# DIDAKTIKA MATEMATIKY

## se zaměřením na specifické poruchy učení

Růžena Blažková

Masarykova univerzita
Brno 2017

muni
PRESS

Matematika
a didaktika matematiky

# DIDAKTIKA MATEMATIKY

## SE ZAMĚŘENÍM NA SPECIFICKÉ PORUCHY UČENÍ

Růžena Blažková

Masarykova univerzita
Brno 2017

Edice: Matematika a didaktika matematiky
Svazek 2

Recenzovali:
doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.
RNDr. Květoslava Matoušková, CSc.



ISBN 978-80-210-8674-6
ISBN 978-80-210-8673-9 (brožováno)

https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-8674-2017

# Obsah

# ÚVOD

Milé studentky, milí studenti,

dostáváte do rukou text, který je věnován poruchám učení v matematice. Ve vaší budoucí praxi se budete setkávat s dětmi, u kterých se projevují problémy se čtením, psaním, počítáním, a přitom tyto děti mohou být průměrně až nadprůměrně nadané. Procento dětí s výukovými problémy se na základních školách neustále zvyšuje. Mohou to být děti, u kterých je diagnostikována některá ze specifických poruch učení nebo chování. Tyto děti potřebují odbornou speciálně pedagogickou pomoc, pochopení vyučujícího příslušného předmětu i pochopení rodičů. Přitom při práci s dětmi se specifickými poruchami učení je třeba nezanedbat ani podíl samotného dítěte na nápravě i na výuce.

Učební text je určen studentům magisterského studia speciální pedagogiky (prezenční i kombinované formy), kteří mohou ve své profesi poskytovat poradenskou činnost v oblasti poruch učení, v tomto případě zejména dyskalkulie. Dále je text určen studentům učitelství matematiky pro první i druhý stupeň ZŠ. V odborné literatuře je možné nalézt mnoho názorů na možnosti poskytování péče dětem s diagnostikovanou dyskalkulií. Mohou vycházet z přístupů medicínských, psychoterapeutických, speciálně pedagogických, psychologických či pedagogických. Zpravidla není možné uplatňovat jednotlivé přístupy izolovaně, ale ve většině případů je potřebný komplexnější pohled na dítě a jeho problémy. Návrhy reedukačních postupů, které jsou uvedeny v učebním textu, vycházejí z pohledů pedagogických, avšak respektují přesnou výstavbu matematických pojmů v jejich návaznosti. I když text obsahuje minimum matematické teorie, měl by vést k zamyšlení nad matematickou správností používaných postupů, aby nebyly v rozporu s matematickou teorií a nezpůsobovaly tak dětem další problémy v budoucím studiu.

Publikace vznikla na základě mnohaletých zkušeností z práce s dětmi, u kterých se projevovaly specifické poruchy učení. Doporučované postupy ve většině případů přispěly k nápravě matematických potíží i ke zlepšení vztahu k matematice a měly mezi učiteli i rodiči příznivý ohlas. Uvedené nápravné postupy se zejména opírají o tyto zásady:

- Provedení řádné diagnostiky problémů dítěte z hlediska jeho matematických schopností, dovedností a znalostí.
- Respektování skutečnosti, že vytváření matematických poznatků je nepřenosné, každé dítě se k nim dostává na základě svých vlastních manipulativních činností a myšlenkových pochodů.
- Nalezení tzv. *těžištního bodu*, od kterého je třeba nápravu začít.
- Nápravné a reedukační postupy se v první fázi opírají o pochopení daného jevu. Přitom dítě může mít své vlastní specifické přístupy k vytváření a pochopení matematických pojmů.

- K pochopení učiva se využívá ve velké míře manipulativních činností a navození *AHA efektu*.
- Pamětné zvládnutí nezbytného učiva se realizuje až ve druhé fázi výukového procesu, poté, kdy dítě pochopí význam jednotlivých pojmů a operací.
- Nápravné postupy je třeba provádět po malých krocích, aby se dítě nezahltilo přílišným množstvím učiva.
- Je třeba respektovat vlastní přístupy dítěte k jednotlivým pojmům a postupům výpočtů a nevnucovat mu postupy vlastní dospělému.
- Vždy je třeba dát dítěti pocit úspěchu.
- Humor a pozitivní nálada přispívají ke snadnějšímu učení.

Včasná diagnostika a včasné odhalení příčin problémů sledovaného dítěte v matematice, pochopení jeho vlastních myšlenkových pochodů a nalezení vhodných postupů právě pro toto dítě je jedním z předpokladů úspěchu. Přitom rozhodujícími činiteli v tomto procesu jsou dítě samotné, jeho učitelé, jeho rodiče eventuálně prarodiče a také vhodné výukové metody.

Jednotlivé kapitoly jsou zaměřeny k hlavnímu cíli, tj. jak se matematické pojmy postupně vytvářejí v mysli dítěte a jak je možné přispívat k jejich zvládnutí dětmi, u kterých se projevují specifické poruchy učení. První část textu uvádí obecnější informace o specifických poruchách učení a vývoji pohledů na ně, klasifikaci poruch učení i klasifikaci dyskalkulie. Další kapitoly jsou zaměřeny na jednotlivé části učiva matematiky. Jsou uvedeny nejčastější projevy poruch a možné postupy při nápravě. Jde o pochopení pojmu přirozené číslo a operací s přirozenými čísly, pochopení pojmu zlomek, pojmu desetinné číslo a číslo záporné. Pozornost je věnována problematice matematické a finanční gramotnosti jedinců se specifickými poruchami učení. Jednotlivé kapitoly jsou doplněny kontrolními úkoly.

