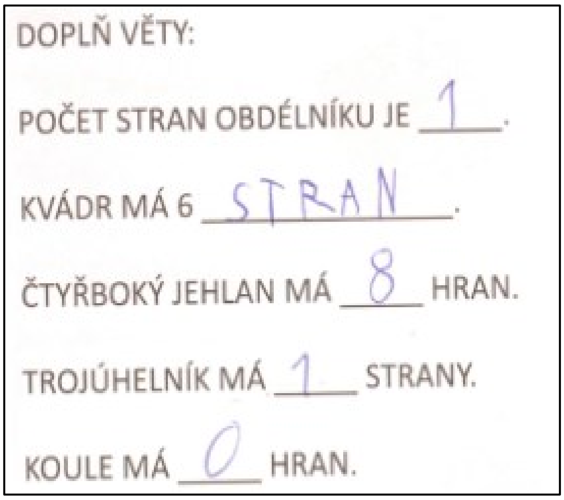
KVÁDR MÁ 6 STĚN.

OBDÉLNÍK MÁ 4 STRANY.

Řešení, ve kterém žák doplnil správně nejen počty vrcholů, stran a stěn, ale zároveň dobře popsal vlastnosti čtverce.

P11 V2, úloha 6





V úlohách, kde žáci doplňovali věty, je zřejmé, že žáci nemají dobře ukotvenu terminologii, mnohdy zaměňují prostorové a rovinné útvary. Zaměňují pojmy stěna, strana. Nejsou si jistí v určení počtu stran obdélníku a trojúhelníku.

12 Zlomky

Téma obohacuje znalosti žáků o číslech. Rozšiřuje jejich představu přirozeného čísla (jako počtu prvků) o *pojem zlomku*, který je matematicky vyjádřen jako „reprezentant racionálního čísla". Úlohy o zlomcích jsou známy ze starého Egypta, ze starořecké i arabské matematiky. Při vytváření intuitivní představy *zlomku jako části celku* využívají žáci zkušenosti z běžného života při každém rozdělování celku na stejné části, při manipulativních činnostech doprovázejících představu dělení. Celek se přitom obvykle znázorňuje vhodnými geometrickými útvary: kruh (v dětské zkušenosti reprezentovaný pizzou, dortem, koláčem), obdélník nebo jiný *n*-úhelník (tabulka čokolády), úsečka (špejle, tyč, proužek papíru), může však být vyjádřen i prvky navzájem oddělitelnými (sáček kuliček, bonboniéra, krabička sýrů). Představa zlomku jako části celku je spojována s procesem, kterým zlomek vznikal: manipulativní činností, kterou lze ve výuce provádět nebo imitovat: krájení pizzy, překládání proužku papíru, lámání čokolády, rozdělování kuliček. Žáci si osvojují příslušnou terminologii a její význam: *jmenovatel* jako číslo vyjadřující na kolik stejných částí jsme celek rozdělili, *čitatel* vyjadřující kolik ze vzniklých částí uvažujeme (tři části ze šesti). V tématu pracujeme pouze s tzv. pravými zlomky (jejich čitatel je menší než jmenovatel), které vyjadřují číslo větší než 0 a menší než 1.

<u>Očekávané výstupy RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ jsou k danému tématu formulovány takto: žák

- modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku,
- porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- si vytváří představu zlomku jako části celku na zkušenostech s dělením celku na stejné části,
- využívá různých modelů vztahu „celek a jeho část" k pochopení a porozumění pojmu zlomek,
- intuitivně se seznamuje s představou porovnávání a sčítání zlomků se stejným jmenovatelem na názorných situacích ze života,
- zapíše zlomek, seznámí se s termíny jmenovatel, čitatel, zlomková čára.

Na příběhu dělení pizzy se žáci seznamují se zlomkem ve významu části celku. Pizza je zde rozdělena na čtyři stejné díly, kdy každý díl je jednou čtvrtinou celé pizzy. Žákům je zároveň představen zápis zlomku. Na konkrétním ilustrovaném příkladu se seznamují s významem jednotlivých čísel (jmenovatel, čitatel) a s významem zlomkové čáry. Zlomky byly používány již v dávné historii. Například se zlomky, kde je v čitateli číslo jedna pracovali velmi často i staří Egypťané při měření a následném dělení pole na části. Zapisovali je zvláštním způsobem pomocí obrázků. Obrázek používali i pro zapsání zlomku jedna desetina. V čitateli zlomku se často vyskytuje číslo 1. Mohou zde být i jiná čísla, například 3 nebo 2. Tyto situace žáci znají z běžného života (určování času: tři čtvrtě hodiny – $\frac{3}{4}$; vyjádření části hokejového utkání: dvě třetiny – $\frac{2}{3}$). S ukázkou zlomků tohoto typu se žáci seznamují v další části videa, kdy je tentokrát pizza rozdělena na osm stejných částí. Žáci zde nejen přiřazují části pizzy jednotlivým postavám, ale zároveň provádí i „sčítání“ částí pizzy a zároveň intuitivně vnímají sčítání zlomků (osm částí tvoří osm osmin celku, což je celá pizza). Stejně jako ve videu je i na tomto místě nutné podotknout, že modelování zlomků na příkladu pizzy bývá zpravidla žákům blízké, srozumitelné. Toto modelování však sebou nese také nepřesnosti spojené s reálnými modely objektů z abstraktního světa matematiky. V běžném životě nemáme potřebu pizzu úplně přesně rozdělovat. Ostatně to by bylo téměř nemožné. Při práci se zlomky pracujeme s ideálními částmi – objekty jsou rozděleny naprosto přesně. Nelze tak například mluvit o větší nebo menší polovině.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. V prvních úlohách žáci vybarvují jednu čtvrtinu obrázku. Obtížnost úloh v jednotlivých variantách je dána rozdělením obrazce na různý počet dílků, kdy si žáci musí uvědomit, zda se jedná o stejné dílky a musí zároveň vědět, že vybarvením čtyř libovolných dílků nezískáme čtvrtinu útvaru. Druhé úlohy mají manipulativní charakter, kdy žáci překládáním papíru rozdělují útvary (čtverec, obdélník, kruh, trojúhelník) na čtyři shodné části. Výsledky své práce zakreslují do předkreslených útvarů v pracovních listech. V třetí a čtvrté úloze ve V1 žáci určují zlomek z daného čísla pomocí vybarvování kuliček. Vždy je znázorněno tolik kuliček, kolik odpovídá celku. V dalších slovních úlohách jde o určení celku, když je znám zlomek nebo výpočet části celku. Počítání se zlomky žáci využívají i v aplikačních úlohách, například zvýšení ceny o jednu třetinu. Sedmé a osmé úlohy se zaměřují na vyjádření vybarvené a nevybarvené části pomocí zlomku. Sada závěrečných úloh je založena na manipulaci se čtverečky daných vzorů. Úkolem žáků je vytvořit vlastní vzory na základě zadaných podmínek, což vede žáky ke kreativitě. Možné je i další, bohatší použití přiložených dílků. Vhodné by bylo navázat tvořením vzorů podle vlastních námětů nebo hledáním různých pravidel v těchto vzorech (aritmetických i geometrických).

Pomůcky

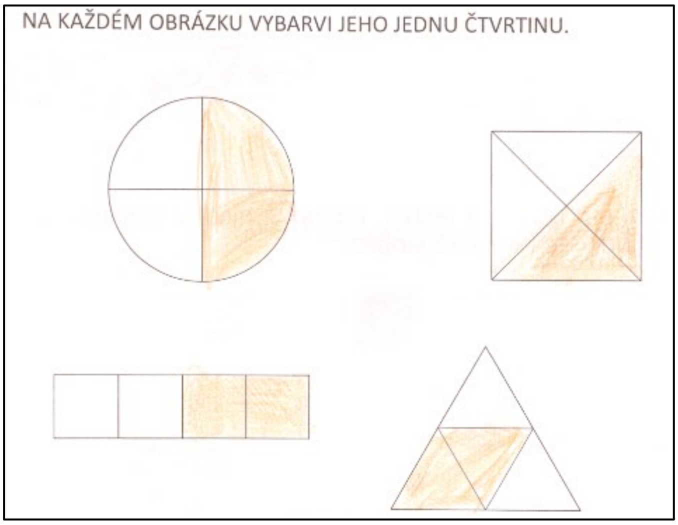
Zlomkovnice (kruhová, obdélníková, čtvercová, trojúhelníková, …). Geometrické tvary na překládání. Konkrétní předměty pro modelování slovních úloh.

Zkušenosti z ověřování

První úlohy žáci zvládli vesměs bez problémů. Dokázali vybarvit čtvrtinu z celku. V druhých úlohách se vyskytly problémy v oblasti jemné motoriky s překládáním papíru. Nejobtížnější se ukázalo rozdělení trojúhelníku na čtyři shodné části (varianta V3). V případě čtverce se v žákovských řešeních nejčastěji vyskytlo dělení pomocí úhlopříček a středních příček. Obdobnou strategii žáci často volili i v případě obdélníku, kde ale jeho rozdělením pomocí úhlopříček čtyři shodné části nevznikají. Každý žák zvládl zakreslit alespoň jedno řešení, někteří žáci zvládli nakreslit řešení pro všechny předkreslené útvary. Při řešení slovních úloh ve V1, vybarvování korálků, se žáci často dopouštěli chyby. Tam, kde měli vybarvit jednu čtvrtinu (což byly 3 korálky), vybarvili 4 korálky. Obdobná situace nastala v případě jedné třetiny, kdy vybarvili tři korálky, a v dalších slovních úlohách obsažených ve V2 a V3. Z řešení sedmých a osmých úloh bylo patrné, že zápis zlomků je pro žáky obtížný. Většinou zapisovali počet vybarvených a nevybarvených částí. Poslední sady úloh zaměřené na manipulaci byly pro žáky atraktivní. To s sebou neslo velké zaujetí, ale i značnou časovou zátěž. Bylo by proto vhodné zařadit úlohy samostatně.

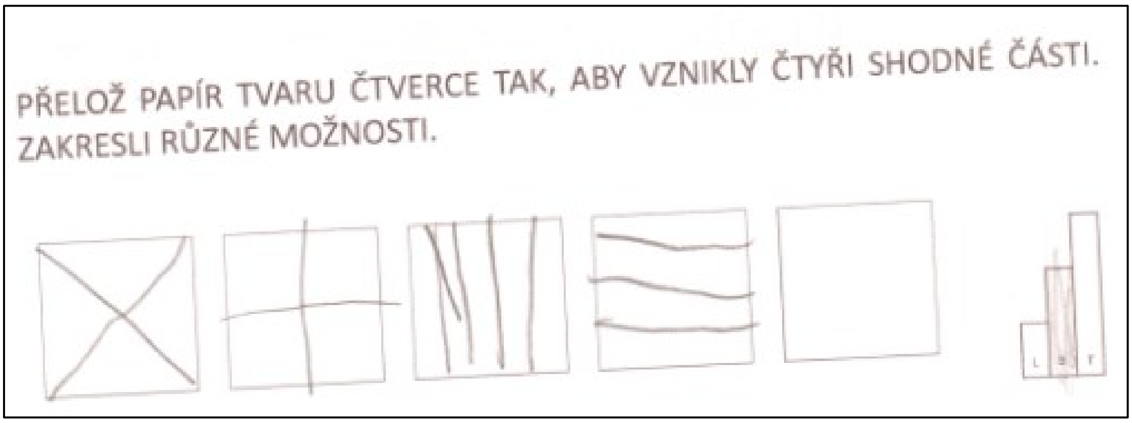
Ukázka žákovských řešení úloh

P12 V1

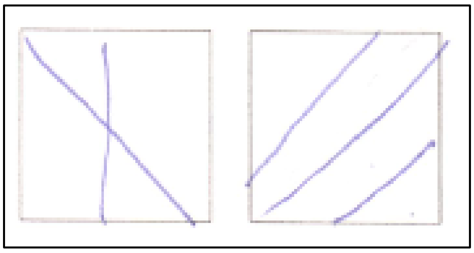


Žák neporozuměl pojmu jedna čtvrtina. Všude vybarvoval jednu polovinu.

P12 V1, úloha 2

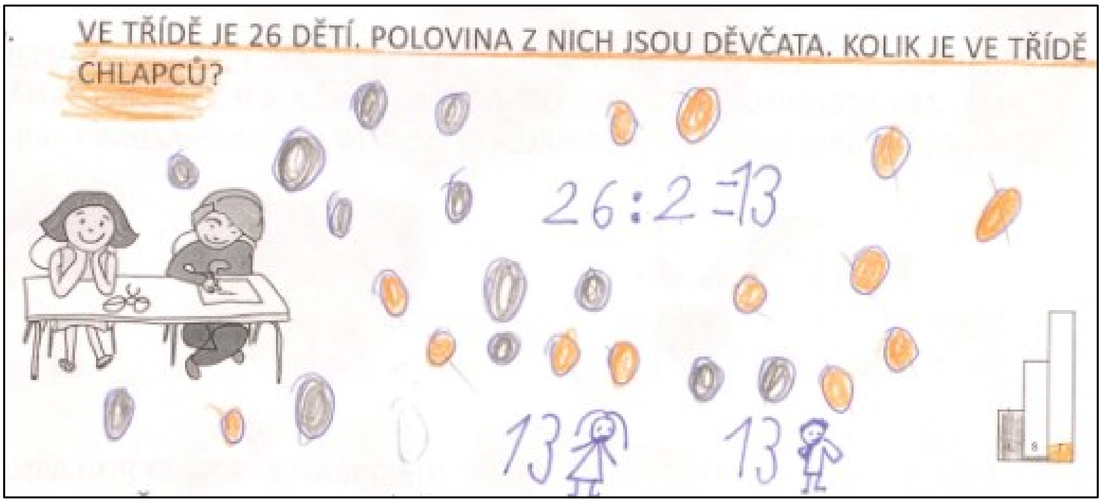


Žák uvedl čtyři možná rozdělení čtverce na čtyři shodné části. Nepřesnosti patrně vznikly využitím náčrtku.



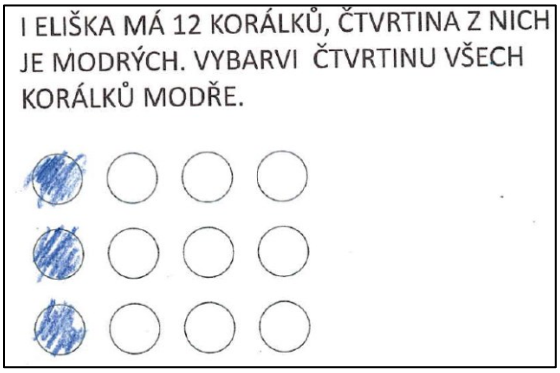
V několika případech se objevila obvyklá chyba, kdy žák rozdělí čtverec na čtyři části, ty ale nejsou shodné.

P12 V1, úloha 6

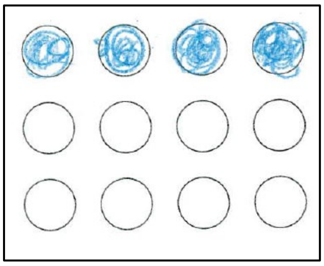


Žákyně řešila úlohu pomocí grafického náčrtku jednotlivých aktérů slovní úlohy i výpočtem.

P12 V1, úloha 5



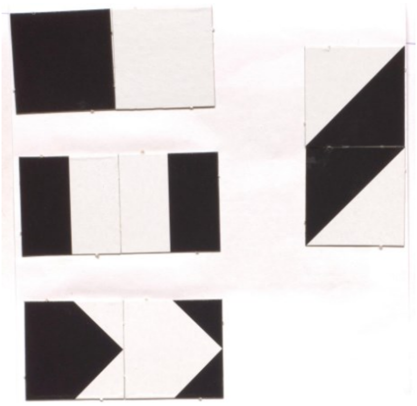
Žák řešil úlohu správně. Pro znázornění jedné čtvrtiny si mohou žáci zvolit libovolné tři kuličky. V našem případě žák vychází z uspořádání kuliček do tří řad, čtyř sloupců a vybarvuje jeden sloupec.



Žák zaměnil jednu čtvrtinu s pojmem čtyři, proto vybarvil čtyři kuličky. Řešení je chybné.

P12 V1, úloha 9

PŘIPRAV SI ČTVERCOVÉ DÍLKY A DVA Z NICH VYBER. PŘILOŽ JE K SOBĚ TAK, ABY POLOVINA VZNIKLÉHO OBRÁZKU BYLA BÍLÁ A POLOVINA ČERNÁ. NAJDEŠ RŮZNÉ MOŽNOSTI? VZNIKLÉ OBRÁZKY NALEP NA PRÁZDNÝ PAPÍR.



Žáci většinou vybírali ty dílky, ve kterých jsou stejné tvary, ale opačných barev. Nevyskytovala se zde řešení, ve kterých by žáci kombinovali dva dílky, kde části nemají stejný tvar.

P12 V1, úloha 10

Z LIBOVOLNÝCH DÍLKŮ Z PŘÍKLADU 9 VYTVOŘ OBRÁZEK TAK, ABY POLOVINA VZNIKLÉHO OBRÁZKU BYLA BÍLÁ A POLOVINA ČERNÁ. VZNIKLÝ OBRÁZEK NALEP NA PRÁZDNÝ PAPÍR.

Žáci využili zkušenosti z předcházející úlohy, často vytvářeli osově souměrné útvary.