Nabízené postupy nelze chápat jako kategorická doporučení nebo direktivní předpisy, i když se při práci s dětmi častokrát osvědčily. Je třeba respektovat individualitu každého dítěte i každého učitele. Avšak výuka matematiky vyžaduje určitý řád a respektování návazností učiva. Každý učitel si volí své vlastní přístupy podle individuálních potřeb dítěte a podle svých osvědčených zkušeností. Metody a formy práce maximálně využívají kreativitu učitelů i dětí, pokud přinášejí výsledky v matematickém vyučování.

Učební text je zpracován jako studijní materiál, poukazuje na možné příčiny problémů žáků v matematice a uvádí některá reedukační cvičení. Vzhledem k důležitosti matematiky pro každého člověka v jeho profesi i v běžných životních situacích je třeba zamýšlet se nad tím, jak všem žákům studium matematiky zpřístupnit a zpříjemnit.

Autorka děkuje recenzentům RNDr. Květoslavě Matouškové, CSc. a doc. PhDr. Bohumilu Novákovi, CSc. za velmi cenné rady a připomínky, kterými výrazně přispěli ke zkvalitnění textu.

RNDr. Růžena Blažková, CSc.

# – 1 – SPECIFICKÉ PORUCHY UČENÍ

Problematika specifických poruch učení a vzdělávání žáků se specifickými vzdělávacími potřebami je aktuálním tématem jak školy, tak mnoha rodin. Neustále se zvažuje problematika vzdělávání dětí se specifickými vzdělávacími potřebami v souvislosti s jejich zařazením do speciálně zaměřených škol nebo tříd, nebo se vzděláváním inkluzívním. Inkluzívní vzdělávání žáků s poruchami učení v běžných třídách základních i středních škol vyžaduje kvalifikovaný přístup pedagoga a jeho schopnost realizovat diferencovanou a individualizovanou výuku těchto žáků.

V minulosti (v první polovině dvacátého století) nebyla problematice specifických poruch učení věnována přílišná pozornost. Žáci, u kterých se projevovaly problémy v učení, byli řazeni do dvou až tří skupin – buď jim to prostě „nešlo“, nebo byli považováni za hloupé, případně za líné. Přitom se řádně připravovali na vyučování a zvládání školních povinností vyžadovalo nepřiměřeně mnoho času a úsilí. Častokrát se problémy vyskytovaly v jednom předmětu a v ostatních předmětech dosahovali tito žáci průměrných až nadprůměrných výsledků. Avšak i v této době se mnoho učitelů matematiky snažilo hledat postupy, které by žákům s problémy s učením se matematice a se zvládnutím učiva usnadnily.

Z historického hlediska se již od starověku, např. při výuce trivia, hledaly metody, které by žákům, kteří měli se zvládáním těchto základů problémy, při vzdělávání napomohly. Mnoho význačných vědců a pedagogů v dalších obdobích věnovalo pozornost žákům, kteří měli výukové problémy a přitom byli intelektově na dobré úrovni. Patří mezi ně např. Erasmus Rotterdamský (1567–1636), Jan Ámos Komenský (1592–1670), John Locke (1632–1704), Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827), Johann Friedrich Herbart (1776–1841) a mnoho dalších. Zhruba od roku 1830 začínají být studovány poruchy chování, poruchy čtení a poruchy psaní při normálních rozumových schopnostech dětí (Zelinková, 2003). Z našich vědců a pedagogů, kteří se poruchám učení věnovali, uveďme alespoň O. Chlupa, Z. Matějčka, L. Košče, J. Langmaiera, Z. Žlaba, ze současných např. M. Vítkovou, M. Bartoňovou, V. Pokornou, O. Zelinkovou, J. Nováka. Velká pozornost dyskalkulii je věnována i učiteli katedry matematiky Pedagogické fakulty v Brně.

Specifické poruchy učení začaly být systematicky studovány psychology a speciálními pedagogy v minulém století. V roce 1976 vydal Úřad pro výchovu v USA definici specifických vývojových poruch učení v tomto znění:

> „Specifické poruchy učení jsou poruchami v jednom nebo více psychických procesech, které se účastní porozumění nebo užívání řeči, a to mluvené i psané. Tyto poruchy se mohou projevovat v nedokonalé schopnosti naslouchat, myslet, číst, psát nebo počítat. Zahrnují stavy, jako je např. narušené vnímání, mozkové poškození, lehká mozková dysfunkce, dyslexie, vývojová dysfázie.“ (Matějček, 1993, s. 24)

Mezi významné osobnosti ve výzkumu dyslexie a specifických poruch učení patří americký dětský psychiatr Samuel Torrey Orton (1870–1948), který se zabýval příčinami a léčbou dyslexie. Pro žáky s dyslexií vytvořil škálu učebních postupů. Na jeho počest byla jeho kolegy založena Ortonova dyslektická společnost se sídlem v USA. Skupina expertů Národního ústavu zdraví ve Washingtonu spolu s experty Ortonovy společnosti a dalších institucí formulovala v roce 1980 následující definici:

> „Poruchy učení jsou souhrnným označením různorodé skupiny poruch, které se projevují zřetelnými obtížemi při nabývání a užívání takových dovedností, jako je mluvení, porozumění mluvené řeči, čtení, psaní, matematické usuzování nebo počítání. Tyto poruchy jsou vlastní postiženému jedinci a předpokládají dysfunkci centrálního nervového systému, i když se porucha učení může vyskytovat souběžně s jinými formami postižení (např. kulturní zvláštnosti, nedostatečná nebo nevhodná výuka, psychogenní činitelé), není přímým následkem takových postižení nebo nepříznivých vlivů.“ (Matějček, 1993, s. 24)

V roce 1992 byly v 10. revizi *Mezinárodní klasifikace nemocí* uvedeny v oddíle F 80 až F 89 Poruchy psychického vývoje a v části F 81 Specifické vývojové poruchy školních dovedností:

F 81.0 Specifické poruchy čtení
F 81.1 Specifické poruchy psaní
**F 81.2 Specifické poruchy počítání**
F 81.3 Smíšená porucha školních dovedností
F 81.8 Jiné vývojové poruchy školních dovedností
F 81.9 Vývojové poruchy školních dovedností nespecifikované
(*Mezinárodní klasifikace nemocí*, 2013).

Postupně byly zkoumány poruchy čtení, psaní, počítání a dalších schopností a dovedností. Začaly se systematicky zkoumat příčiny těchto poruch a začaly se hledat edukační postupy, kterými by bylo možno pomoci žákům tyto problémy překonávat. Současný pohled na definici specifických poruch učení uvádí např. Věra Pokorná (Pokorná, 2010) a ve své publikaci rovněž cituje některé přístupy autorů z USA, kteří uvádějí rozšířenou definici specifických poruch učení:

> „Specifické poruchy učení znamenají poruchu v jednom nebo více základních psychických procesech, zahrnujících porozumění nebo používání jazyka, mluveného nebo psaného, která se může projevit v nedokonalé schopnosti naslouchat, myslet, mluvit, číst, psát nebo provádět matematické výpočty. Termín zahrnuje takové podmínky, jako jsou percepční nedostatky, mozková poranění, lehké mozkové dysfunkce, dyslexie a vývojová afázie. Termín nezahrnuje jedince s problémy v učení, které jsou primárně důsledkem zrakového, sluchového nebo motorického handicapu, mentální retardace, emočního vzrušení nebo kulturně či ekonomicky znevýhodněného prostředí.“ (Pokorná, 2010, s. 18, cit. dle Spear-Swerling, 1999)

Dyskalkulie a další poruchy učení v matematice jsou také zpravidla poruchami v komunikaci mezi dítětem a světem. Kvantitativní jevy a prostorové objekty existují nezávisle na nás a je třeba najít cestu, jak je dekódovat. Souvisí to s procesem vnímání kvantity, procesem učení, procesem zobecňování. Snahou je učit děti matematice na úrovni, jaké jsou schopny, prostřednictvím zážitků, tzv. postupem *6 P*:

- *Pohoda* – atmosféra bez napětí a strachu, pocit bezpečí. Nejdříve je nutné zbavit dítě obav z matematiky, eventuálně odporu k ní.
- *Prožitek* – získávání pojmů na základě vlastních prožitků při manipulativní a myšlenkové činnosti (zážitková pedagogika). Neexistuje tzv. „norimberský trychtýř“, kterým by se učivo „nalilo“ do hlavy.
- *Poznání* – vnímání matematických objektů a pojmů, jejich vlastností, shod a odlišností, postupné vytváření systému.
- *Porozumění* – navození *aha efektu* – už vím, jak a proč tomu tak je.
- *Poznatky* – něco bych se měl/a naučit.
- *Paměť* – něco bych si měl/a zapamatovat.

Problémy dětí v matematice mohu mít nejrůznější příčiny. Mohou to být lehké mozkové dysfunkce, nesprávný způsob vyučování, negativní postoj k matematice a k učení vůbec, nechuť k práci a jakékoliv činnosti, nedostatečná příprava na vyučování a mnoho dalších. Příčiny jsou různé, avšak jejich hlubší analýza a pochopení problémů se dětem často nedostává. Dospělí velmi často nedokážou odhalit myšlenkové procesy, které probíhají v mozku dítěte při práci s matematickými pojmy, snaží se sice hledat pomoc, ale ta může být v mnoha případech neúčinná. Dospělí zpravidla vedou dítě tak, jak by to vyhovovalo jim samotným, avšak nevnímají specifické myšlenkové pochody dítěte. Pomoc je někdy založena na pouhém pamětném zapamatování si faktů, na uplatňování nevhodných výukových metod, někdy vychází z nesprávných předpokladů apod.

Současně se snahou o nápravu nedostatků v matematice je třeba sledovat i další problémy dítěte v oblasti deficitu dílčích funkcí, zejména zrakového a sluchového vnímání, jemné i hrubé motoriky, laterality, koncentrace a dalších (Pavlíčková, 2014).

Účinná pomoc je taková, která odhalí pravou příčinu problému dítěte a připraví cílenou nápravu právě pro toto dítě. Přitom dětem nestačí pouhé procvičování na základě pamětného učení, ale jde o pochopení podstaty matematického učiva a jeho užitečnosti pro praktický život a zároveň o respektování poznávacích schopností dětí. V následujících kapitolách se zamyslíme nad matematickou podstatou poruch učení a uvedeme náměty pro nápravná opatření a ukázky možných reedukačních cvičení.

## – 1 – 1 TERMINOLOGIE

Při práci s dětmi se specifickými vzdělávacími potřebami se často setkáváme s různými odchylkami, které se projevují snížením vnímání, pozornosti, paměti, řeči, motoriky aj. a které jsou zpravidla způsobeny odchylkami funkce centrálního nervového systému. Přitom mohou, ale nemusí mít vliv na úspěšnost dětí ve škole. Bývají uváděny následujícími zkratkami:

LMD – lehká mozková dysfunkce

LDE – lehká dětská encefalopatie

Syndrom lehké mozkové dysfunkce se projevuje u dětí, které mohou mít průměrnou až nadprůměrnou inteligenci a jejich problémy v učení nebo v chování jsou způsobeny odchylkami funkce centrálního nervového systému.