13 Kombinatorika

Kombinatorika má značné uplatnění ve školské matematice na 1. stupni ZŠ bez používání speciálních pojmů (permutace, variace, kombinace) a příslušných vzorců. Kombinatorické úlohy přesahují obvyklý rámec numerického počítání, jsou vítaným zpestřením výuky, od žáků vyžadují mentální schopnosti, přemýšlení, vhled, postřeh. Lze je najít a řešit v různých kontextech, kde se jedná o uspořádání prvků matematických (například různá víceciferná čísla tvořená ze stejných číslic) i z reálného života. Poskytují příležitost k myšlenkovému experimentování, řešení vyžaduje systematičnost, přehledný záznam řešení. Mají velký motivační potenciál, jsou typickým nástrojem pro identifikaci přemýšlivých, nadaných žáků. Často se uplatňují v matematických soutěžích.

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- rozvíjí své kombinatorické a logické myšlení prostřednictvím řešení úloh, ve kterých identifikuje:
  - skupiny prvků se společnou vlastností (uspořádané, neuspořádané),
  - skupiny prvků, které se opakují podle určité vlastnosti a pravidelnosti.

Ve videu se žáci stanou součástí vesmírné olympiády. V úvodním závodě modré a žluté rakety jde o rozlišení dvou možných uspořádání dvojice prvků. V této situaci záleží na uspořádání prvků, na jejich pořadí. V následující úloze žáci vytváří různé varianty uspořádání barev na vlajkách. Jsou dány tři barvy a vlajky mají tři pruhy. Úkolem je najít všech šest možností vybarvení vlajek. Žáci si volí vlastní strategii hledání různých řešení, která jim může pomoci v argumentaci při ověření, že našli všechna možná řešení. Řešení následující úlohy, kdy žáci hledají všechny možné varianty umístění tří reprezentantů na stupních vítězů, vede žáky k objevení analogie z předchozí úlohy. Při zjišťování počtu zápasů v soutěži hodu talířem by si žáci měli uvědomit, že jde o dvojice, kde nezáleží na pořadí prvků. Když hraje modrá s červeným, jedná se o tentýž zápas, jako když hraje červený s modrou. Všech kombinací je šest. Při řešení úlohy je žákům ponechána volnost pro vlastní způsob znázornění situace. Ve videu se žáci setkávají s jednou z mnoha možností. Při poslední úloze vystupují opět stejné postavy jako při házení talířem. Zde však nelze uplatnit analogii z předchozího řešení, protože musíme rozlišit situaci, kdy modrá pošle fotografii červenému a červený pošle fotografii modré. Jedná se o uspořádané dvojice, dvě různé situace.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. Ve variantě V1 jsou první dvě úlohy analogické k úlohám ve videu. Stejný je i počet účastníků, pouze se mimozemské bytosti změnily v děti. V úloze o dárcích můžeme vidět úlohu s tematikou posílání fotografií, přiťuknutí na oslavě je paralelou k soutěži házení talířem. Důležité je zde ověření, zda žák situacím porozuměl, zda je dokáže zakreslit. Třetí úloha byla analogií k úloze o vybarvování vlajek. Ve čtvrté úloze žáci vytvářeli dvojice ze dvou skupin objektů (chlapci, děvčata). V páté úloze se jedná o hledání neuspořádaných dvojic, kdy cesta z K do L je tatáž jako cesta z L do K. Cest je celkem deset. V první úloze varianty V2 se jedná o vytváření trojic, ze tří prvků. Úloha je analogická k úloze z videa, kdy se soutěžící umisťují na stupně vítězů. V druhé úloze se jedná o uspořádané dvojice. Liší se čísla 37 a 73. Žáci vytváří uspořádané dvojice ze čtyř číslic, kdy se číslice v zápisu čísla mohou opakovat. Zapisují tedy i čísla 11, 33, 55 a 77. Je celkem šestnáct řešení. Třetí úloha je propojena s českým jazykem. Je zde intuitivně zaveden termín samohláska, souhláska, slabika. Žáci vytvářejí slabiky, kdy na první pozici je souhláska. Jedná se o uspořádané dvojice. Ve čtvrté úloze žáci hledají uspořádání čtyř korálků dvou barev při navlékání. Řešení mohou žáci řešit kreslením, manipulací s korálky. V páté úloze vytváří různé možnosti volby oběda z nabídky tří složek (polévka, hlavní jídlo, nápoj), kdy každý oběd je složen vždy ze všech tří složek. V šesté úloze jde o výběr trojic z pěti prvků. Výběrem trojice je jednoznačně určena i dvojice (pokud vybereme trojici dětí do jednoho stanu, je tím dána i dvojice do druhého stanu). Úloha je náročná na představivost a na způsob zakreslení různých situací. V třetí variantě pracovního listu je jako první zařazena analogická úloha k vybarvování vlajek z videa (věže Matýnky). Úloha je dále rozšířena o stavby Toníka, který pracuje se čtyřmi prvky (kostkami). V druhé úloze vybírají dvojice z pěti prvků. Záleží na postoji žáků, zda rozlišují pořadí kopečků zmrzlin v kornoutku. V takovém případě bude dvojnásobný počet řešení. V třetí úloze žáci přiřazují k mikině kalhoty. Jedná se o vytváření uspořádaných dvojic, kdy jednotlivé části oděvu nelze zaměnit. Nabízí se zde řešení s využitím předkreslených kusů oblečení. Žáci mohou jednotlivé části oblečení k sobě přiřadit tím, že je vybarví stejnou pastelkou, řeší tak úlohu graficky pomocí zadaného obrázku. Ve čtvrté úloze vytváří uspořádané dvojice (první sčítanec je menší než druhý, menšenec je větší než menšitel) ze čtyř prvků. Pátá úloha je analogií úlohy z videa týkající se počtu zápasů při házení talířem. Rozdíl je v počtu hráčů. Šestá úloha se týká počtu cest ve čtvercové síti z bodu *A* do bodu *B*.

<u>Pomůcky</u>

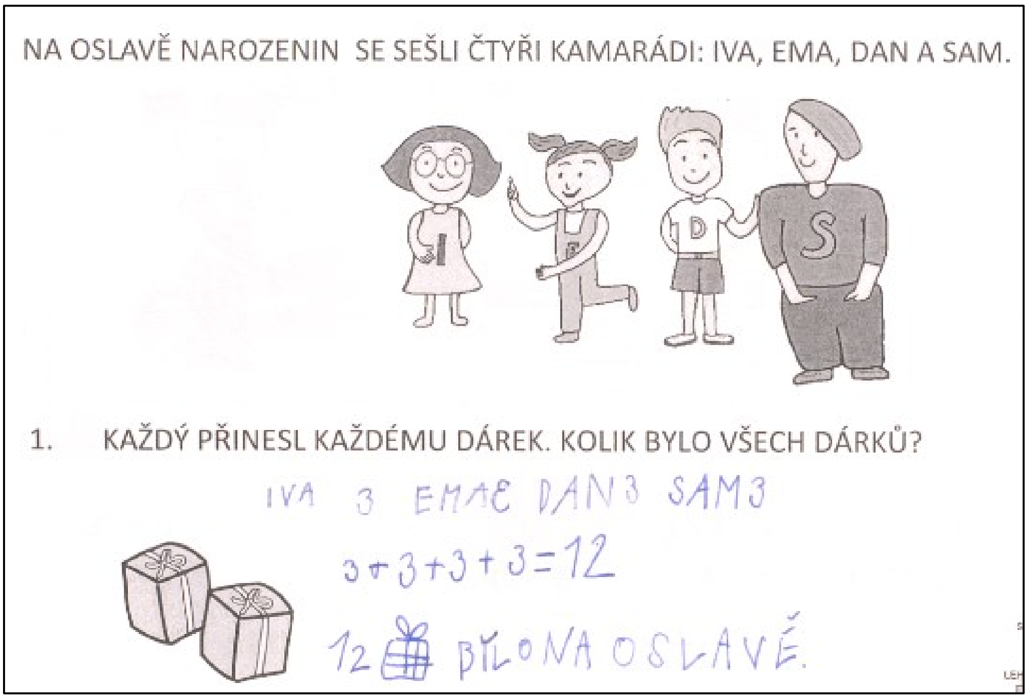
Konkrétní předměty, pastelky.

<u>Zkušenosti z ověřování</u>

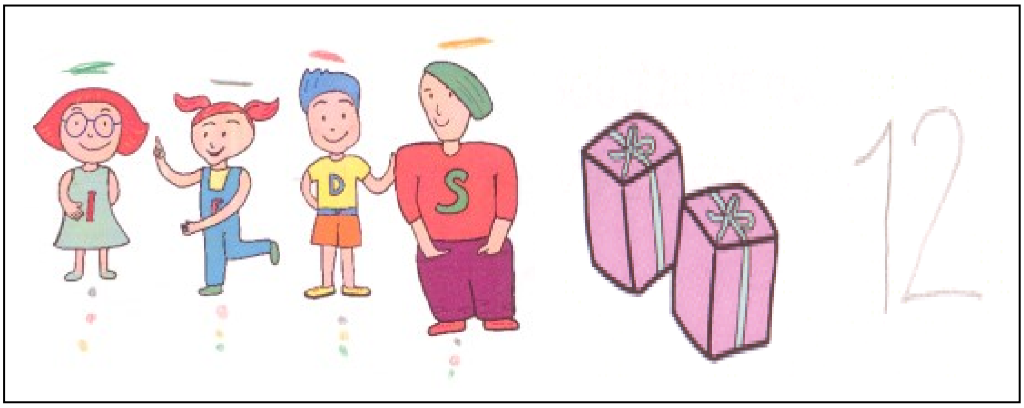
Většinou žáci řešili úlohy graficky s různou mírou abstrakce. Velmi často používali pastelky pro rozlišení různých možností řešení. Některé chyby vznikly tím, že si žáci nepřečetli zadání s porozuměním. Nedodrželi tak podmínky úlohy. V úloze s vybarvováním triček někteří žáci viděli na tričku čtyři pruhy, a řešili tak zcela jinou úlohu. Nutné je zde pracovat s textem, kde je zadáno, že trička mají tři pruhy. Pro některé žáky bylo obtížné najít všechny možnosti. V druhé úloze měli žáci problém s porozuměním vyjádření „každý s každým“. V páté úloze V1 nerespektovali, že mezi dvěma vesnicemi vede pouze jedna cesta. V druhé úloze V2 žáci uvedli pouze některá řešení. Ze záznamu nebyl patrný žádný systém, žáci čísla zapisovali náhodně. V třetí úloze hrála roli jazyková gramotnost (dodržení podmínek úlohy – rozlišení pořadí souhlásky a samohlásky). Někteří žáci přetvořili zadání a ze slabik vytvářeli slova (mapa, Pepa, samo). Ve čtvrté úloze se žákům nepodařilo najít všechna řešení. Někteří si zadání upravili a pracovali se dvěma nebo třemi korálky. V páté a šesté úloze bylo nad síly žáků najít všechna řešení. Je patrné, že hledání systému v řešení i jeho záznam není pro žáky vůbec snadné. Vzhledem k náročnosti úloh, věku i zkušenostem žáků s řešením nestandardních úloh je tato situace zcela očekávaná. V první úloze pracovního listu V3 je nutné se žáky sjednotit terminologii– co se rozumí stavbou, kterou nazýváme věží? Vzhledem k bohaté zkušenosti některých žáků se stavěním staveb z krychlí je možné, že uplatní svoji kreativitu a vytvoří zcela jiné stavby. Úloha by se tak stala neuchopitelná. V druhé úloze při skládání kopečků zmrzlin žáci uváděli pouze částečná řešení. Třetí úlohu někteří žáci řešili pomocí spojování předkreslených kusů oblečení. Ve čtvrté úloze uváděli žáci částečná řešení. Jednoho žáka překvapilo, že je stejný počet příkladů na sčítání i odčítání. Pátou úlohu až na jednoho žáka nevyřešil nikdo správně. V šesté úloze šlo opět o částečná řešení. Někteří žáci volili i cestu jako úhlopříčku čtverce.

<u>Ukázka žákovských řešení úloh</u>

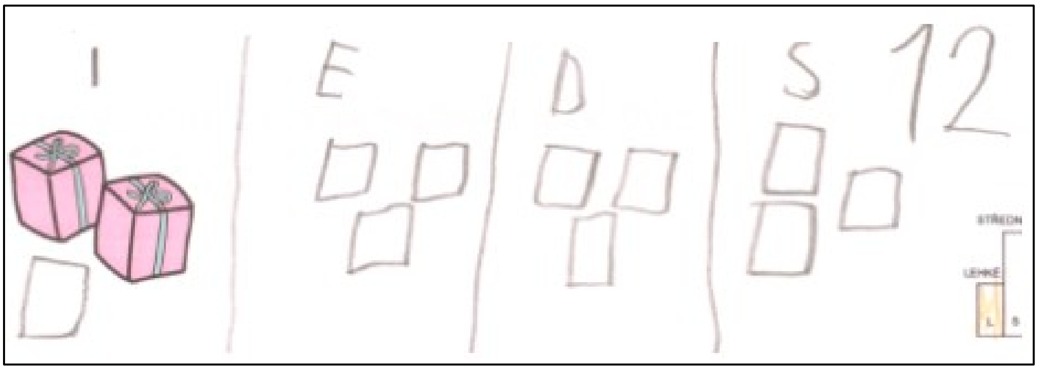
P13 V1, úloha 1



Žák si zapsal jména dětí a k nim připsal počty dárku, který každý z nich daruje. Výsledek dostal jako součet těchto čísel. Řešení zakončil formulací odpovědi s využitím obrázku.



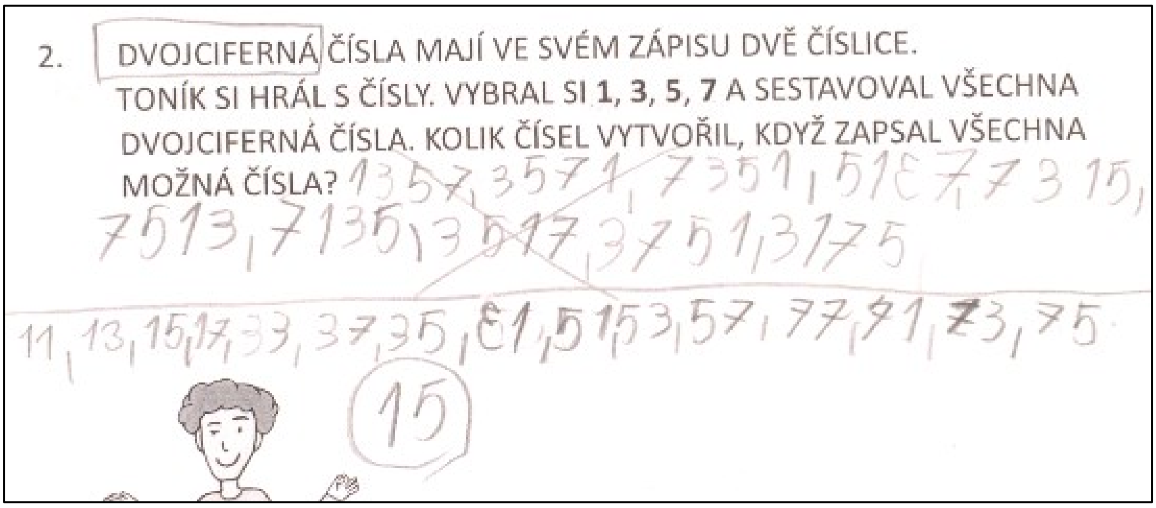
Řešení je založeno na grafickém znázornění s využitím pastelek, kdy každé dítě je označeno jinou barvou (čárka nad hlavou) a pod každým z dětí udělal tolik teček, kolik dává dárku. Přitom ale žák barvou odlišil, pro koho je dárek určen. Výsledek zapsal číslem vedle zakreslených dárků.



U dalšího žáka můžeme vidět obdobný myšlenkový postup. Grafické zpracování je ale jiné. Děti jsou zde zastoupeny počátečními písmeny svých jmen, dárky jsou zde znázorněny pouze náčrtkem bez nároku na identifikaci, komu je dárek určen. Pro své řešení žák využil i ilustračního obrázku k úloze.

Vidíme další možný obvyklý způsob grafického znázornění pomocí čar. Nevýhodou takového znázornění je menší přehlednost, zvlášť při větším počtu osob. To je patrné i z našeho obrázku. Obrázky dárků jsou spíše ilustrativní.

P13 V2, úloha 2



V záznamu žákovského řešení lze odhalit dvě strategie řešení. V prvním případě žák postupoval při výběru čísel náhodně. V druhém případě je patrný systém. Žák vynechal pouze číslo 55.

14 Osová souměrnost

Osová souměrnost v rovině je jednou ze souměrností, kterou lze vnímat a vyvozovat na reálných objektech, je to pojem matematický stejně jako estetický. V přírodě vnímá dítě symetrii například na listech stromů, na okvětních lístcích květů, na křídlech motýlů a tělech dalších živočichů, souměrnost předmětů podle svislé roviny je spojena s udržováním rovnováhy při pohybu. Souměrnost lze vidět na obrázcích staveb v architektuře. Osovou souměrnost (souměrnost podle osy) lze bez definování pojmů ilustrovat různými způsoby: vyhledávat na vystřižených obrázcích pomocí přeložení, doplňovat (dokreslovat) na rovinné útvary souměrné podle osy – dokreslit chybějící část obrázku ve čtvercové síti. Žáci dokreslují osy souměrnosti do rovinných útvarů, určují počet os souměrnosti jednotlivých rovinných útvarů.

<u>Očekávané výstupy RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ jsou k danému tématu formulovány takto: žák

- rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině,
- rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- vyhledá osy souměrnosti na obrázcích pomocí přeložení,
- určí počet os souměrnosti čtverce, obdélníka, trojúhelníka, kruhu.

K tématu není zpracováno video. Téma se opírá o vlastní manipulativní činnosti žáků, zakreslování osově souměrných útvarů do čtvercové sítě, hledání os souměrností útvarů, hledání osově souměrných útvarů v realitě apod. Při práci na pracovních listech jsou žáci nejprve vyzváni k vyznačení os souměrnosti do obrázku. Pro připomenutí je vždy u jednoho obrázku osa vyznačena. V první variantě obtížnosti žáci pracují pouze se svislou osou. V druhé variantě se přidává vodorovná osa a ve variantě V3 je osa v šikmé poloze. Ve V2 a V3 se již v první úloze vyskytuje obrázek, který měl více os souměrnosti. V úlohách se projevuje, jak žáci vnímají souměrnosti nakreslených obrázků. V druhých úlohách žáci mají zakroužkovat obrázky, které jsou osově souměrné. Musí zde pracovat s různými směry os souměrnosti, zvažovat, zda je celý obrázek osově souměrný (včetně všech detailů), prověřují obrázky z pohledu počtu os souměrnosti. V každé variantě se vyskytuje obrázek, který není souměrný. V třetích úlohách žáci dokreslují osově souměrný obrázek do čtvercové sítě. Jsou zde rozlišeny různé typy čar, které žák dokresluje. Rovné čáry vodorovné, svislé, šikmé a křivky (čára sítě, úhlopříčka ve čtverci, oblouk). Úloha prověřuje žákovu orientaci v síti, ale i jemnou motoriku. V následujících úlohách vyznačují žáci osy souměrnosti různých geometrických útvarů (obdélník, čtverec, různé typy trojúhelníků, pětiúhelník, šestiúhelník, kruh a další). Při řešení této úlohy mohou žáci využít překládání papíru. V další úloze žáci opět pracují ve čtvercové síti. Je zde zakreslena část obrazce, kde není vyznačena osa. Žáci mají dokreslit druhou část osově souměrného obrázku. Někteří žáci vnímali osu souměrnosti jako přímku sítě, jiní ji vnímali jako svislou přímku, která prochází středy stran čtverců. Poslední úloha vedla žáky k vytvoření vlastních obrázků tak, aby jeden byl osově souměrný a druhý nebyl.

Pomůcky

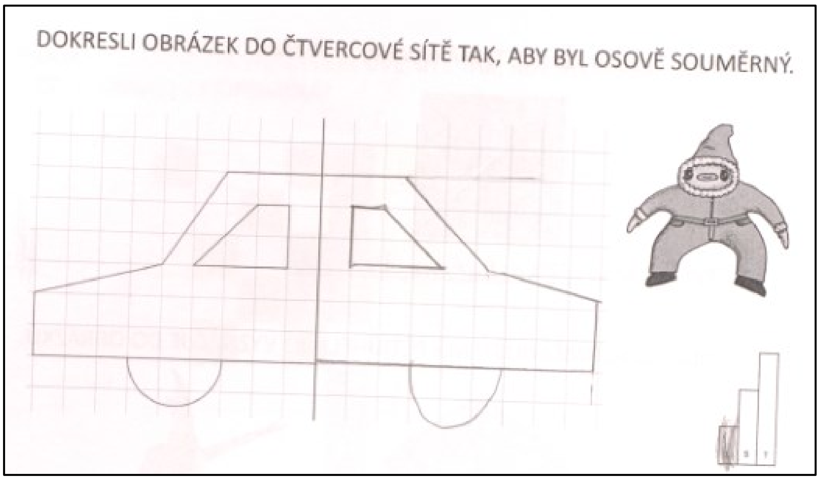
Čtverečkovaný papír, nůžky, papírové geometrické útvary.

Zkušenosti z ověřování

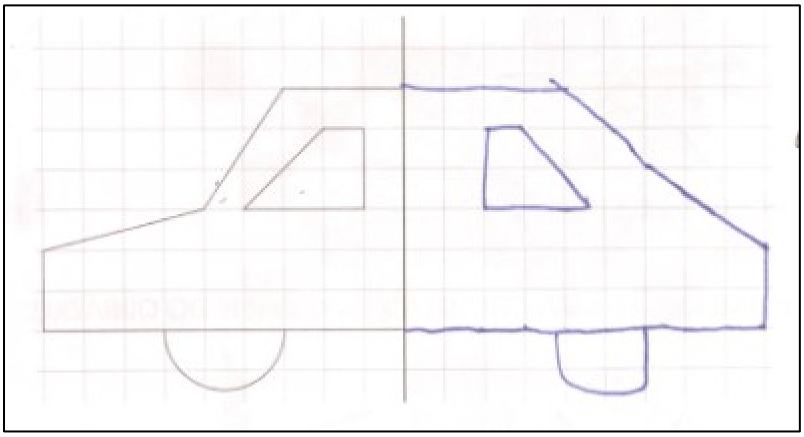
V prvních úlohách žáci dokázali najít osy souměrnosti obrázků. Nevyznačovali však všechny osy, pokud jich existovalo v daném obrázku více. V druhé úloze V1 mnozí žáci konstatovali, že by sněhulák byl osově souměrný, kdyby neměl koště („Ale co to koště?“). Nevyznačili osu souměrnosti kruhové úseče. V druhých úlohách V2 a V3 nevyznačili všechny osy souměrnosti u vločky a u písmene H. U domečku s komínem dobře porozuměli, že se nejedná o osově souměrný útvar. U druhého obrázku domečku ale osu souměrnosti někteří žáci vyznačili, ač není osově souměrný. Zaměnili tak osovou souměrnost za středovou souměrnost, rotaci. V třetích úlohách se ukázalo, že se zde projevují kombinace dvou faktorů, které činí úlohu obtížnou. Jednou je tvar a poloha čar, druhou pak je vzdálenost bodů od osy souměrnosti. V úlohách, kde žáci vyznačovali osy souměrnosti geometrických útvarů, se vyskytly tyto typické chyby: obdélník má čtyři osy souměrnosti, lichoběžník má dvě osy souměrnosti, rovnostranný trojúhelník má jednu osu, šestiúhelník tři osy. U kruhu našli žáci „dvě osy, čtyři osy, osm os, přibližně pět os, hodně os“. Při dokreslování čtverečkového obrázku ve čtvercové síti žáci volili dvě různá umístění osy (přímka sítě nebo svislá přímka procházející středy stran čtverců). Žáci neměli potřebu si osu vyznačit, ale obrázky dokreslovali správně. V poslední úloze se projevila kreativita žáků. Někteří tvořili velmi jednoduché obrázky, někteří složitější. V řešeních se neobjevovaly chyby.

Ukázka žákovských řešení úloh

P14 V2, úloha 3

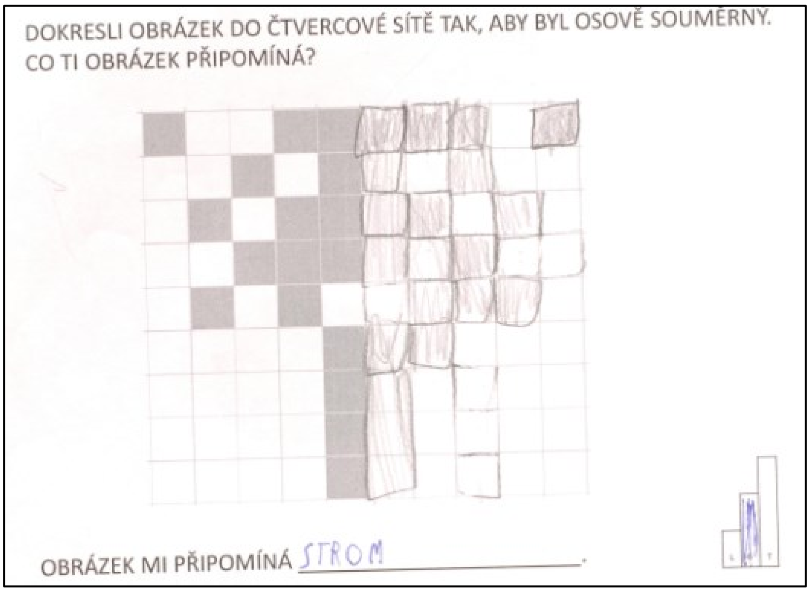


Další řešení.



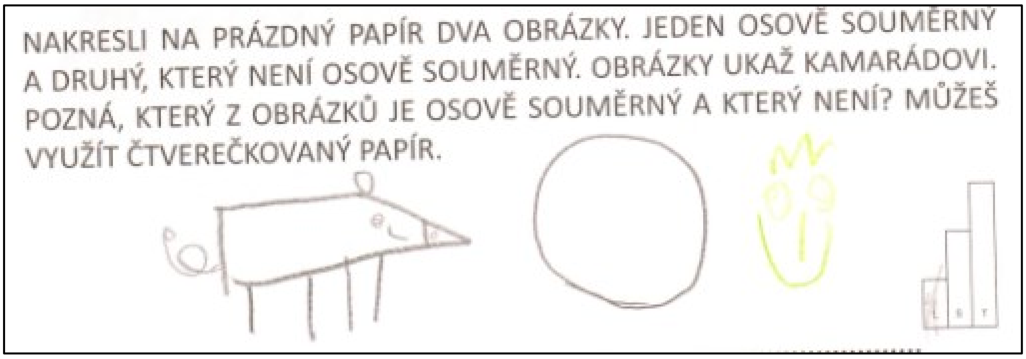
V případě obou řešení vidíme, že pokud žáci zakreslují obraz útvaru vodorovnými nebo svislými čarami, které kopírují přímky čtvercové sítě, jsou zpravidla úspěšní. O něco obtížnější jsou situace, kdy žáci tvoří čáry, které nekopírují čtvercovou síť, ale prochází jejími mřížovými body. Nejobtížnější je pohyb mimo mřížové body, využití křivek, změna polohy osy.

P14 V2, úloha 9

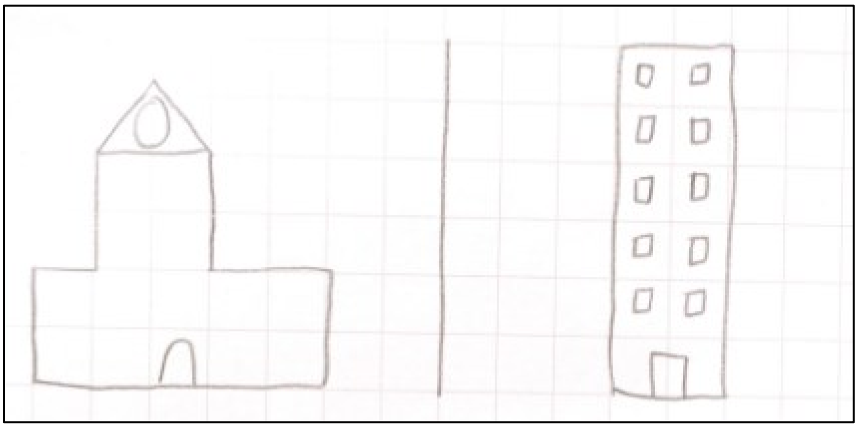


Na úspěšnosti řešení úlohy, kdy žáci vytvářeli obraz útvaru ve čtvercové síti pomocí vybarvování jednotlivých čtverců sítě, se významnou měrou podílí složitost obrázku (jeho členění, počet a uspořádání vybarvených a nevybarvených čtverců).

P14 V2, úloha 10

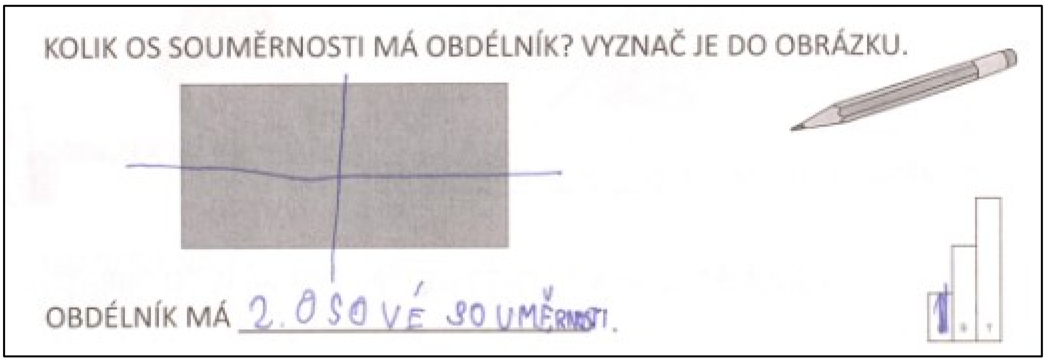


Další řešení.

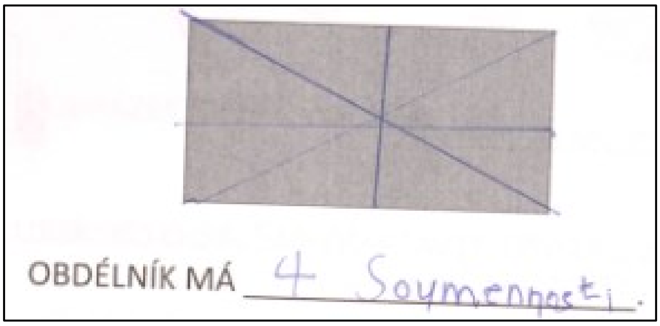


Při vlastní tvorbě žáků můžeme sledovat velkou kreativitu při vytváření útvarů, které jsou nebo nejsou osově souměrné.

P14 V2, úloha 4

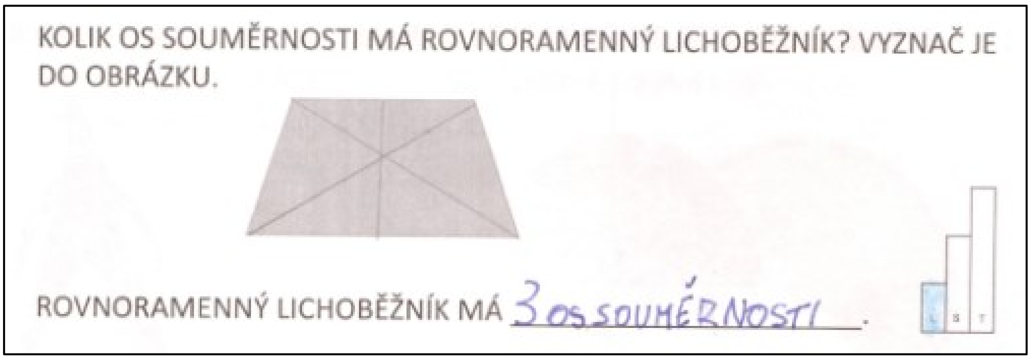


Správné grafické řešení je doprovázeno nepřesným slovním vyjádřením. To je ale vzhledem k věku žáků a jejich malé zkušenosti s matematickou terminologií přirozené. Vhodné je proto o řešení se žákem diskutovat.



Z řešení je patrné, že žák neporozuměl významu osy souměrnosti. Je možné, že vyšel z mylné analogie s osami čtverce. Z řešení je patrné, že nenastalo ověření řešení pomocí překládání papíru. To je logické vzhledem k tomu, že útvar byl součástí pracovního listu. Proto je vhodné tyto typy úloh řešit především manipulativní činností s vystřiženými útvary.

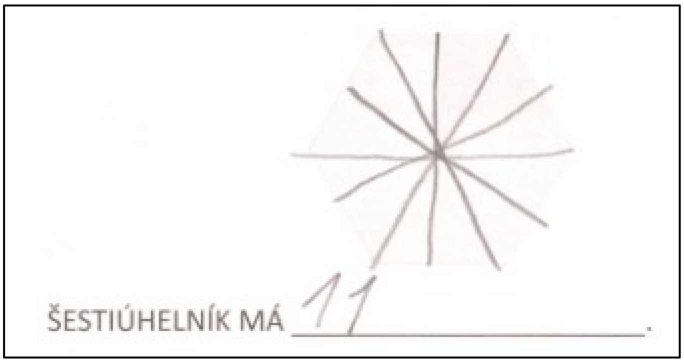
P14 V3, úloha 6



Analogickou situaci k předchozímu řešení vidíme i při hledání os souměrnosti u lichoběžníku.

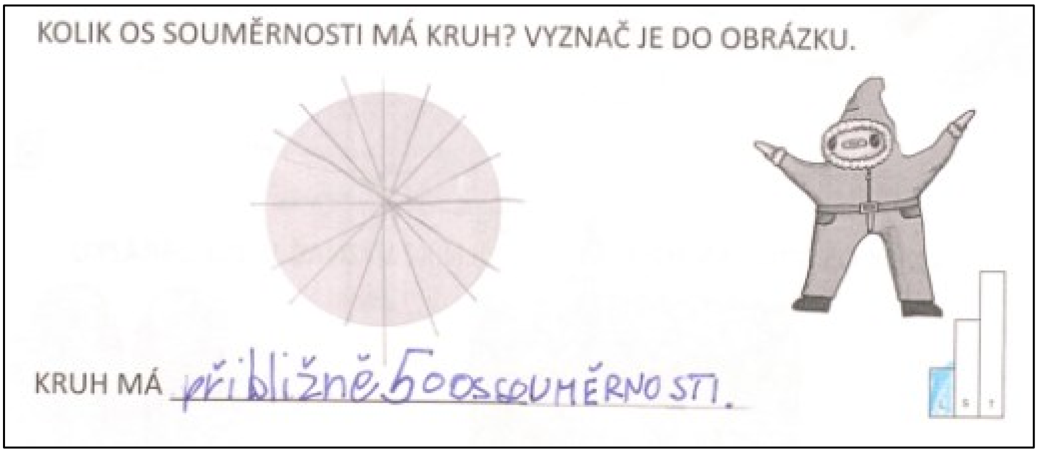
P14 V1, úloha 6

Žák vyznačil všechny osy souměrnosti pravidelného šestiúhelníku. Dokázal úlohu řešit náčrtkem.