Další zkratky:

SDP – Syndrom deficitu pozornosti (anglicky ADD – *Attention Deficit Disorder*)

SDPH – Syndrom deficitu pozornosti s hyperaktivitou (anglicky ADHD – *Attention Deficit Hyperactivity Disorder*)

**SPU – Specifické poruchy učení**

## – 1 – 2 FORMY NĚKTERÝCH PORUCH

Ve školské praxi se často setkáváme s dětmi, u kterých se projevují některé z následujících problémů a ty ovlivňují úroveň osvojování si matematických dovedností a vědomostí:

- **Poruchy koncentrace**
  Děti se obtížně koncentrují na určitou činnost, jsou snadno unavitelné, roztěkané, snadno odbíhají od problému, nechávají se vyrušit jakýmkoliv podnětem, který nesouvisí s právě prováděnou činností. Řešení jakéhokoliv matematického úkolu či problému vyžaduje plnou koncentraci a neúspěšnost při řešení může být způsobena právě neschopností dítěte se na problém soustředit. Děti pak trpí nedostatkem času, nestíhají, trvá jim déle, než proniknou do podstaty problému. Nejsou dostatečně pohotové, rychlé – projevuje se to např. tak, že jsou neúspěšné v soutěžích zaměřených na rychlost.
- **Poruchy pravolevé orientace**
  Nevyhraněná lateralita (preference při užívání jednoho z párových orgánů) způsobuje dětem problémy i v matematice, např. při zápisu číslic jednostranně orientovaných, zápisu víceciferných čísel, chápání vztahů na číselné ose aj.
- **Poruchy prostorové orientace**
  Děti žijí v trojrozměrném prostoru a přirozeně vnímají vztahy mezi objekty a rozložení předmětů v prostoru (vztahy nad, pod, nahoře, dole, vedle, vpředu, vzadu, před, za). Problémy jim však činí pochopit znázornění prostorové situace

v rovině pomocí některého ze zobrazení (např. volného rovnoběžného promítání) na obrázku. Dítě velmi dobře ví, co je to např. krychle, avšak nechápe změť čar na papíře, které zobrazují krychli, a často nepochopí ani nakreslenou síť krychle i dalších těles.

- **Poruchy časové orientace**
  Děti vnímají časové následnosti nejprve během dne, zpravidla podle událostí a stále se opakujících činností, později pak v delším časovém období (týden, měsíc, rok). Problémy činí pochopení jednotek času a jejich převody, jednak proto, že se užívá číselné soustavy o základu šedesát (1 hodina = 60 minut, 1 minuta = 60 sekund) a jednak proto, že některým činí problémy pochopit vztahy na kruhovém ciferníku a lineárním plynutím času. Rovněž čtení časových údajů zapsaných digitálně může některým dětem přinášet problémy, pro některé děti je však lépe srozumitelné než kruhový ciferník.
- **Poruchy sluchového vnímání**
  Dítě nemá poruchu sluchu, slyší dobře, ale nevnímá, co se právě řeklo. Často se dotazuje právě na to, co bylo bezprostředně vysloveno. Toto by měl dospělý vítat, neboť dítě ví, na co se má zeptat, když mu to právě uniklo. Navíc ve třídě je určitě více dětí, které také nevnímají sluchově, avšak nezeptají se.
- **Poruchy reprodukce rytmu**
  Vnímání rytmu a jeho reprodukce je pro matematiku velmi důležité – např. při počítání po jedné, orientaci v číselné řadě, sledování zákonitostí, závislostí aj.
- **Poruchy zrakového vnímání**
  I když dítě dobře vidí, nevnímá plně zrakově to, co by mělo vnímat jako matematické učivo – např. vidí sice, že 1 dm je rozdělen na 10 cm, ale matematický poznatek o vztahu těchto jednotek a jejich převodu v mozku nevznikne. Dítě není schopno rozlišit změny v situacích, orientovat se v geometrickém obrázku apod.
- **Poruchy řeči**
  Kromě logopedických problémů je v matematice problémem neschopnost formulovat myšlenky vlastními slovy. Přesnost vyjadřování je odrazem přesnosti myšlení. Když dítě sdělí: „já to vím, ale neumím to říci“, tak zpravidla neví, ale jen něco tuší. Pokud má dítě správně vytvořený poznatek, rozumí podstatě problému, pak jej dokáže slovně vyjádřit. Od dětí však nevyžadujeme definice matematických pojmů.
- **Poruchy jemné a hrubé motoriky**
  Projevují se zejména při manipulativních činnostech při vyvozování základních pojmů a operací, při zápisech čísel, zápisech algoritmů operací, zejména pak při rýsování.
- **Poruchy chování jako důsledek poruch učení**
  Pokud se dětem nedaří v matematice, pak buď na sebe upozorňují jiným způsobem (předváděním se v roli třídního klauna, nekázní), nebo se uzavřou a přestanou komunikovat, což je horší případ. Znovu navázat kontakt s takovým dítětem bývá náročné.

## – 1 – 3 KLASIFIKACE SPECIFICKÝCH PORUCH UČENÍ

Úspěšnost dítěte v matematice je ovlivňována i ostatními specifickými poruchami učení. Pro přehlednost uvedeme všechny popisované poruchy učení a zdůrazníme ty, které mají vliv na výkon dětí v matematice. V odborné literatuře jsou popisovány:

**Dyslexie** – porucha může postihovat rozlišování jednotlivých písmen, rychlost čtení nebo správnost čtení nebo porozumění čtenému textu. Pro dyslektika je obtížné číst s porozuměním slovní zadání matematických úloh, zejména pak slovních úloh, ve kterých je třeba provést přepis textu uvedeného českou větou do matematického jazyka. Pro některé dyslektiky je náročné číst i symbolický matematický zápis. Mezi dyslektiky můžeme však najít děti, které symbolickému matematickému zápisu rozumí a umí jej používat, a to je pak pro ně v matematice záchranou.