Žák zakreslil správně všechny osy souměrnosti pravidelného šestiúhelníku. Chybná je jeho interpretace, kdy počítal všechna místa, kde osy úsečky protínají hranici šestiúhelníku. Zároveň se o jednu zmýlil. Na ukázce řešení je patrné, jak důležitá je interpretace řešení samotným žákem. V případě, že by nebyla zapsána odpověď, mohli bychom chápat řešení jako správné a neodkryli bychom žákovo nesprávné chápání os souměrnosti.

P14 V3, úloha 7



Žák intuitivně cítí, že kruh má nekonečně mnoho os souměrností. Při grafickém řešení zakreslil osm os souměrnosti. Limity v grafickém řešení úlohy mu pomohl vyřešit slovní komentář, ve kterém výrazně zvyšuje počet os souměrnosti kruhu. Tato skutečnost odráží ve slovním vyjádření „přibližně 50 os souměrnosti“. Slovem přibližně pak upozorňuje na skutečnost, že ani toto číslo není přesné.

15 Velká čísla

Téma je zaměřeno na seznámení žáků *s číselnými (numeračními) soustavami.* Numerační soustavou se obvykle rozumí soubor dohodnutých používaných znaků nazývaných *číslice* (cifry) spolu s vymezením pravidel pro zápis čísel. Podoba zápisu čísla závisí na volbě číselné soustavy. Východiskem jsou zkušenosti žáků se zápisem čísla v *desítkové soustavě.* Princip seskupování prvků po 10 se uplatní i při vyjádření „velkých čísel“ na modelu peněžní soustavy nebo řádového počitadla (řád číslice – jednotky, desítky, stovky, tisíce…). Význam vyjádření velkých čísel tzv. pozičním zápisem je demonstrován na příkladech z reality. Seznámení žáků s jinými číselnými soustavami (římské číslice) zde má pouze motivační význam a souvisí s historií zápisu čísla v různých kulturách.

<u>Očekávané výstupy RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ jsou k danému tématu formulovány takto: žák

- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel,
- zapisuje a znázorňuje čísla v desítkové soustavě.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- se seznamuje s principem desítkové číselné soustavy na řádovém počitadle,
- umí přečíst a zapsat „velká“ čísla v desítkové číselné soustavě,
- se seznamuje se způsoby vyjádření čísla v jiných (nepozičních) soustavách v historickém kontextu.

Nejprve se žáci seznámí s řádovým počitadlem, na kterém si Fí a Tau znázorňují daná čísla. Využívají tak poziční desítkové soustavy, zápis pomocí řádů. Vyznačují různá přirozená čísla s využitím řádů miliónů. Následuje ukázka čísel větších než milión, a to v kontextu počtu obyvatel České republiky a Tokia. Čísla jsou zde uvedena pouze v pozičním zápisu. Doporučujeme zápis doprovodit modelací čísel. Žáci se seznamují s podstatou poziční desítkové soustavy. Zároveň je poukázáno na existenci i jiných číselných soustav. Například využití dvojkové soustavy ve výpočetní technice. Žáci se podívají i do historie. Začínají v Dolních Věstonicích, dokonce se přesunou i na další kontinenty. Seznámí se například s ukázkou číselných soustav, které byly používány ve starém Egyptě nebo v Babylónii. Podrobněji se seznámí i s římskými číslicemi, které jsou používány dodnes.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. V prvních úlohách pracovních listů žáci pracují se záznamem čísla na řádovém počitadle. Jejich úkolem je na základě znázornění zapsat číslo v poziční desítkové soustavě. V druhých a třetích úlohách žáci vyhledávají číslo na základě zadaných podmínek. Pracují opět s řády čísel, se vztahy „o několik více, o několik méně“. Jednotlivé úrovně se liší v počtu řádů použitých čísel. Ve čtvrtých úlohách žáci doplňují čísla z nabídky do textu. Zařazení čísel může probíhat na základě „pouhé“ úvahy, není nutné hodnoty přepočítávat. V pátých úlohách zapisují žáci čísla pomocí římských číslic. Poslední úlohy jsou věnovány odhadům různých časových intervalů z běžného života (den, letní prázdniny, rok). Správnost odhadů ověříme výpočtem čísla ze zadaných příkladů.

Pomůcky

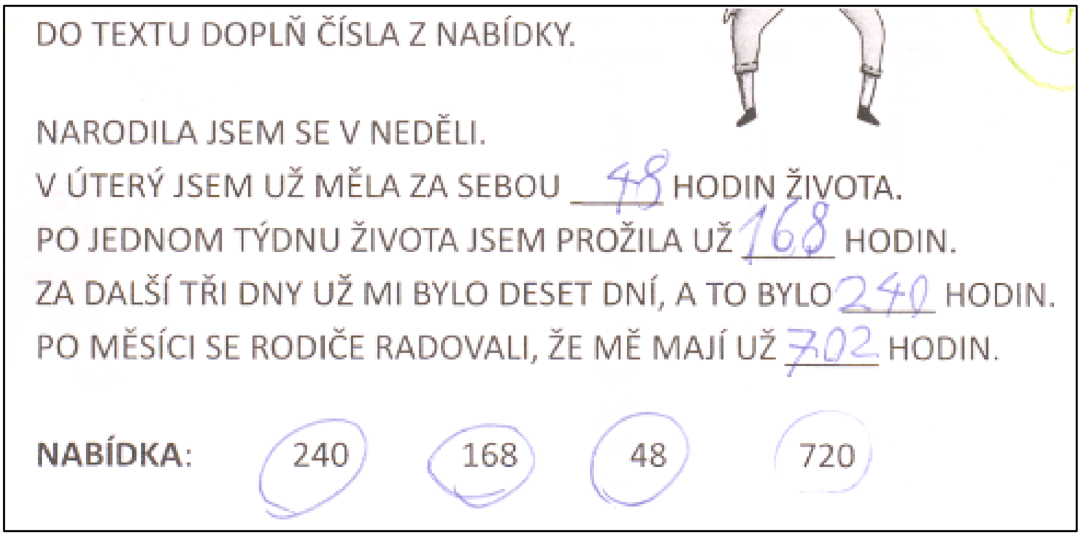
Řádové počitadlo či jiné pomůcky pro vytváření představy přirozených čísel a jejich pozičního zápisu. Tabulka zápisu římských čísel.

Zkušenosti z ověřování

Většina žáků princip znázorňování čísel na řádovém počitadle pochopila. Ojediněle se vyskytl problém se zápisem čísla. Například místo 368 zapsal žák 300608, někdy jednotlivé číslice žáci oddělovali čárkou 3, 6, 8. V druhých a třetích úlohách se objevily chyby z důvodu nepřesného přečtení zadání. Čtvrtou úlohu někteří žáci pochopili a řešili úvahou („Nebudu to počítat. Je to zbytečné. Jde to postupně nahoru, jak stárnu." „Logicky. Čím víc dní, tím víc minut."). Ti, kteří tento princip neviděli, úlohu neřešili. Pokud se žáci pokusili úlohu řešit aritmeticky, narazili na problémy převodu jednotek. Nevěděli například kolik minut má jedna hodina. Při zápisu čísel pomocí římských číslic pracovali žáci většinou s tabulkou římských čísel ze sady pomůcek. Obtížné bylo pochopení principu odčítání využitého při zápisu čísel 4, 9. Poslední úlohy spojené s odhadem činily některým žákům obtíže (délka dne 7 hodin, délka prázdnin 30 dní, délka roku 270 dní). Někteří žáci ale provedli „zkušený odhad" (délka prázdnin 60 dní, délka roku 360 dní), který si výpočtem zpřesnili. Při výpočtech se objevily obtíže s určením největšího trojciferného čísla. Žáci za největší trojciferné číslo považovali číslo 900. Za nejmenší dvojciferné číslo považovali 90. Ve výpočtech se objevovaly numerické chyby.

Ukázka žákovských řešení úloh

P15 V1, úloha 4

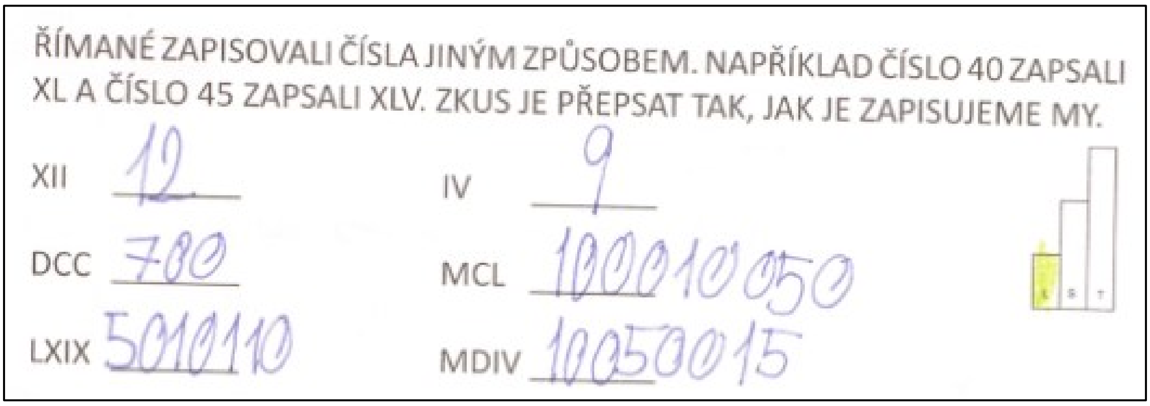

DO TEXTU DOPLŇ ČÍSLA Z NABÍDKY.

NARODILA JSEM SE V NEDĚLI.
V ÚTERÝ JSEM UŽ MĚLA ZA SEBOU 48 HODIN ŽIVOTA.
PO JEDNOM TÝDNU ŽIVOTA JSEM PROŽILA UŽ 168 HODIN.
ZA DALŠÍ TŘI DNY UŽ MI BYLO DESET DNÍ, A TO BYLO 240 HODIN.
PO MĚSÍCI SE RODIČE RADOVALI, ŽE MĚ MAJÍ UŽ 702 HODIN.

NABÍDKA: 240 168 48 720

Základem řešení úloh stejného typu ve všech třech variantách nebylo procvičení početních operací, ale práce s přirozenými čísly v kontextu jednotek času při využití čtenářské gramotnosti. Někteří žáci úlohu řešili vhledem, jiní se pustili do počítání aritmetických příkladů. V druhém případě si často pomáhali prací na kalkulátoru. V řešení úlohy vidíme, že žák zaměnil čísla 720 a 702.

P15 V3, úloha 5


ŘÍMANÉ ZAPISOVALI ČÍSLA JINÝM ZPŮSOBEM. NAPŘÍKLAD ČÍSLO 40 ZAPSALI XL A ČÍSLO 45 ZAPSALI XLV. ZKUS JE PŘEPSAT TAK, JAK JE ZAPISUJEME MY.

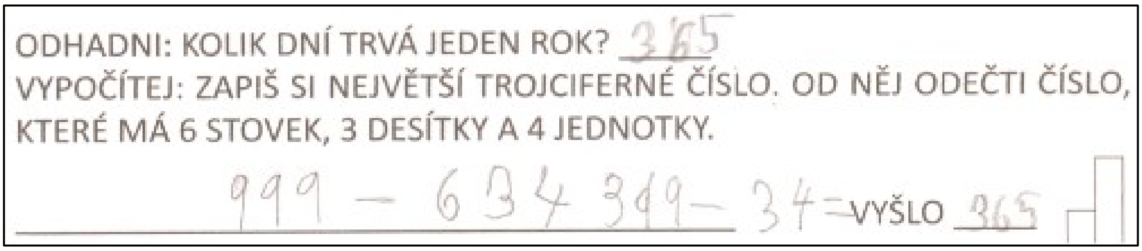
XII 12 IV 9

DCC 700 MCL 100010050

LXIX 5010110 MDIV 100050015

I když měli k dispozici tabulku zápisu čísel pomocí římských číslic, je z uvedeného řešení patrné, že žák princip zápisu nepochopil. Zapisuje za sebou pouze hodnoty jednotlivých znaků.

P15 V1, úloha 8


ODHADNI: KOLIK DNÍ TRVÁ JEDEN ROK? 365
VYPOČÍTEJ: ZAPIŠ SI NEJVĚTŠÍ TROJCIFERNÉ ČÍSLO. OD NĚJ ODEČTI ČÍSLO, KTERÉ MÁ 6 STOVEK, 3 DESÍTKY A 4 JEDNOTKY.

999 − 634 349 − 34 = VYŠLO 365

Úloha žáky vedla nejprve k odhadnutí výsledku a poté k jeho ověření výpočtem. Na obrázku vidíme přesný odhad i správné řešení. Vzhledem k přesnosti odhadu je možné, že žák již tuto vědomost má. Z výpočtu je zřejmé, že žák chápe pojem největší trojciferné číslo a spolehlivě zvládá pamětné odčítání v oboru do 1 000.

16 Číselné a logické hrátky

Název tématu shrnuje a zastřešuje rozmanité typy úloh z různých oblastí rekreační matematiky, využívající poznatky z aritmetiky, logiky, teorie čísel, geometrie, propedeutiky algebry. Jsou zařazeny číselné a logické hrátky, jednoduché logické úlohy typu „zebra“, práce s uzlovými grafy, jednotažky, algebrogramy apod. Úlohy rozvíjejí logické, funkční, kritické myšlení. Jejich netradiční charakter má žáky zaujmout, ukázat jim zajímavost matematiky a krásu matematického poznání. V RVP ZV tvoří Nestandardní aplikační úlohy a problémy samostatný tematický okruh. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy.

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů</u>: žák

- využívá svých schopností k řešení netradičních úloh a her rozvíjejících logické myšlení,
- se seznamuje se zajímavostmi z historie matematiky, řeší zajímavé historické úlohy,
- rozvíjí svůj zájem o matematiku jako školní předmět i jako součást mimoškolních aktivit.

Ve videu jsou žákům nabídnuta témata, ve kterých jsou využívány základní početní operace pro objevování vztahů mezi čísly v nových souvislostech. Při hře „Myslím si číslo“ mohou vyjít z několika pokusů a pokusit se o nalezení principu. Mohou využívat inverzní operace. Úloha může být vhodnou propedeutikou algebry. V další části videa žáci objevují zákonitosti tvorby Pascalova trojúhelníku. Následně sledují další vztahy mezi čísly, například v „šikmých sloupcích“. Poslední část videa je zaměřena na různé uchopení čísel, a to z oblasti matematické teorie (dokonalé číslo), i běžného života. Pro ukázku bylo vybráno číslo šest.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. V prvních úlohách pracovních listů řeší žáci úlohy na sčítání a odčítání přirozených čísel, které jsou zadány v různých grafických schématech. Úlohy mohou žáci řešit experimentem nebo výpočty. Při experimentu mohou žáci volit jednotlivé hodnoty a ověřovat jejich správnost. Ve V1 žáci doplňují výsledky operací do připraveného schématu. Ve V2 hledají nejkratší cestu v uzlovém grafu. Ve V3 hledají stejné součty ve čtyřúhelnících. Ve variantě V1 je sedmá úloha věnována algebrogramům. Žáci zaměňují písmena či obrazce za čísla tak, aby platily naznačené rovnosti. Hledají různé možnosti řešení. Třetí, čtvrtou, pátou a osmou úlohu žáci řeší především na základě logických úvah. Ve variantě V2 je druhá, třetí a šestá úloha věnována procvičení aritmetických operací. U druhé a šesté úlohy žáci rozvíjí funkční myšlení, hledají závislosti mezi čísly. V druhé úloze je dán předpis a žáci odhalují souvislosti mezi vstupním a výstupním číslem. Pro sledování a vyvození závislosti mohou žáci zvolit libovolný počet čísel. V šesté úloze jsou dány dva případy vstupních a výstupních čísel. Na základě této informace mají žáci odhalit závislost a doplnit výstupní hodnoty pro další tři čísla. Ve variantě V3 jsou úlohy ekvivalentní úlohám z V1 a V2, ale na vyšším stupni náročnosti. Ve všech variantách pracovních listů je zařazena jedna úloha typu zebra. Pro její řešení využívají žáci připravenou tabulku. Podle varianty obtížnosti pracovního listu je volena i náročnost práce s tabulkou. Ve V1 jde o doplnění několika málo údajů, ve V3 pak doplňují všechny údaje. Poslední úlohy jsou věnovány jednotažkám, kdy žáci rozhodují, zda je možné nakreslit obrázek jedním tahem.

<u>Pomůcky</u>

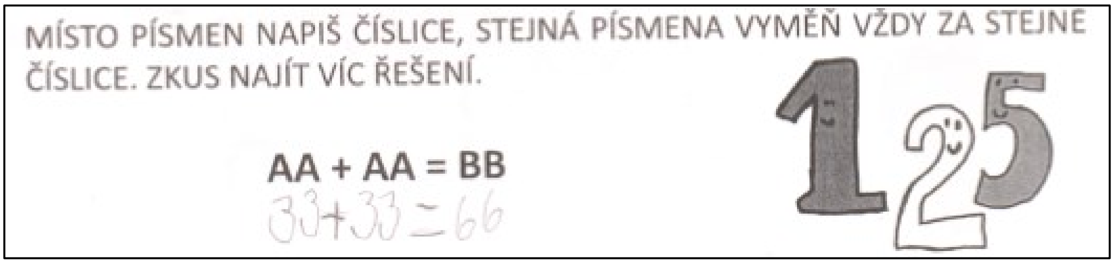
Tabulky pro experimentální řešení úloh typu zebra, opakovaný zápis. Případně figurky pro úlohy typu zebra. Kalendář.

<u>Zkušenosti z ověřování</u>

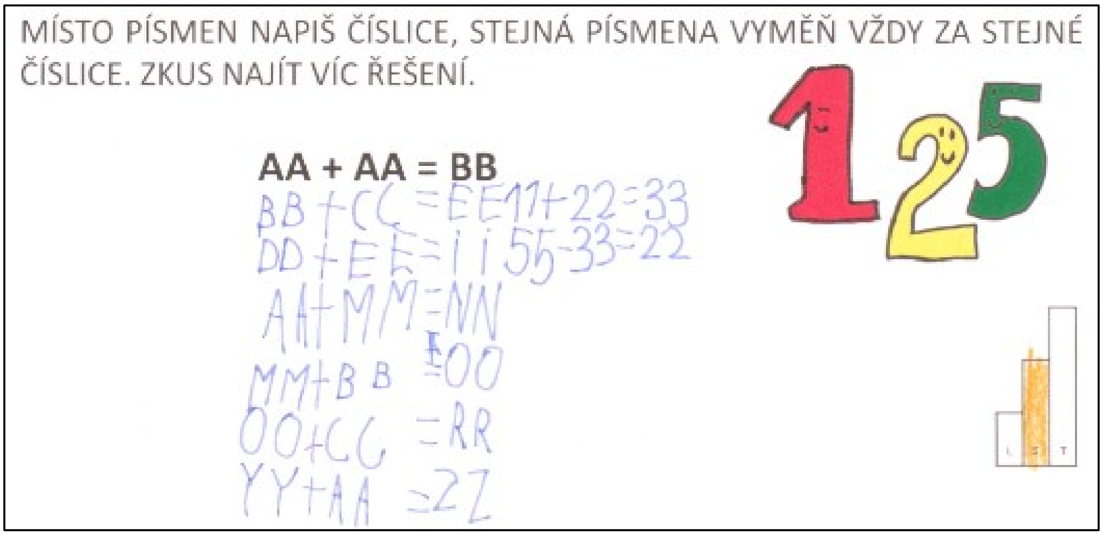
U kalkulativních úloh se projevilo mnoho numerických chyb. Někdy žáci již zapomněli i princip sčítání a odčítání s přechodem přes základ 10, častá byla také záměna operací (9 + 6 = 18; 18 – 8 = 7; 4 – 5 = 9; 9 + 1 = 8). V první úloze V3 bylo pro žáky mnohdy obtížné prvotní vyhledání všech čtyřúhelníků a hledání příslušných součtů. V úlohách zadaných delším textem činilo žákům problémy čtení s porozuměním a následná práce s informacemi. Pro žáky nebyla obvyklá ani práce s tabulkami, proto byly v úlohách typu zebra tabulky připravené. Tyto úlohy se jevily pro žáky značně náročné, vyžadující velkou časovou dotaci. Zároveň ale vedly k velké kreativitě žáků, kdy někteří pro řešení úlohy volili dramatizaci celé situace. Jednotlivé aktéry si vymodelovali postavičkami a příslušné vztahy přiřazovali podle zadání. Úlohy zaměřené na rozvoj funkčního myšlení se ukazovaly jako obtížné, což je vzhledem k obvyklé míře rozvoje abstraktního myšlení pro danou věkovou kategorii přirozené. Spíš než funkční závislost žáci hledají aritmetické operace. Při řešení algebrogramů žáci většinou našli jedno řešení. Pro některé žáky bylo obtížné porozumět substituci (záměna jednoho písmene za jednu číslici). Jednotažky vybízely žáky k experimentům. Téměř všichni úlohy vyřešili, i když neznali pravidlo pro možnost nakreslení obrázku jedním tahem.

Ukázka žákovských řešení úloh

P16 V1, úloha 7

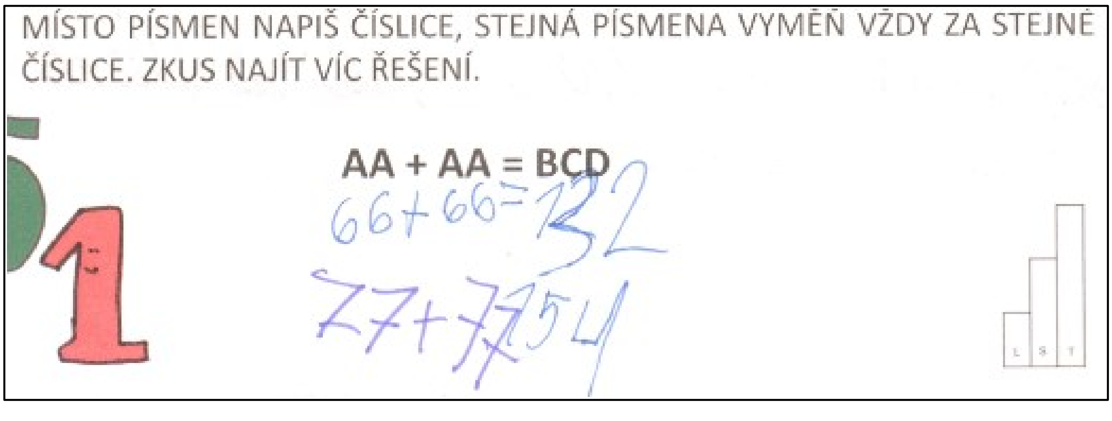


Pro správné řešení úlohy bylo důležité, aby žák pochopil, že zápis AA znamená dvojciferné číslo zapsané stejnými číslicemi. Žák uvedl jedno správné řešení.



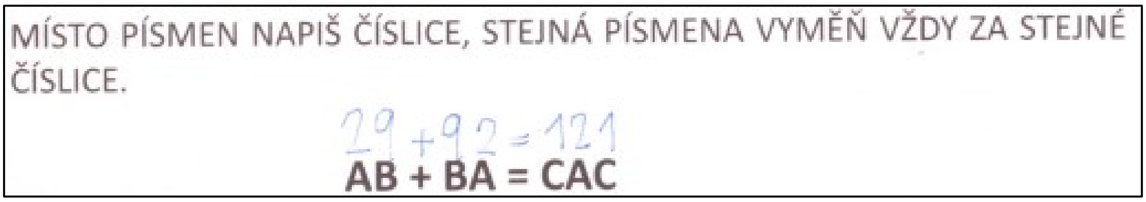
Žák neporozuměl zadání, kdy písmeno A zastupuje jednu cifru, proto pro druhý sčítanec volí 22. Dodržuje pravidlo, kdy využívá stejnou cifru v rámci zápisu jednotlivých dvojciferných čísel. Dále v textu uvádí několik zápisů svého aritmetického řešení s využitím písmen. Tyto zápisy odpovídají zvolenému příkladu.

P16 V2, úloha 5



Žák zvládl najít dvě řešení pro daný zápis. Pochopil, kdy součet dvou stejných dvojciferných čísel je číslo trojciferné zapsané jinými, různými ciframi.

P16 V3, úloha 5

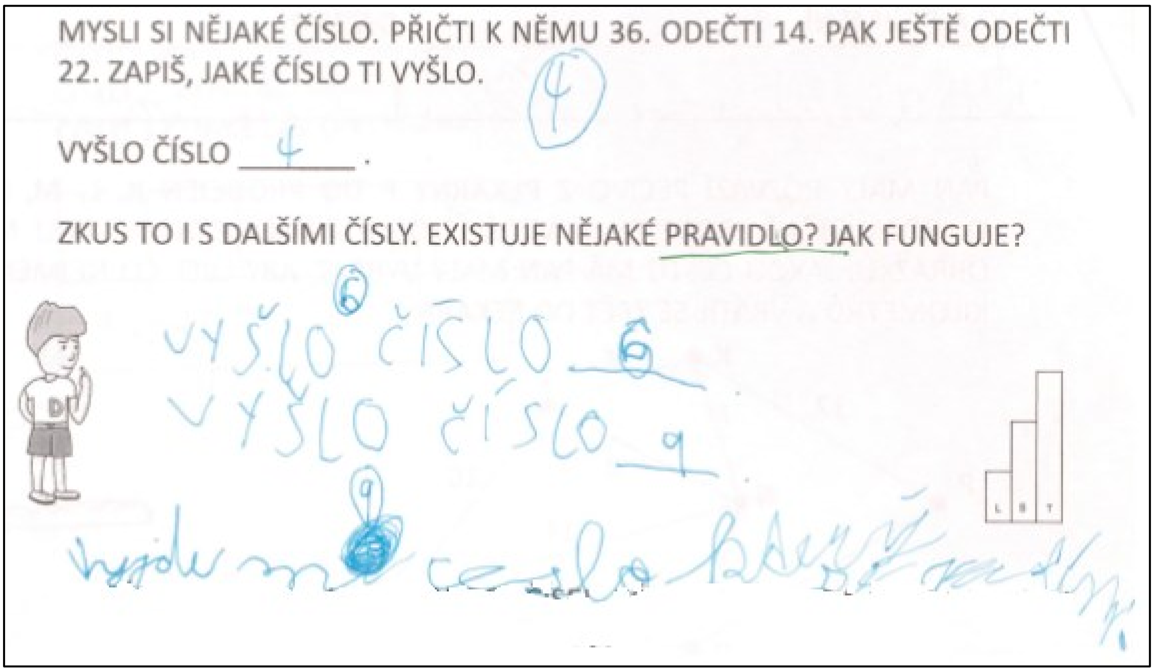

MÍSTO PÍSMEN NAPIŠ ČÍSLICE, STEJNÁ PÍSMENA VYMĚŇ VŽDY ZA STEJNÉ ČÍSLICE.

29 + 92 = 121

AB + BA = CAC

Žák zvládl obtížný úkol, kdy přesně dodržel podmínky úlohy.

P16 V2, úloha 2


MYSLI SI NĚJAKÉ ČÍSLO. PŘIČTI K NĚMU 36. ODEČTI 14. PAK JEŠTĚ ODEČTI 22. ZAPIŠ, JAKÉ ČÍSLO TI VYŠLO.

4

VYŠLO ČÍSLO 4.

ZKUS TO I S DALŠÍMI ČÍSLY. EXISTUJE NĚJAKÉ PRAVIDLO? JAK FUNGUJE?

6

VYŠLO ČÍSLO 6

VYŠLO ČÍSLO 9

9

Žák vyjádřil podstatu úlohy, kdy na vstupu a výstupu je stejné číslo („Vyjde mi číslo, které je stejné.“). K aritmetické podstatě takového jevu se žádný žák nevyjadřoval.

17 Mnohoúhelníky

Téma navazuje na předchozí témata rovinné geometrie, především třídění a skládání trojúhelníků. Směřuje k poznání, že pojmenování mnohoúhelníku je odvozeno od počtu jeho stran: n-úhelník má ***n*** stran, například pětiúhelník má 5 stran atd. Geometrická představivost žáků se rozvíjí objevováním vlastností pravidelných mnohoúhelníků (shodnost stran) a vnitřních úhlů, zkoumáním vztahu mezi pravidelným mnohoúhelníkem a rovnostranných trojúhelníkem. Žáci se seznamují i s nekonvexním mnohoúhelníkem. Téma rozvíjí kreativitu žáků a jemnou motoriku při práci s pomůckami.

<u>Očekávané výstupy RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ jsou k danému tématu formulovány takto: žák

- rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci,
- určí délku lomené čáry a obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- využívá počítačového programu Geogebra pro seznámení s pravidelnými mnohoúhelníky,
- rozvíjí dovednosti kreslení rovinných útvarů spojováním bodů v bodové síti,
- obohacuje svou geometrickou terminologii.

V prostředí počítačového programu Geogebra se Fí a Tau postupně seznamují s pravidelnými mnohoúhelníky. Začínají známým útvarem, kterým je rovnostranný trojúhelník. Následným zvyšováním počtu stran mnohoúhelníku po jedné je jim představen čtverec, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník atd. V případě pravidelného pětiúhelníku je poukázáno na vrcholy tohoto útvaru. Při vizualizaci rovnostranného trojúhelníku, čtverce, pravidelného pětiúhelníku a pravidelného šestiúhelníku jsou žáci vedeni k objevení společné vlastnosti, kterou je shodnost všech stran. U pravidelného šestiúhelníku je zdůrazněna kromě shodnosti všech stran i shodnost všech vnitřních úhlů. U příkladu pravidelného sedmiúhelníku je demonstrována rozložitelnost na shodné rovnoramenné trojúhelníky. Následují ukázky mnohoúhelníků o větším počtu stran, kdy dochází k optickému klamu. Mnohoúhelník se jeví jako kruh. Na příkladu pravidelného 96úhelníku je připomenuto Archimedovo zkoumání výpočtu délky kružnice (obvodu kruhu). V závěru jsou uvedeny ukázky využití pravidelných mnohoúhelníků z běžného života, a to jak ze světa přírody, tak z práce člověka.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. V prvních úlohách žáci vyhledávají zadané mnohoúhelníky a vybarvují je. Aktivně používají zavedenou terminologii pro různé mnohoúhelníky. V poslední variantě pracují i s nekonvexními útvary. V druhých úlohách vytváří nákres útvarů spojováním zadaných bodů označených čísly. Vzniklé útvary pojmenovávají, zapisují počty jejich vrcholů a stran. Mohou si všimnout, že u pravidelných mnohoúhelníků je počet vrcholů roven počtu stran. V třetích úlohách načrtávají žáci zadané geometrické útvary do bodové sítě. Cvičí si tak jemnou motoriku i uvědomění si nezávislosti geometrického útvaru na jeho poloze. Ve čtvrtých a pátých úlohách rozdělují obdélníky dle zadaných podmínek. Nejprve jde o rozdělení na trojúhelníky, čtverce nebo obdélníky, kdy mohou mít různé velikosti případně délky stran. V druhém případě jde o rozdělení na shodné útvary. Žáci jsou tak vedeni k terminologickému rozlišení, kdy mluvíme obecně o útvarech, kdy mluvíme o různých útvarech, shodných útvarech. Záměrem je vést žák k poznání, že v případě, že není zadáno, zda se jedná o útvary různé či shodné, může si řešitel vybrat. To je situace ve variantě V3, úloha 4.

Pomůcky

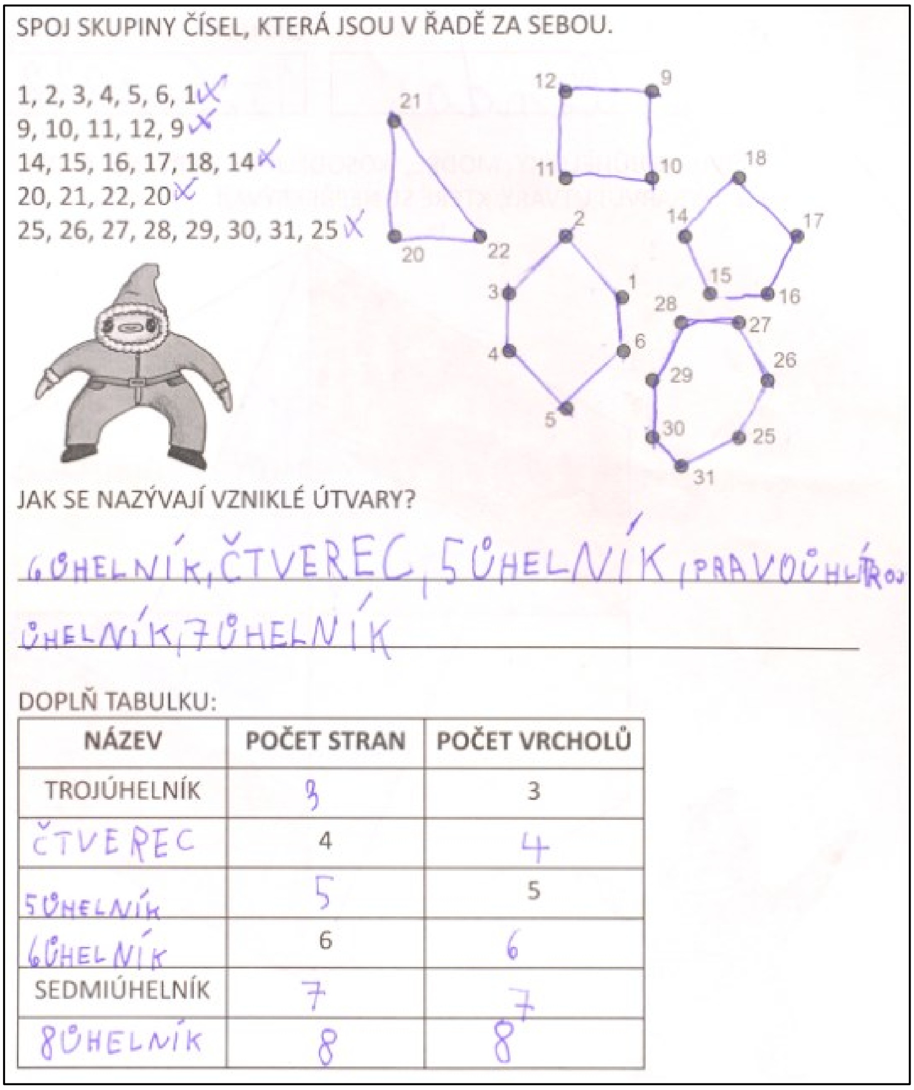
Pravidelné mnohoúhelníky, případně počítačový program Geogebra.