**Dysgrafie** – porucha postihuje osvojování si jednotlivých písmen, spojení hláska – písmeno, úpravu písemného projevu. V matematice má dysgrafik problémy s osvojením si jednotlivých číslic a znaků, spojení *číslo* a *zápis čísla pomocí číslic*, rozlišení pojmů *číslo* a *číslice* a jejich zápisem, dále pak zápisu čísel v řádcích (např. neudrží stejnou velikost všech číslic v zápisu víceciferného čísla) nebo v zápisu čísel v algoritmech, kde záleží na přesnosti zápisu číslic podle jednotlivých řádů. Chyby v matematických operacích mohou být způsobené také neupraveností zápisu nebo výraznou pomalostí při psaní.

**Dysortografie** – porucha pravopisu. Nejde o hrubé chyby způsobené neznalostí, ale o specifické problémy související např. s nerozlišováním sykavek, délky samohlásek, měkčení, vynechávání, přidávání, přesmyknutí písmen nebo slabik, hranice slov v písmu. Může se také projevit při tzv. diktovaných pětiminutovkách, kdy má dítě v mysli, bez vizuální opory na papíře, zvládnout příliš mnoho jevů.

**Dyskalkulie** – porucha postihuje vytváření matematických představ, problémy spojené s operacemi s čísly, poruchy prostorových představ aj. Podrobně bude uvedena v celém dalším textu.

**Dyspinxie** – porucha v oblasti kresebných dovedností, neobratnost při zvládání jemné motoriky rukou a prstů – projevuje se zejména při rýsování. Rovněž činí dětem problémy pochopení obrázku, na kterém je znázorněna prostorová situace v rovině.

**Dysmúzie** – snížení nebo úplná ztráta smyslu pro hudbu – melodii a rytmus. Zejména ztráta smyslu pro rytmus je pro matematiku problémem.

**Dyspraxie** – porucha obratnosti, může mít vliv na upravenost matematických písemných prací, na upravenost rýsovaných obrázků, což může být také způsobeno nešikovností dětí.

## – 1 – 4 DEFINICE DYSKALKULIE

Pod pojmem dyskalkulie je označována specifická porucha matematických schopností. Dítě podává v matematice podstatně horší výkony, než by se daly vzhledem k jeho inteligenci očekávat. Diagnostika je prováděna v odborných pracovištích, např. v pedagogicko-psychologických poradnách pomocí standardizovaných testů. Může se však také stát, že u mnoha dětí se dyskalkulie jako vývojová porucha učení pomocí testů nepotvrdí, avšak dítě problémy v matematice má.

V literatuře jsou zveřejňovány různé definice dyskalkulie, uveďme alespoň některé. Podle 10. revize Mezinárodní klasifikace nemocí *Duševní poruchy a poruchy chování* patří dyskalkulie mezi *Specifické vývojové poruchy školních dovedností* pod kód F 81.2. (1992).

> „Tato porucha zahrnuje specifické postižení dovednosti počítat, kterou nelze vysvětlit mentální retardací ani nevhodným způsobem vyučování. Porucha se týká ovládání základních početních úkonů (sčítání, odčítání, násobení a dělení) spíše než abstraktnějších dovedností jako je algebra, trigonometrie nebo diferenciální počet.“

Poznamenejme však, že pokud má dítě problémy v oblasti zvládání základních početních operací v aritmetice, pak se tyto problémy projeví i v dalších oblastech matematiky, např. v algebře, kde pracuje s koeficienty v algebraických výrazech nebo v rovnicích nebo s exponenty u proměnných. Zde se problémy, které mají děti v oblasti aritmetických operací, znovu objevují.

Další definici dyskalkulie formuloval Košč (1972, s. 194):

> „Vývojová dyskalkulie je strukturální porucha matematických schopností, která má svůj původ v genově nebo perinatálními vlivy podmíněném narušení těch částí mozku, které jsou přímým anatomicko-fyziologickým substrátem věku přiměřeného dozrávání matematických funkcí, které však zároveň nemají za následek snížení všeobecných rozumových schopností.“

Na tuto definici navazuje Novák a podává rozšířenou definici dyskalkulie:

> „Vývojová dyskalkulie je specifická porucha počítání projevující se zřetelnými obtížemi v nabývání a užívání základních početních dovedností, při obvyklém sociokulturním zázemí dítěte a celkové úrovni všeobecných rozumových předpokladů na dolní hranici pásma průměru nebo výše a s příznačnou vnitřní strukturou, v jejímž rámci je výrazně snížena úroveň matematických schopností a narušena skladba za přítomnosti projevů dysfunkcí centrální nervové soustavy podmíněných vlivy dědičnými nebo vývojovými.“ (Novák, 2004, s. 16)

Na základě naší zkušenosti z konkrétní práce s dětmi, které mají rozumové předpoklady v pásmu průměru, nebo dokonce nadprůměru a u kterých se vyskytovaly problémy v matematice, usuzujeme, že není v přístupu k dítěti rozhodující, zda je, či není dyskalkulie diagnostikována, ale že je důležité pochopit individualitu dítěte, jeho specifické problémy v matematice a hledat adekvátní reedukační postupy právě pro toto dítě. Tyto naše zkušenosti jsou v souladu se závěry Simona (2006, s. 159), který uvádí:

„Poté, co jsme se seznámili s tolika definicemi a pokusy o definici dysklalkulie (specifické vývojové poruchy matematických schopností, aritmastenie), je třeba ujasnit si dvě věci:

1. Neexistuje žádný jasně definovaný jev „dyskalkulie“. Každé dítě má svůj vlastní soubor potíží s porozuměním, typů chyb, příčin atd.
2. Není pravděpodobně nutné nalézt přesnou definici dyskalkulie.“

Je však nutné hledat zejména příčiny neúspěchů dětí v matematice a rozlišovat je alespoň podle tohoto schématu:

- Příčiny, které jsou podmíněny vlivy tzv. částečně odstranitelnými, jako je např. styl učení, způsob výuky, vhodnost přípravy na výuku, motivace k učení apod.
- Příčiny, které jsou odstranitelné obtížněji, jako jsou dědičné vlivy nebo narušení činností těch částí mozku, které mají vliv na utváření matematických schopností.
- Příčiny, které jsou způsobeny nízkým nadáním pro matematiku nebo nízkým nadáním všeobecně.

Je tedy rozdíl, zda pracujeme s dětmi, které mají specifickou poruchu učení, a dětmi, které mají problémy v matematice zaviněné jinou příčinou. Volba nápravných reedukačních a kompenzačních cvičení je pro tyto děti odlišná v tom smyslu, že některé děti mohou matematické učivo zvládnout vhodným doučováním běžnými výukovými postupy, jiné však potřebují vypracování takových mechanismů, které nahradí postižené funkce nebo je vhodným způsobem rozvíjejí.

## – 1 – 5 KLASIFIKACE DYSKALKULIE

### – 1 – 5 – 1 Klasifikace podle L. Košče

Košč (1972) uvedl klasifikaci dyskalkulie podle základních problémů, které se u dětí vyskytují v souvislosti s vývojem a budováním matematických pojmů a vztahů, se čtením a psaním matematických výrazů a dělí ji následovně:

**Dyskalkulie praktognostická**

- porucha manipulace s konkrétními předměty nebo symboly,
- porucha při tvoření skupin předmětů,
- nepochopení pojmu přirozená čísla,
- neschopnost porovnat počet prvků,
- neschopnost diferenciace geometrických útvarů,
- porucha prostorového faktoru.

**Dyskalkulie verbální**

- problémy se slovním označováním počtu předmětů, operačních znaků,
- neschopnost vyjmenovat řadu čísel v určitém uspořádání,
- nepochopení vysloveného čísla,
- nepochopení slovního vyjádření matematických symbolů a znaků.

**Dyskalkulie lexická**

- neschopnost číst matematické symboly (číslice, čísla, znaky pro porovnávání, znaky operací),
- záměna tvarově podobných číslic,
- porucha orientace v prostoru,
- porucha pravolevé orientace.

**Dyskalkulie grafická**

- neschopnost psát matematické znaky (číslice, čísla a další),
- porucha při zápisu víceciferných čísel,
- neschopnost psát čísla podle diktátu,
- neschopnost zápisu čísel pod sebou (číslic téhož řádu),
- problémy při rýsování obrazců,
- porucha pravolevé a prostorové orientace.

**Dyskalkulie operační**

- narušená schopnost provádět matematické operace s přirozenými čísly (ale i později s dalšími čísly),
- záměna jednotlivých operací,
- poruchy při osvojování si pamětných spojů,
- neschopnost respektovat prioritu při provádění více operací různé parity,
- problémy při písemných algoritmech jednotlivých operací.

**Dyskalkulie ideognostická**

- porucha v oblasti pojmové činnosti,
- porucha chápání matematických pojmů a vztahů mezi nimi,
- porucha při zobecňování,
- problémy při řešení slovních úloh.

### – 1 – 5 – 2 Klasifikace podle J. Nováka

Narušení matematických schopností má mnoho nejrůznějších příčin a projevů a klasifikaci v obecnějším náhledu uvádí Novák (2004, s. 18–28):

**Kalkulastenie** – rozumí se jí mírné narušení matematických vědomostí a dovedností způsobené např. nedostatečnou stimulací ve škole nebo v rodině, přitom rozumové i matematické schopnosti jsou v pásmu průměru.

Podrobněji klasifikuje kalkulastenie na kalkulastenie emocionální (nevhodné reakce okolí na problémy v matematice), kalkulastenie sociální (vliv sociálního prostředí, nedostatečná příprava do školy) a kalkulastenie didaktogenní (nevhodné výukové styly právě pro toto dítě).

**Hypokalkulie** – je porucha základních početních dovedností, jejíž příčinou může být nerovnoměrná skladba matematických schopností, při celkové úrovni rozumových schopností v pásmu průměru i nadprůměru.

**Oligokalkulie** – vyznačuje se narušenou strukturou matematických schopností, a nízkou úrovní všeobecných rozumových schopností.

**Vývojová dyskalkulie** – v podstatě používá klasifikaci dyskalkulie podle Košče.

**Akalkulie** – je porucha zvládání početních operací a početních dovedností, která mohla vzniknout např. na základě prožitého traumatu, přitom dříve byly dovednosti rozvinuty přiměřeně.