Zkušenosti z ověřování

Někteří žáci si zaměňovali pojmy. Především deltoid – kosodélník, lichoběžník – kosodélník, kosočtverec – čtverec. V druhé úloze byli žáci úspěšní v prvních třech částech. Často se nevěnovali poslední otázce, nalezení pravidla počtu stran a počtu vrcholů mnohoúhelníků. To může být dáno i velkým počtem úkolů, které jsou zařazeny pod jediné číslo úlohy. Vhodné by proto mohlo být rozfázování úkolů. Při zakreslování do bodové sítě měli žáci problém se zakreslením lichoběžníku, kosočtverec znázorňovali jako čtverec s vodorovnou úhlopříčkou. Ve variantě V3, kdy měli žáci načrtnout různě velké čtverce, načrtli několik shodných čtverců v různých polohách. Ve čtvrtých a pátých úlohách žáci většinou využili pro řešení načrtávání. Pro některé žáky ale byla důležitá přesnost rozdělení, proto využili rýsovacích potřeb, většinou trojúhelníku. V úlohách se projevila velká kreativita žáků. Při dělení obdélníku na shodné útvary nemusely být všechny útvary, na které byl obdélník rozdělen, shodné. Například v páté úloze ve variantě V2 žáci rozdělili obdélník úhlopříčkami na čtyři trojúhelníky, kdy existují dvě dvojice shodných trojúhelníků. Video i pracovní list hodnotili učitelky i žáci pozitivně. Projevila se zde specifická situace návaznosti tématu geometrické tvary a mnohoúhelníky. Oceněno bylo opakování učiva z předchozího tématu, které zde bylo rozvinuto v téma mnohoúhelníky. Žáci zažívali pocit úspěchu, protože pracovali s pojmy, které jim byly známé z tématu geometrické tvary. Vzhledem k vhodnému časovému odstupu obou témat měli žáci prostor pro ukotvení pojmů, ale zároveň je nezapomněli. Mohli tak s úspěchem navázat na předchozí znalosti.

*Ukázka žákovských řešení úloh*

P17 V2, úloha 2


SPOJ SKUPINY ČÍSEL, KTERÁ JSOU V ŘADĚ ZA SEBOU.

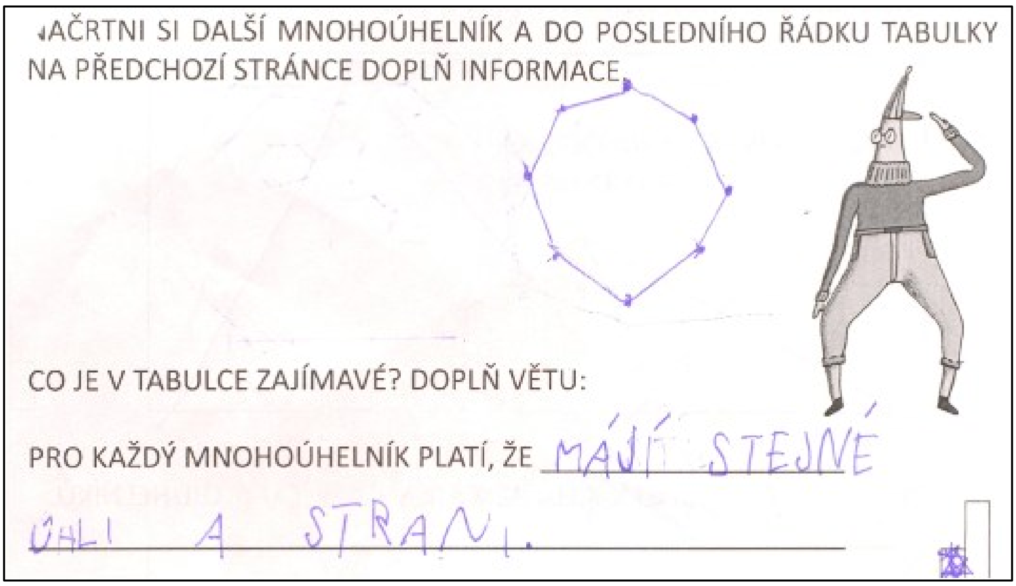
1, 2, 3, 4, 5, 6, 1
9, 10, 11, 12, 9
14, 15, 16, 17, 18, 14
20, 21, 22, 20
25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 25

JAK SE NAZÝVAJÍ VZNIKLÉ ÚTVARY?

6ÚHELNÍK, ČTVEREC, 5ÚHELNÍK, PRAVOÚHLÍ ROV
ÚHELNÍK, 7ÚHELNÍK

DOPLŇ TABULKU:

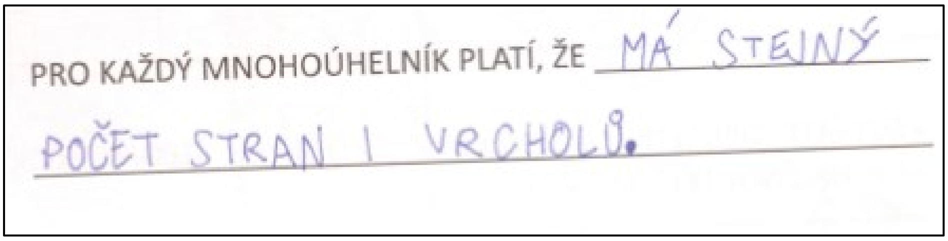
NÁZEV	POČET STRAN	POČET VRCHOLŮ
TROJÚHELNÍK	3	3
ČTVEREC	4	4
5ÚHELNÍK	5	5
6ÚHELNÍK	6	6
SEDMIÚHELNÍK	7	7
8ÚHELNÍK	8	8


NAČRTNI SI DALŠÍ MNOHOÚHELNÍK A DO POSLEDNÍHO ŘÁDKU TABULKY NA PŘEDCHOZÍ STRÁNCE DOPLŇ INFORMACE.

CO JE V TABULCE ZAJÍMAVÉ? DOPLŇ VĚTU:

PRO KAŽDÝ MNOHOÚHELNÍK PLATÍ, ŽE MÁJÍ STEJNÉ ÚHLI A STRANI.

Žák správně pojmenoval vzniklé útvary. Poznal i pravoúhlý trojúhelník. Doplnil správně tabulku týkající se informací o počtu stran a vrcholů mnohoúhelníků. Při vyjádření obecně platného pravidla pro mnohoúhelníky pracoval s pojmy strana, úhel. Vyjádření „stejné úhli a strani“ vyjadřuje skutečnost, že mnohoúhelník má stejný počet stran a stejný počet vnitřních úhlů. Nejedná se zde o úvahu nad shodností stran a úhlů, a to i přesto, že slovo stejný bývá pro žáky často synonymem pro slovo shodný.


PRO KAŽDÝ MNOHOÚHELNÍK PLATÍ, ŽE MÁ STEJNÝ POČET STRAN I VRCHOLŮ.

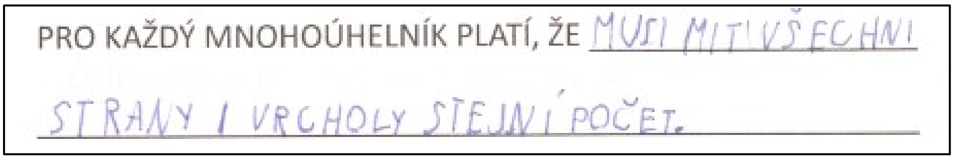
Další řešení.


PRO KAŽDÝ MNOHOÚHELNÍK PLATÍ, ŽE stejné stran a vrcholů

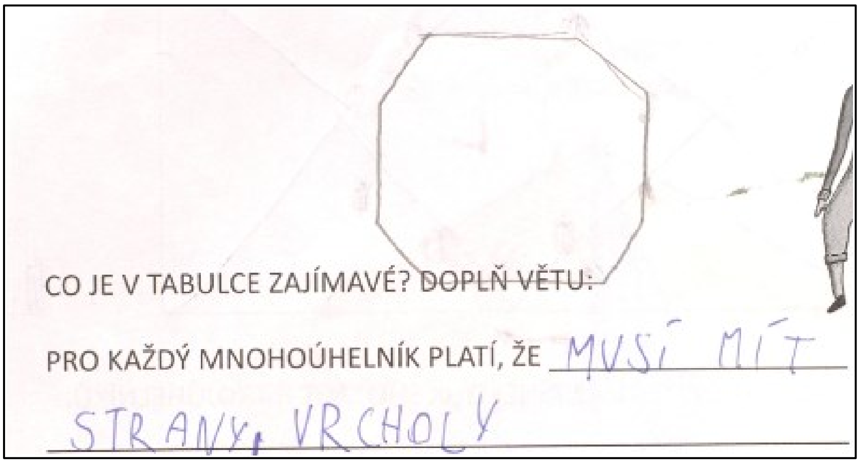
Další řešení.


PRO KAŽDÝ MNOHOÚHELNÍK PLATÍ, ŽE KOLIK MÁ ÚHLŮ TOLIK MÁ STRAN

Další řešení.

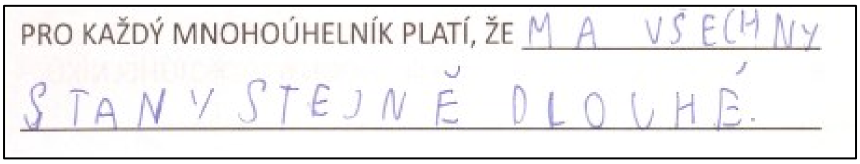

PRO KAŽDÝ MNOHOÚHELNÍK PLATÍ, ŽE MUSÍ MÍT VŠECHNI STRANY I VRCHOLY STEJNÍ POČET.

Předcházející sada řešení je ukázkou různého záznamu skutečnosti vyjadřující souvislost počtu stran, vrcholů a vnitřních úhlů mnohoúhelníku.



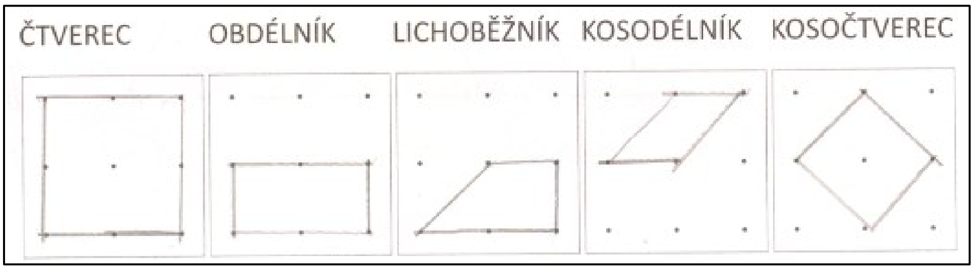
Další řešení.

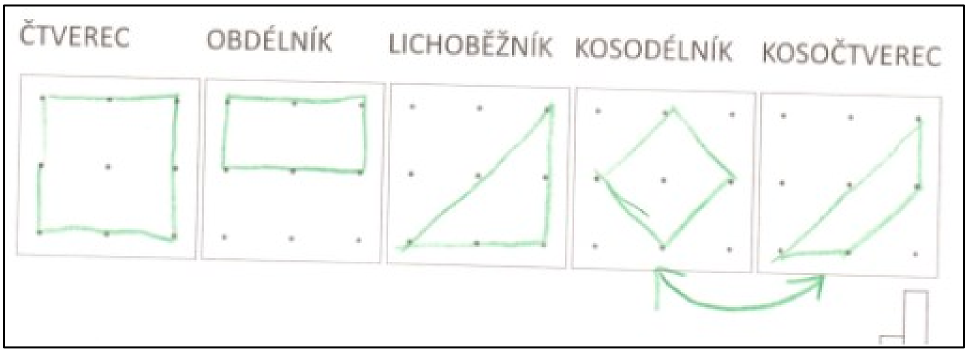
Ve dvou ukázkách žáci upozorňují na existenci stran a vrcholů mnohoúhelníku. Vidíme zde obvyklou fázi ukotvování pojmů z odborné matematické terminologie, kdy žáci vychází z vlastního pojmenování a nazývají vrcholy rohy.

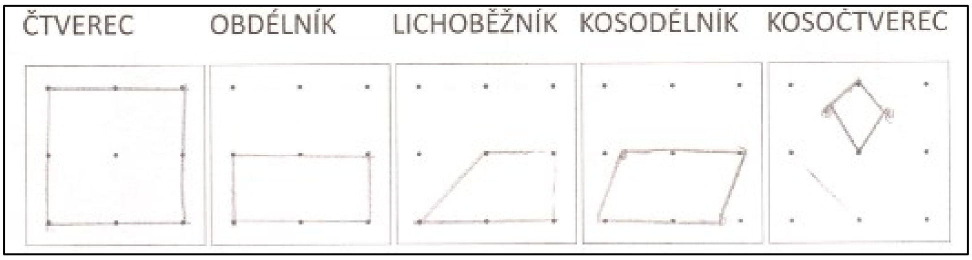


Někteří žáci se zaměřili na délky stran mnohoúhelníku.

P17 V3, úloha 3







Z řešení žáků vyplývá terminologická neukotvenost. Žáci zaměňují názvy některých geometrických útvarů. Objevuje se zde často se vyskytující chyba, kdy je čtverec považován za kosočtverec.

18 Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti popisuje zákonitosti týkající se takzvaných *náhodných jevů*: jevů, které mohou a nemusí nastat. Výsledků teorie pravděpodobnosti využívá matematická statistika. Vznik a rozvoj počtu pravděpodobnosti je spojen s hazardními hrami – například pravděpodobnost, jaký bude výsledek hodu hrací kostkou, ještě než hodíme. Edukační význam úloh zaměřených na předvídání a zkoumání situací v reálném životě je dán jejich značnou motivační hodnotou a potenciálem k rozvíjení logického myšlení žáků. Vhodné je využití motivačních her. Základní metodou řešení je myšlenková analýza možností, které v jednotlivých situacích mohou, nemohou nebo musí nastat. Žáci při řešení úloh experimentují, své odhady konfrontují s nastalou skutečností. Úlohy nevyžadují prakticky žádné předběžné matematické znalosti, pouze koncentraci a přemýšlení.

Očekávaný výstup RVP ZV pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů: žák

- řešením úloh rozvíjí své logické, respektive pravděpodobnostní myšlení,
- dovede uplatnit schopnost rozlišit pro danou situaci jev jistý, jev možný, jev nemožný a ilustrovat je na situacích z reálného života,
- uvědomuje míru nejistoty jevů, například při sázkových hrách a jiných formách hazardu.

Na příkladech z reálného života se žáci seznamují se základy pravděpodobnosti. U vzniklých situací (jevů) rozhodují, zda se jedná o jev jistý (musí nastat), možný (může nastat), nemožný (nemůže nastat). První situací je házení šestistěnnou kostkou ze hry „Člověče, nezlob se“. Žáci posuzují pravdivost tvrzení jednotlivých postav. Opírají se zde o vlastní zkušenost s házením kostky. Pokud tato zkušenost není dostatečná, je možné před započetím tématu s žáky hrát hry s využitím házení dané kostky. Jev nemožný je také ilustrován na hodu pěti kostkami a posouzení, zda může padnout součet 32. Při argumentaci lze připomenut vztah opakovaného sčítání několika stejných sčítanců a násobení. Házením mincí je využito pro situaci, kdy v případě, že jsou dvě možnosti, je pravděpodobnost jednoho z jevů rovna jedné polovině. Ve videu je tato skutečnost vyjádřena výrazy obvyklými pro běžnou mluvu (šance 50 na 50, fifty-fifty, šance jsou vyrovnané). V druhé části videa žáci posuzují míru pravděpodobnosti jevů z běžného života Pavlínky. Ukazuje se zde, že nejde o posouzení objektivních jevů, ale posouzení konkrétních situací, které jsou ovlivněny celou řadou dalších faktorů. Mnohé z nich si někdy ani neuvědomujeme, mnohé nedokážeme posoudit. V další části videa je řešena úloha hodu dvěma kostkami a určování součtu počtu ok na horní stěně kostky. Při posuzování pravdivosti pěti tvrzení jsou vyobrazeny všechny možné hody a následné součty při hodu dvěma kostkami. Vzhledem k tvrzením jednotlivých postav je na nich posléze demonstrováno, kdy se jedná o jev jistý, možný a nemožný. Zároveň je zde vizualizována míra pravděpodobnosti jednotlivých součtů, ale nenásleduje výpočet pravděpodobnosti. Žáci tak mohou intuitivně vnímat různou míru pravděpodobnosti i v rámci možného jevu.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. Posuzují míru pravděpodobnosti určitých jevů na různých situacích (náměty z běžného života, vytahování kuliček ze sáčku, házení mincí). V prvních úlohách na základě situací z reálného života žáci rozlišují, zda se jedná o jev jistý, možný, nemožný. Tuto skutečnost vybírají z předepsané nabídky. Ve V1, druhé úloze posuzují pravděpodobnost výběru daného ovoce (hruška, jablko) z košíku, kde je různý počet jablek nebo hrušek. Celá situace je zaznamenána do tabulky. Žák své rozhodnutí označí například křížkem v příslušném políčku. V třetí úloze V1 žáci přemýšlejí o pravděpodobnosti jevů, ve kterých jsou vybírány kuličky ze sáčků. Počet a barvy kuliček se mění. Ve čtvrté úloze žáci hází dvěma mincemi a prověřují, v kolika případech nastane situace, kdy alespoň na jedné minci bude líc. Nabídku všech možností mají žáci k dispozici. Důležitá je zde správná interpretace slova *alespoň*. V druhé variantě pracovních listů pracují žáci ve dvou úlohách s tématem výběru kuliček. V první situaci vybírají ze sáčku, ve kterém jsou kuličky dvou barev. Rozhodují se, o jaký jev se jedná. V druhém případě je úkolem rozhodnout o míře pravděpodobnosti popsaných jevů. Posuzují, které ze dvou dětí má větší šanci, že si vytáhne ze sáčku kuličku barvy, kterou si přeje. V třetí úloze žáci hází třemi mincemi a prověřují, v kolika případech nastane situace, kdy alespoň na dvou mincích líc padne líc a kdy na všech třech mincích padne stejná strana. Nabídku všech možností mají žáci k dispozici. Opět je zde důležitá správná interpretace slova *alespoň* a dobrá orientace v tabulce. V třetí variantě pracovního listu je druhá, třetí a čtvrtá úloha věnována tématu kola štěstí. Žáci posuzují míru pravděpodobnosti, že bude splněno přání dětí. Využito je zde barevných výsečí kruhu na kole štěstí. Ve všech případech posuzují velikost barevné části požadované barvy vzhledem k celku. V páté úloze V3 se jedná o hod dvěma kostkami a určení pravděpodobnosti, kdy vyjde součet 7 nebo součet 5. Jedná se o úlohu navazující na úlohu z videa. V úlohách šest, sedm a osm žáci vymýšlí situace pro jev jistý, možný a nemožný.