### – 1 – 5 – 3 Klasifikace podle matematického obsahu podle R. Blažkové

Klasifikace je zaměřena na oblasti učiva, ve kterých se projevují problémy dětí vzhledem k matematickému učivu. Pochopení a zvládnutí jedné oblasti je nezbytným předpokladem k pochopení a zvládnutí oblasti další. Jde zejména o tyto oblasti:

**Problémy v oblasti vytváření pojmu čísla**
Nejprve je třeba vytvořit představu čísla přirozeného, později čísla desetinného, zlomku, racionálního čísla, obecně reálného čísla. Pokud má dítě problém s pochopením pojmu přirozené číslo, nedospěje k potřebné abstrakci (aby pochopil např. číslo 5 bez konkrétních předmětů), nemá šanci pokračovat v dalších matematických tématech.

**Problémy se čtením a zápisem čísel**
V oblasti tzv. numerace se předpokládá, že se dítě naučí správně psát číslice, čísla, správně čísla číst. Dále se seznámí s uspořádáním, porovnáváním přirozených čísel a jejich zaokrouhlováním. Problémy v oblasti numerace způsobí, že si dítě nevytvoří potřebnou představu o množině všech přirozených čísel a jejím uspořádání. V návaznosti na čísla přirozená se tyto problémy vyskytnou i v oblasti čísel desetinných a zlomků.

**Problémy v oblasti operací s čísly**
Operace sčítání, odčítání, násobení a dělení se nejprve děti naučí s čísly přirozenými, později s čísly v dalších číselných oborech. Problémy s operacemi v jednotlivých číselných oborech jsou nejrozsáhlejší oblastí a zahrnují potíže s pochopením každé jednotlivé operace, zvládnutím pamětného počítání a počítání písemného.

**Problémy v oblasti řešení slovních úloh**
U slovních a aplikačních úloh je zpravidla největším problémem přepis slovního vyjádření úlohy do matematického symbolického jazyka, tj. zápis pomocí příkladů, rovnic, jejich soustav apod., dále pak vlastní řešení matematické úlohy a její interpretace do reality. Řešení slovních úloh patří k nejproblematičtějším a nejobávanějším tématům školské matematiky a vyžaduje promyšlenou metodiku výuky.

**Problémy při vytváření geometrických a prostorových představ**

Pochopení vztahů při rozmístění předmětů v prostoru a jejich znázornění v rovině je pro některé děti problematické. Pokud nemá dítě vytvořeny správné představy o tvaru, poloze a velikosti geometrických útvarů, obtížně zvládá geometrické úlohy. Naopak, některé děti s diagnostikovanou dyskalkulií mají velmi dobrou geometrickou i prostorovou představivost.

**Problémy v oblasti výpočtů v geometrii**

Výpočty v geometrii předpokládají uvědomění si velikosti útvarů a možnosti jejich určení. Užívání vztahů pro výpočty obvodů a obsahů rovinných útvarů, povrchů a objemů těles vyžaduje pochopení těchto vztahů a správné přiřazení k dané úloze. Velmi užitečné je provádění odhadů velikostí jednotlivých geometrických útvarů. Ve vlastních výpočtech se mohou objevit problémy, které má dítě v souvislosti s operacemi v oboru přirozených a racionálních čísel.

**Problémy v pochopení a převodech jednotek měr**

Práce s jednotkami měr patří k nejproblematičtějším částem učiva matematiky na všech stupních škol. Pokud dítě nemá představu o jednotlivých jednotkách měr, není možné, aby se naučilo jednotlivé jednotky mezi sebou převádět a využívat je v konkrétních úlohách.

K tomuto třídění jsme dospěli po dlouholeté práci s dětmi, kdy se ukázalo, že pokud dítě nepochopí podstatu matematického pojmu, neví, jak má postupovat a proč má tak postupovat, kdy jsou výsledky operací vyvozovány pouze pamětně, bez opory o pochopení, bez zážitků, není náprava efektivní. Např. problémy se čtením (dyskalkulie lexická) se projevují jak při čtení matematických symbolů, číslic, čísel, číselných a algebraických výrazů, tak při pochopení zadávacího textu, textu slovních a aplikačních úloh apod. Analogicky problémy se psaním (dyskalkulie grafická) se projevují ve všech tématech matematického učiva. Chyby v řešení matematických úloh v řadě případů nemusí mít příčinu v neznalostech v matematice, ale mohou vyplývat z nesprávného čtení či psaní, z nepochopení kontextu apod.

### – 1 – 5 – 4 Základní kritéria, podle kterých lze kvalifikovat dyskalkulii

Základní kritéria, podle kterých lze kvalifikovat specifickou vývojovou poruchu v matematice – dyskalkulii, lze uvést takto:

- existuje výrazný rozpor mezi zjištěnou inteligencí dítěte a jeho úspěšností v matematice,
- úroveň rozumových schopností není v pásmu podprůměru, problémy dítěte nevznikly na základě nemoci nebo na základě sociálním nebo emocionálním,
- dítě je obklopeno normálním rodinným zázemím, které poskytuje pozitivní motivaci,

- na základě odborného vyšetření lze identifikovat dysfunkci centrální nervové soustavy, dysfunkci kognitivních center mozku.

Je třeba si uvědomit, že neexistuje úplná matematická negramotnost nebo tzv. matematická slepota, že každé dítě určitým způsobem k matematickým pojmům dospěje a přijme je za své. Téměř každý dospělý využívá těch matematických poznatků, které jsou nezbytné v jeho profesi i v běžném životě.

## – 1 – 6 DALŠÍ PŘÍČINY PORUCH UČENÍ V MATEMATICE

Kromě specifických poruch učení má na úspěšnost dítěte v matematice vliv řada dalších faktorů. Poruchy učení v matematice mohou být působeny jednak obsahem samotné matematiky, avšak můžeme je najít i v osobnosti žáka, v osobnosti učitele nebo i v rodičích.