<u>Pomůcky</u>

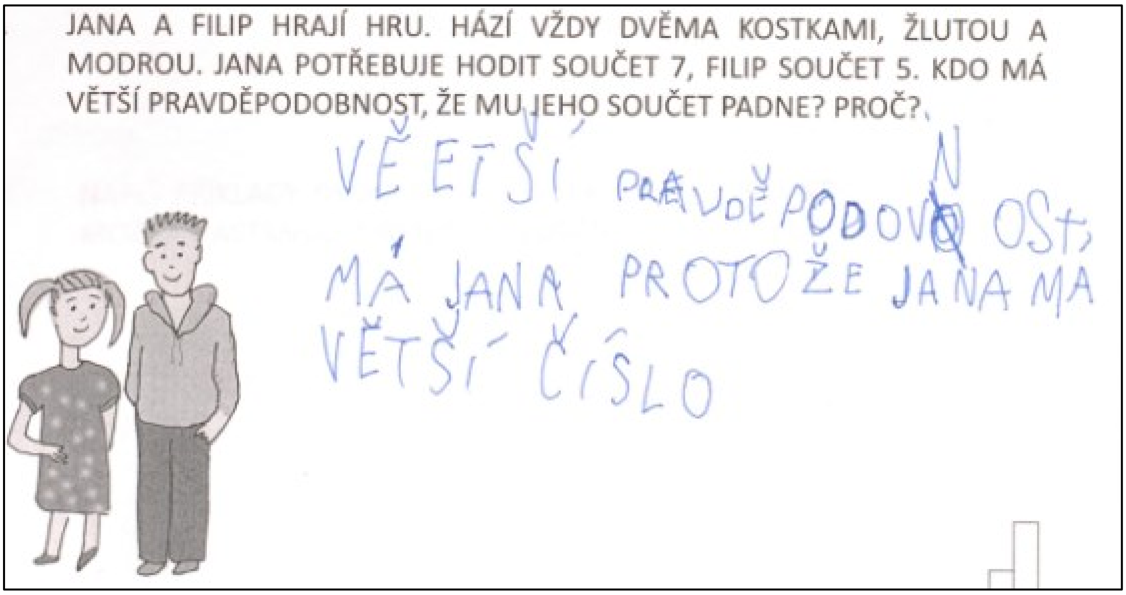
Alespoň dvě kostky pro každého žáka, mince. Pro práci s videem by bylo možné pro žáky připravit záznamový arch pro zápis svých rozhodnutí, vykopírovat obrázek z videa.

<u>Zkušenosti z ověřování</u>

Do posuzování pravdivosti situací se promítala zkušenost a široké znalosti žáků z různých oborů. V prvních úlohách, kdy žáci vyhodnocovali, zda se jedná o jev jistý, možný a nemožný, vstupovala výrazně do posouzení situací zkušenost žáků. Například ve V1, kde měli posoudit, zda každý den ráno svítá, uvedli, že v některých zemích ráno nesvítá. Z formulace zadání neplyne lokalizace místa na Zemi, pro kterou mají danou situaci posuzovat. Proto se stávalo, že někteří žáci posuzovali dané tvrzení vzhledem k situaci v České republice, jiní o ní uvažovali v širším kontextu. Byli schopni uvažovat o různých místech na naší planetě. Naopak pro některé žáky nebyl srozumitelný význam slova *„svítá“*. Při posuzování pravděpodobnosti, zda budou žáci odpoledne hrát tenis, vycházeli z osobní zkušenosti, vlastních plánů pro dané odpoledne. Proto se zde objevovalo vyhodnocení situace jako jevu jistého, možného i nemožného. V druhé úloze V1 a druhé, třetí a čtvrté úloze V3 žáci posuzovali míru pravděpodobnosti na základě obrázků. V druhé úloze varianty V2 bylo zadání pouze slovní, ale žáci si mohli danou situaci zakreslit a vyjít rovněž z obrázku. Tento postup může být nápomocný při rozhodování i u dalších úloh, zejména pokud se jedná o žáky s potřebou vizuální opory. V třetí variantě pracovního listu, třetí úloze žáci často uváděli, že větší pravděpodobnost má Zuzka. V této odpovědi se zrcadlí menší zkušenost žáků s prací se zlomky jako částí celku. Pro žáky je srozumitelné chápání jedné poloviny vyznačené jako polokruh (polovina kruhu). Obtížnější je chápání poloviny znázorněné jako dvě čtvrtiny, které jsou oddělené. Obdobná je situace pro čtyři osminy atd. V posledních úlohách pracovního listu V1 a V2 žáci posuzovali pravděpodobnost s využitím mincí. V druhé variantě zodpověděli žáci první část správně. Na druhou otázku týkající se vyjádření míry pravděpodobnosti uváděli odpovědi v procentech (20 %, 12 %). V některých případech uváděli, že pravděpodobnost je malá. Závěrečné úlohy v třetí variantě byly věnovány vlastní tvorbě žáků, kdy formulovali situace pro jev jistý, možný a nemožný. Odrážely se zde zkušenosti žáků z běžného života. Například jako jev jistý uvedli: „Nikdy nepřestanu mít rád rodiče, babičku s dědou.“

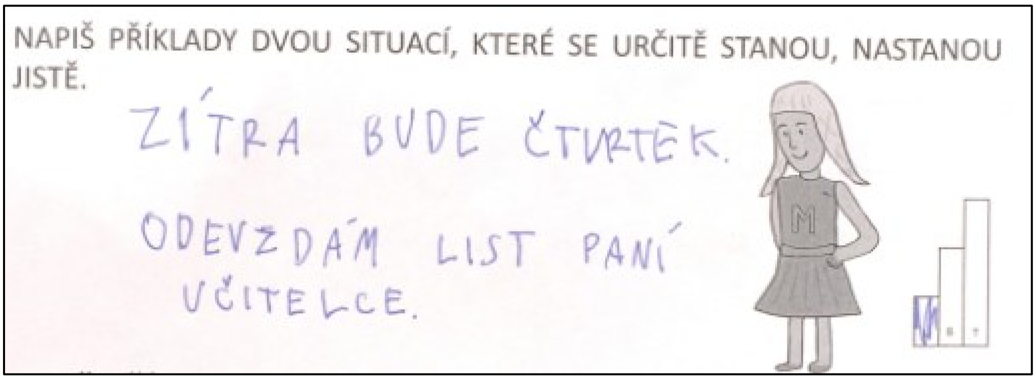
Ukázka žákovských řešení úloh

P18 V3, úloha 5



Žák sice odpověděl správně na otázku úlohy, ale jeho zdůvodnění není správné a dostatečně výstižné. Pro součet 7 existuje 6 možností, pro součet 5 pouze 4 možnosti. V takové situaci by bylo vhodné ověřování tohoto tvrzení. Uvažovat i o číslech, pro které pravidlo neplatí (například 12 je větší než 5, ale má menší pravděpodobnost, že padne).

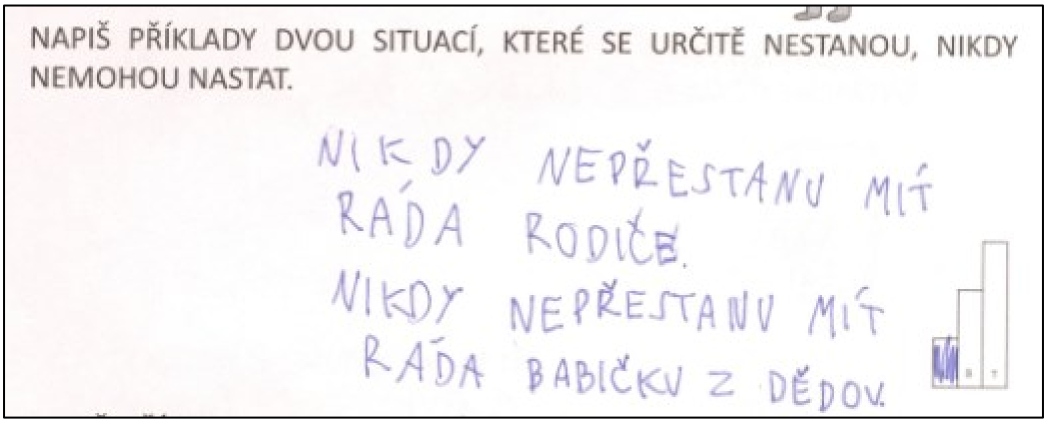
P18 V3, úloha 6


NAPIŠ PŘÍKLADY DVOU SITUACÍ, KTERÉ SE URČITĚ STANOU, NASTANOU JISTĚ.

ZÍTRA BUDE ČTVRTEK.

ODEVZDÁM LIST PANÍ UČITELCE.

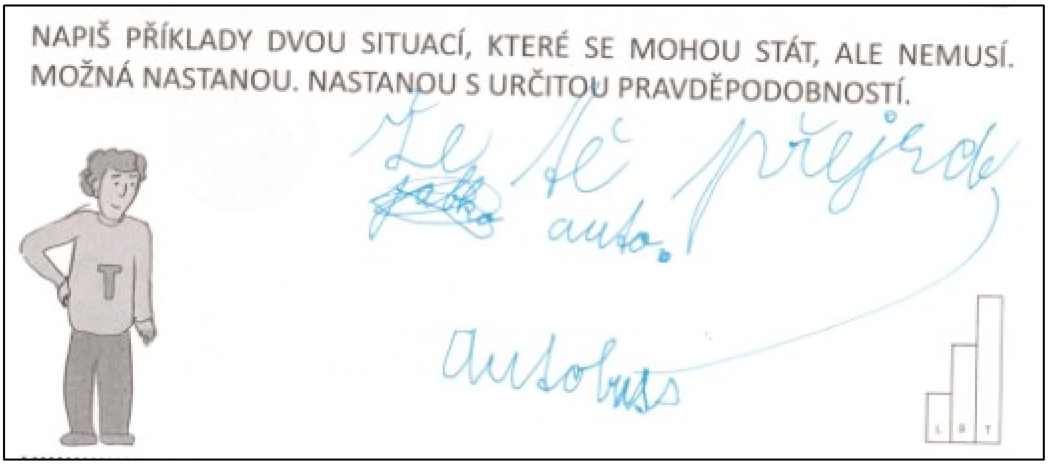
P18 V3, úloha 7


NAPIŠ PŘÍKLADY DVOU SITUACÍ, KTERÉ SE URČITĚ NESTANOU, NIKDY NEMOHOU NASTAT.

NIKDY NEPŘESTANU MÍT RÁDA RODIČE.

NIKDY NEPŘESTANU MÍT RÁDA BABIČKU Z DĚDOV.

P18 V3, úloha 8


NAPIŠ PŘÍKLADY DVOU SITUACÍ, KTERÉ SE MOHOU STÁT, ALE NEMUSÍ. MOŽNÁ NASTANOU. NASTANOU S URČITOU PRAVDĚPODOBNOSTÍ.

Že tě přejede ~~jatko~~ auto.

autobus

V řešeních úloh 6, 7, a 8 žáci vycházeli z vlastních zkušeností, z reálného života.

19 Figurální čísla, závislosti

Téma z oblasti teorie čísel vychází ze starořecké pythagorejské matematiky (Pythagoras ze Samu, 6. stol. př. n. l.). Zkoumání přirozených čísel, jejich vzájemných poměrů a závislostí umožňuje nacházet souvislosti geometrie a aritmetiky: soubory kamínků nebo jiných drobných předmětů o dané početnosti lze uspořádat do trojúhelníku, čtverce, obdélníku nebo pětiúhelníku a vytvářet takzvaná *figurální čísla.* Tento princip rozvíjí smysl žáků pro rytmus a pravidelnost, je propedeutikou posloupnosti. Zkoumání různých figurálních čísel má značnou motivační hodnotu.

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- popisuje jednoduché závislosti z praktického života,
- doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel,
- rozeznává sudá a lichá čísla.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- získává první vhled do problematiky figurálních čísel jako vzájemné souvislosti geometrických a aritmetických poznatků,
- s využitím modelu obdélníkových figurálních čísel si vytváří představu sudého a lichého čísla,
- odhalí zákonitost, podle které je sestavena daná posloupnost a dokáže ji vhodně doplnit na základě využití dosavadních znalostí i kreativity.

V tématu vycházíme z pythagorejské matematiky, kde vytváříme obrazce čísel pomocí geometrických útvarů. Jedná se zde o propojení aritmetiky s geometrií. Postupně se žáci seznamují se čtvercovými, trojúhelníkovými a obdélníkovými čísly. Nejprve žáci pomocí manipulativních činností vytvářejí obrazy čísel prostřednictvím geometrických obrazců a postupně přicházejí na princip, jak vytvořit každý další obrazec. Zároveň tím dostávají posloupnost čísel, ve kterých mohou sledovat vzniklou zákonitost. Jedná se o dobrý příklad propojení geometrického a aritmetického chápání objektů, závislostí, čísel. Je to tedy vhodný postup pro prvopočáteční objevování abstraktních vztahů, podporu argumentace. Žáci se snaží z různého počtu kamínků vytvářet obdélníky, které mají jednu stranu o dvou kamíncích se zachováním pravidla vytváření obdélníků. Objevují zde, že z některého počtu kamínků obdélník sestaví, z některého počtu nesestaví. Na příkladu obdélníkových čísel se tak seznámí s pojmy sudého a lichého čísla. Poslední úloha je zaměřena na chápání funkčních závislostí. Žáci zkoumají princip kouzelné skříňky, přičemž objevují potřebnou závislost pro zadaná čísla. Mohou objevovat různé postupy řešení. Jsou zadána čísla, která si lze volit, což chápeme jako nezávisle proměnnou. Hledají čísla, tj. závisle proměnnou, pro kterou by mohli objevit předpis.

Téma figurálních čísel a závislostí se dotýká matematického pojmu posloupnost. Při formulaci zadání úloh bylo často použito slovního spojení „doplň řadu čísel". V těchto úlohách se však nejedná o chápání řady čísel v matematickém slova smyslu (nekonečné řady: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$). Z důvodu jazykové srozumitelnosti pro žáky prvních tříd bylo použito slovní spojení „řada čísel" ve smyslu posloupnosti čísel. Zadání úloh je formulováno tak, aby žáci mohli hledat řešení s oporou o názor (kreslení, modelování). Jsou zařazeny také úlohy, které poskytují prostor pro kreativitu žáků, v nichž vytváří vlastní pravidla pro pokračování posloupností. Důležitá je zde podpora pro autonomní hledání vztahů mezi čísly. Proto je nezbytné u každé úlohy porozumět argumentům žáků pro vytvoření jejich vlastního pravidla.

Po zhlédnutí videa žáci pokračují prací v pracovních listech. V prvních úlohách žáci hledají pravidla pro vytváření řady (posloupnosti) čísel. Využívají při nich matematických operací nebo princip opakování. Jsou použity úlohy, ve kterých žáci najdou dvě „řady čísel" vložené do sebe. Například v „řadě čísel" 15 16 14 15 13 14 12 můžeme vidět „řady" 15, 14, 13, 12, … a 16, 15, 14, … Jednotlivé varianty jsou odlišeny mírou obtížnosti. S nejtěžší úlohou se setkávají ve variantě V3 pracovního listu, kde musí chápat zapsaná čísla jako čísla dvouciferná, a to i přesto, že nejsou psána s obvyklými mezerami mezi dvoucifernými čísly. Tuto „číselnou řadu" 1 9 2 0 1 8 1 9 1 7 vidíme jako 19, 20, 18, 19, 17, 18, 16, 17 a vytváříme „řadu" s využitím principu dvou vnořených „řad" 19 **20** 18 **19** 17 **18** 16 **17**. Druhé úlohy jsou zaměřeny na posloupnosti, kdy v první fázi jde o zjištění počtu všech objektů nebo „řad" v daném uskupení. Následně jsou žáci vedeni k výpočtu dalších údajů, při kterém mohou využít velkou škálu postupů. Od práce s náčrtkem, manipulativní činnosti až po různou míru elegance výpočtu. V první a třetí variantě jsou motivováni návštěvou divadla a v druhé variantě stavěním stavby z kostek. V třetích úlohách žáci pracují s mocninami čísla 2. Ve variantě V1 počítají počet míčků po pěti pádech. Ve variantě V2 a V3 zjišťují, po kolika pádech získají určitý počet míčků. Ve čtvrtých úlohách žáci vytvářejí geometrické vzory. Zde mohou chápat stávající ornament jako jeden celek či jednotlivě. Dochází tak ke dvěma různým řešením. Cílem úlohy je zároveň procvičit jemnou motoriku, dovednost provést náčrtek s určitou mírou přesnosti při zachování důležitých vlastností útvarů (směr čar, jejich zakřivení). Ve variantě V2 pracovního listu žáci pracují se tvarem čtverce ve dvou různých polohách, kdy v druhém z případů žáci často chápou daný útvar jako kosočtverec. Proto je vhodné doprovodit řešení úlohy diskusí o daných útvarech, vlastnostech čtverce. To může zároveň žákům pomoci při načrtávání útvarů. Například dodržení pravého úhlu a shodnosti stran. V pátých úlohách se jedná o doplnění funkčních závislostí. Mohou využít různé přístupy k řešení. Buď sledují pouze čísla ve spodním řádku, nebo objeví funkční předpis pro vztah čísel v horním a spodním řádku. V šestých úlohách pokračují v nakresleném vzoru v tečkované síti. Žáci se zde orientují v rovině pomocí bodů v síti. Jedná se o posunutí, nově nakreslené útvary by měly být shodné se vzorem. Žáci zde opět procvičují jemnou motoriku i geometrickou představivost. Bodová síť může pomoci v orientaci v rovině, zejména při odpočítávání teček v řádcích a sloupcích při hledání potřebných bodů. V sedmých úlohách žáci objevují pravidla pro vyloučení jednoho z nabízených čísel. Nemusí zde jít pouze o vytváření „řady“ čísel, ale i o hledání jiných vlastností. Při řešení úloh záleží na matematických znalostech žáků i jejich kreativitě. Žáci jsou zároveň vedeni k verbalizaci a zapsání svých argumentů i hledání různých řešení.

Pomůcky

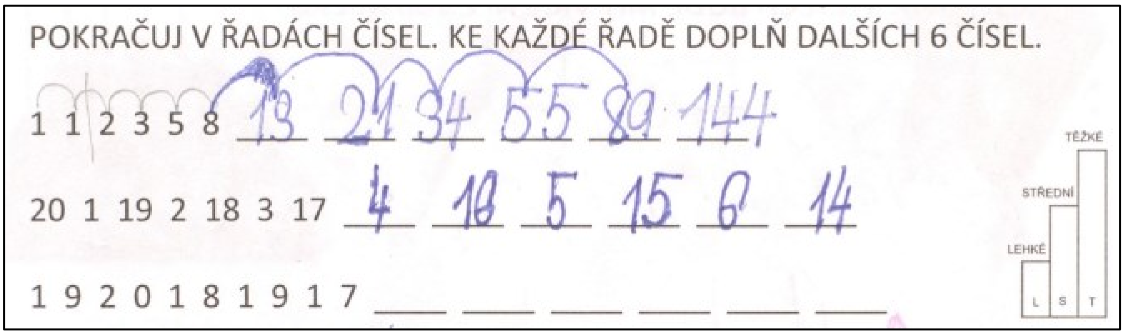
Míčky, kostky, drobné předměty ke znázorňování situací, bodová síť, prázdné tabulky k zápisu čísel v kouzelné skříňce.

Zkušenosti z ověřování

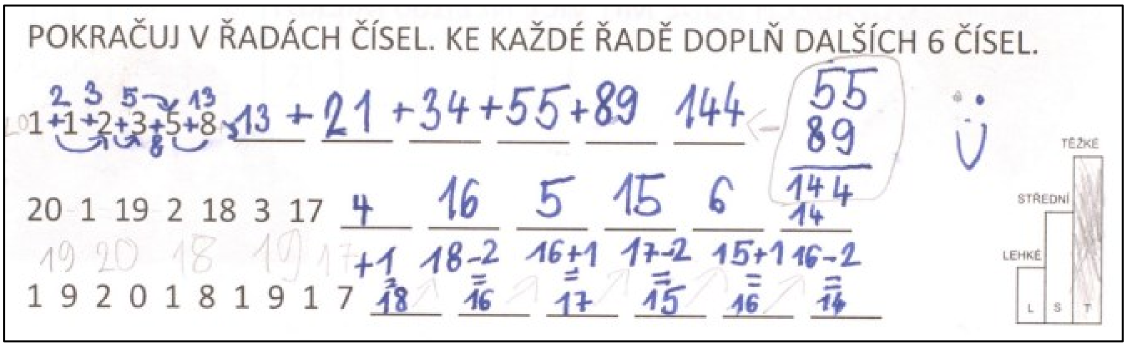
Téma je pro žáky náročné, ale podnětné. V prvních úlohách se nepodařilo všem žákům objevit pravidlo pro tvorbu všech tří číselných řad (posloupností). Nejobtížnější se ukázala poslední číselná „řada“ v třetí variantě, kde musí žáci uvažovat o seskupení zapsaných cifer jako zápisu dvouciferných čísel. Při vyhledávání závislostí žáci nejčastěji využívali operaci sčítání. V mnoha případech se objevovaly chyby při sčítání do 100. V druhých úlohách se ukázala jako nejvyšší úspěšnost řešení při využití zápisu počtu sedadel nebo kostek v jednotlivých řadách. Úlohy žáci často řešili i zakreslením jednotlivých řad sedadel a následným součtem počtu objektů v jednotlivých řadách. V třetích úlohách si žáci kreslili míčky pro jednotlivé pády nebo si psali řadu mocnin čísla dvě (2, 4, 8, 16, 32, 64) případně oba postupy kombinovali. Vyskytla se také situace, kdy žák započítal i první schod. Zacílil tak na počet schodů, ne pádů. Místo šesti pádů pak počítal se sedmi. Ve čtvrtých úlohách žáci chápali stávající ornament jako jeden celek či jednotlivě. V druhé variantě pracovního listu se ukázalo jako náročné zakreslení čtverce s vodorovnou úhlopříčkou. Žáci často nerespektovali kolmost sousedních stran, a tím pádem zakreslovali kosočtverec. Nutná je proto diskuse nad geometrickými útvary a jejich vlastnostmi. V některých případech pokračovali při vytváření ornamentu ve svislém směru. Většinou ale využívali vodorovný směr. V páté úloze v první variantě si někteří žáci všimli, že se jedná o lichá čísla, někteří „že to jde po dvou“. V jedné z dalších úloh žáci hledali vztahy mezi vstupními a výstupními čísly v tajné skříňce. Mohli tak objevovat funkční závislost $2x - 1$. Žáci ji samozřejmě nevyjadřovali matematickým zápisem, ale například slovy „k číslu přičtu číslo o jednu větší“, což můžeme vyjádřit ve tvaru $x + (x + 1)$. V druhé variantě někteří žáci objevili závislost mezi čísly v druhém řádku „všechno je o tři víc“. Jiný žák sledoval vztah čísel ve sloupcích, který vyjádřil vztahem „přičítám lichá čísla“. Tím objevil ekvivalent k závislosti $3x - 1$ v podobě vztahu $x + (2x - 1)$. V šestých úlohách byly některé tvary pro žáky složité. Žáci mají problémy s grafomotorikou. Někteří žáci pokračovali přímo v daném vzoru, někteří „s mezerou“. Žákům se dařilo překreslovat vzory s různou mírou přesnosti. V sedmých úlohách žáci využívali různých matematických operací i vztahů. Většinou zdůvodnili, proč dané číslo vyřadili. Často vytvářeli příklady na sčítání. Například 5 + 10 = 15, 7 + 9 = 16. Velmi často se vyskytla kreativní řešení. Například v druhé variantě „devět nemá desítku“, v třetí variantě „36 jde jediné dělit dvěma“.

<u>Ukázka žákovských řešení úloh</u>

P19 V3, úloha 1

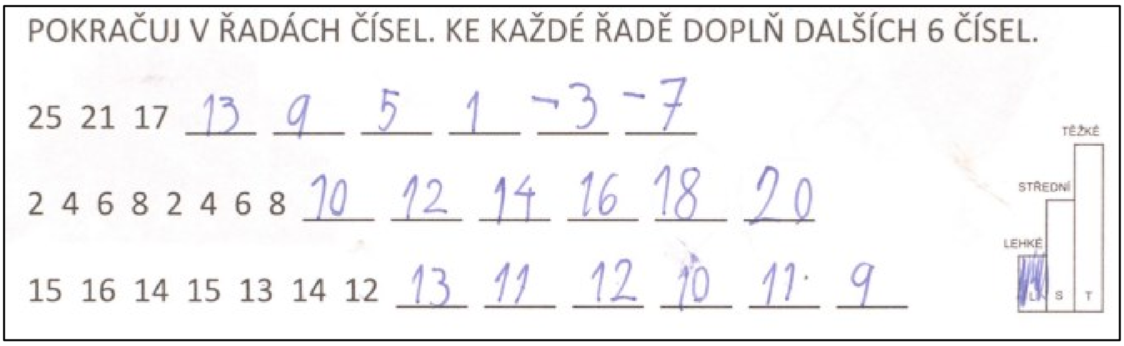


V první „řadě“ žák naznačuje vztahy mezi sousedními čísly pomocí obloučků, kterými znázorňuje sčítání dvou sousedních čísel. V druhé „řadě“ dokázal kombinovat dvě „řady“ vložené do sebe. Jednu sestupnou a druhou vzestupnou. Zákonitost třetí „řady“ neodhalil.



V první „řadě“ žák naznačuje vztahy mezi čísly pomocí znaménka pro sčítání v kombinaci s šipkami. Druhou „řadu“ řešil správně, poznal dvě do sebe vložené „řady“. Jednu sestupnou, druhou vzestupnou. I přesto, že v třetí „řadě“ jsou číslice zapsány ve stejné vzdálenosti, žák v nich uviděl dvojciferná čísla a dvě sestupné „řady“ vložené do sebe.

P19 V2, úloha 1



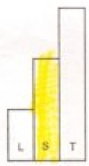
Je zajímavé, že žák v první „řadě“ čísel dokázal pracovat se zápornými čísly. V druhé „řadě“ se žák nechal ovlivnit vzestupnou „řadou“ sudých čísel. Nepokračoval v opakování vzestupné „řady“ čtyř sudých čísel. V třetí řadě dokázal kombinovat dvě sestupné „řady“ vložené do sebe.

P19 V3, úloha 1

SAM MÁ KOUZELNÝ STROJ. KDYŽ DO NĚJ VHODIL ČÍSLO 2, VYPADLO MU ČÍSLO 11. KDYŽ VHODIL ČÍSLO 4, VYPADLO ČÍSLO 21. ODHAL, CO STROJ S KAŽDÝM ČÍSLEM UDĚLÁ, A DOPLŇ TABULKU.

1	2	3	4	5	6	7
6	11	16	21	26	31	36

NAPIŠ PRAVIDLO: Stroj každé vhozené číslo zvětší o 5 více.



Jiné pravidlo.

NAPIŠ PRAVIDLO: ŽE TO SKÁČE PO PĚTI.

V obou zdůvodněních si žáci všímají vztahů pouze mezi čísly v dolním řádku. Co se „děje“ s čísly vhozenými do stroje, tj. funkční závislost mezi čísly v prvním a druhém řádku, neodhalili.

20 Šifry

Závěrečné téma bylo zařazeno jako příležitost pro integraci žákovských poznatků z různých oborů (matematika, jazyk, biologie, vesmír). Využívá znalostí ze školní i mimoškolní zájmové činnosti dětí, které se mohou uplatnit v různých podobách úloh: šifry, kódy, křížovky, tajenky, „luštěnky“. Úlohy mají velký motivační potenciál. Jsou náročné z pohledu rozvoje kognitivních kompetencí, koncentrace na řešení netradičních úkolů, systematičnosti, vytrvalosti.

<u>Očekávaný výstup RVP ZV</u> pro 1. stupeň ZŠ je k danému tématu formulován takto: žák

- řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

<u>Rozšířené výstupy při použití souboru podnětných materiálů:</u> žák

- rozvíjí svůj osobnostní potenciál při postihování interdisciplinárních souvislostí,
- rozvíjí schopnost vzájemného zpracování dvou kódovacích systémů (jazykové prostředky a aritmetické symboly) a tím propojuje čtenářskou a matematickou gramotnost.

<u>Pomůcky</u>

Nůžky na vystřižení dílků, vytvoření kartiček.

<u>Zkušenosti z ověřování</u>

Pro úspěšné řešení úloh se ukázala jako klíčová úroveň čtenářské gramotnosti a všeobecný rozhled žáků. Pokud žáci nedokázali identifikovat a pojmenovat zvířata, nemohli v práci pokračovat. V návaznosti na dosavadní zkušenosti a znalosti žáků by bylo vhodné mít připravené encyklopedie či jiné materiály, kde si mohou žáci chybějící informace vyhledat. Ukázalo se značně obtížné vyhledávat princip kódování textu. Vyhledání odlišností, nalezení systému. Na základě zkušeností z ověřování považujeme za vhodné umožnit žákům řešit úlohy ve skupinách. Při doplňování křížovek se ukázalo jako problematické vyjádřit symbolický matematický zápis slovním vyjádřením. Pro některé žáky bylo obtížné z jednotlivých indicií objevených v úlohách sestavit závěrečnou tajenku.

III. Závěr

Metodický text má učitelům a učitelkám 1. ročníků základní školy poskytnout oporu při práci se souborem podnětných materiálů k rozvoji akcelerovaných žáků. Multidisciplinární zaměření učitelské profesní přípravy i vysoká úroveň jejich pedagogických kompetencí jsou dobrým předpokladem pro úspěšné využívání předložených materiálů. Autorky byly vedeny snahou o maximální srozumitelnost textu a vyváženost jeho matematické a metodické stránky. Krátké odborné pasáže v úvodu jednotlivých témat mají uživatelům danou problematiku pouze pomoci zasadit do matematického kontextu. Smyslem metodiky je především komentovat postup tvorby videí i pracovních listů, a zprostředkovat tak úvahy autorek uživatelům. Odstavce věnované zkušenostem z ověřování a ukázky žákovských řešení jsou zase námětem ke konfrontaci s vlastními poznatky učitelů a učitelek.

Vedle tradičních témat primární matematiky byla zařazena některá témata neobvyklá, s vyšším motivačním potenciálem, v nichž mohou „nadaní prvňáčci“ adekvátněji uplatnit své schopnosti a dovednosti. Například téma Mince a bankovky je zaměřeno na seznámení se základy finanční gramotnosti, téma Osová souměrnost a Tělesa na rozvoj prostorové představivosti, také s využitím počítačového programu Geogebra. Také úlohy z kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti, číselné a logické hrátky, jednoduché logické úlohy typu „zebra“, práce s uzlovými grafy, jednotažky, algebrogramy. Mají akcelerované žáky plně zaujmout, ukázat jim zajímavost matematiky a krásu matematického poznání.

Za významný moment pro práci akcelerovaného žáka s videi i pracovními listy lze považovat vytvoření prostoru k jeho přemýšlení. Žáci mají možnost pustit si videa na svém tabletu opakovaně. Není nutné, aby si vše zapamatovali ihned. Učí se tak vyhledávat potřebné informace a pracovat s nimi. Bádání, zkoumání a objevování jsou aktivity typické pro nadané žáky a je třeba k tomu vytvořit dostatečný časový i prostorový rámec. S některými pracovními listy bude možné pracovat on-line prostřednictvím webového rozhraní, jiné bude možné stáhnout, vytisknout a zpracovávat přímo ve třídě. S úlohami lze pracovat v sadě prezentované pracovním listem, rozdělit je do skupin nebo je zařazovat jednotlivě jako samostatnou práci. Úlohy vyžadují jistou úroveň čtenářské gramotnosti, čtenářské dovednosti dětí mají usnadnit texty úloh napsané velkými tiskacími písmeny. V případě potřeby je možná a vítaná dopomoc ze strany učitele nebo asistenta pedagoga tak, aby výkon žáka nebyl negativně ovlivněn problémy souvisejícími s organizací výuky ve třídě, nebo s neporozuměním zadání úloh a mohl se plně rozvíjet jeho potenciál. Učitelé budou díky analýze výkonu žáků v pracovních listech moci pravidelně a průběžně sledovat a vyhodnocovat jejich pokrok i proces učení.

Tvorba videí a pracovních listů ve finální podobě představovala dlouhodobou práci, která se nemohla obejít bez průběžného zohledňování připomínek a korekcí ze strany učitelů a učitelek participujících na projektu. K ověřování podpory nadaných prvňáčků prostřednictvím zpracovaných materiálů bylo využito několika zdrojů: osobních rozhovorů s učiteli, komentářů učitelů přímo do pracovních listů žáka, hospitačních protokolů z výuky, průběžné vyplňování elektronických dotazníků k jednotlivým materiálům lekcí a práci s nimi.

Pedagogické reflexe jednotlivých učitelů a učitelek přispěly k odhalení toho, s jakými obtížemi, problémy a výzvami se při realizaci úloh mohou setkat. Těmito zjištěními byla zpracovaná metodika průběžně obohacována. V průběhu ověřování jsme získaly množství zkušeností jak k obsahu a nastavené obtížnosti úloh, tak k obecnějším pedagogickým aspektům. Zajímavá zjištění přinesly například poznatky o tom, jak byla realizovaná individualizovaná výuka; jak se změnila atmosféra ve třídě, když vybraný žák/vybraná žákyně pracoval/a individuálně s tabletem; jak se dařilo do práce s pracovními listy zařadit manipulační aktivity s pomůckami (ze složek s pomůckami k realizaci projektu); jak učitelé posuzovali a hodnotili vhodnost témat a obtížnost úloh.

Autorky děkují RNDr. Evě Zelendové, Ph.D., za pečlivou revizi textu a řadu připomínek, které přispěly k jeho zkvalitnění.

Závěrem nezbývá než popřát učitelům a učitelkám, uživatelům rozvojového modulu, pracovních listů, videí i metodické příručky, aby se jim tyto materiály staly dobrým pomocníkem v práci s „nadanými prvňáčky“. A popřát „nadaným prvňáčkům“, aby je úlohy zaujaly, ukázaly jim matematiku pěknou a užitečnou. Aby našly své místo při jejich osobnostním rozvoji, byly jim průvodci na jejich vzdělávací cestě. S tímto záměrem a přáním byly úlohy vytvářeny.

**Rozvíjení matematické gramotnosti
s využitím inovativního modulu
systematického rozvoje akcelerovaných žáků 1. až 3. tříd**

Metodický text pro učitele

PhDr. Eva Nováková, Ph.D.
RNDr. Růžena Blažková, CSc.

Vydala Masarykova univerzita, Žerotínovo nám. 617/9, 601 77 Brno
1., elektronické vydání, 2022

ISBN 978-80-280-0271-8

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

MUNI
PRESS

MUNI
PED