### – 1 – 6 – 1 Obsah učiva matematiky

Matematika je disciplína, která pracuje s abstraktními pojmy a jejich správné vytváření je náročné na psychiku žáka. Má přesnou logickou výstavbu a je budována deduktivně. Proces zobecňování a abstrakce vyžaduje schopnost postupně přecházet od konkrétních představ k obecnějším, a to je pro děti velmi složité. I když se ve školské matematice využívají vesměs induktivní přístupy, určité zobecnění a abstrakce jsou nutné (například již při vytváření pojmu přirozená čísla). Navíc školská matematika je předmětem, kdy každý prvek nižší úrovně je nezbytným předpokladem zvládnutí prvků vyšší úrovně, tedy děti si musí to, co se již dříve naučily, neustále pamatovat. Například zvládnutí pamětného počítání je nezbytné při počítání písemném, tedy při výuce algoritmů početních operací. Přitom děti neustále využívají paměti dlouhodobé, krátkodobé i pracovní. Podrobně o jednotlivých příčinách problémů bude pojednáno v dalším textu. Zde můžeme uvést pouze zásadní stanovisko, které je platné pro postup výuky s dětmi se specifickými poruchami učení:

a) nejprve je nutné pochopení každého z matematických pojmů,
b) podle schopností dítěte je třeba stanovit míru vědomostí a dovedností, které je schopno vzhledem ke své poruše učení zvládnout,
c) neustále je třeba posilovat paměť.

### – 1 – 6 – 2 Osobnost žáka

Děti se nerozvíjejí stejně rychle, některé myšlenkové operace mohou mít vyvinuty poněkud později, avšak přitom není snížena úroveň jejich rozumových schopností a ani nemusí trpět specifickou poruchou učení. Příčiny neúspěchů dětí v matematice mohou být způsobeny určitou nedozrálostí mozkových funkcí vzhledem k danému učivu. Častokrát se stává, že dítě v daném okamžiku učivo nechápe, ale po určitém časovém úseku (např. za půl roku) chápe toto učivo již bez problémů.

Další příčiny problémů dítěte v matematice souvisejí s jeho volními vlastnostmi. Matematika vyžaduje každodenní systematickou práci (v malých kvantech). Pokud dítě není schopno se k této práci samo přimět a pokud v jeho okolí není nikdo, kdo by mu pomohl, nemá šanci na úspěch v matematice. Většinou se objeví problém v některém úseku učiva a dítě již není schopno samo navázat a zvládat učivo následující. S malou úspěšností dítěte v matematice souvisí také jeho nepozornost, nezájem, ale také malé sebevědomí, úzkost, ztráta naděje na úspěch, role outsidera mezi dětmi aj.

Velmi důležité je sledovat tzv. psychické bariéry, kterými jsou např. syndrom bílého papíru – obavy z písemných prací, pětiminutovek, dále obavy ze sloupců příkladů, slovních úloh, některého tématu aj. Tyto psychické problémy jsou velmi závažné a je třeba je vnímat jako varovné signály v práci učitele a v komunikaci s dítětem. Podezírat dítě, že něco tzv. předstírá, může být velmi nebezpečné.

### – 1 – 6 – 3 Osobnost učitele

Nejčastější příčiny poruch učení dětí v matematice související s osobností učitele jsou způsobeny nedostatečnou odbornou úrovní učitele, jak v oblasti matematiky, tak v oblasti pedagogické, psychologické a speciálně pedagogické. Dále jsou příčiny poruch ve stylu výuky, který může být pro většinu žáků dobrý, ale není vhodný právě pro toto dítě, dále ve volbě metod práce, v oblasti komunikace s dětmi, v nedostatečné trpělivosti učitele, formálním přístupu k práci s těmito dětmi. Příčiny mohou být také v nedostatečné motivaci dětí k učení i nedostatečné motivaci matematického učiva, v nezvládnutí problematiky hodnocení a klasifikace apod. Pro dítě je velmi málo motivující učitelovo očekávání sníženého výkonu dítěte s poruchou učení bez naděje na zlepšení nebo nedostatek empatie učitele k dětem s dyskalkulií.

### – 1 – 6 – 4 Vliv rodičů

Reakce rodičů na poruchy učení v matematice jsou různé a můžeme uvést několik skupin rodičů podle jejich vztahu k dítěti. Do první skupiny můžeme zařadit rodiče, kteří mají pro dítě plně pochopení, spolupracují s pedagogicko-psychologickou poradnou i s učitelem matematiky a snaží se dítěti pomoci vzhledem k jeho handicapu. Pomáhají mu překonávat problémy v matematice a neočekávají nereálné výsledky. Druhou skupinu tvoří rodiče ambiciózní, nepřiměřeně ctižádostiví, kteří nejsou schopni smířit se s tím, že mají dítě s problémy v matematice. Tito rodiče buď dítě odmítají, nebo zaujímají trpitelské stanovisko „proč právě my máme takové dítě“, nebo dítě přetěžují neustálým doučováním a nepřiměřenými nároky. Někteří rodiče děti trestají, třeba ani ne fyzicky, ale psychicky. Další skupinou jsou ti rodiče, kteří se snaží za každou cenu dítěti pomáhat tak, že vymýšlejí nejrůznější postupy a didaktická zjednodušení, která se však v budoucnu v dalším učivu projeví jako chybná a způsobí dětem další problémy. Další skupina rodičů se sice o dítě zajímá, ale rezignuje a nechá dítě bez odborné pomoci, „nedá se nic dělat, my jsme na matematiku také nebyli“. Existuje také skupina rodičů, kteří nespolupracují ani s poradnou, ani s učitelem a o dítě se nestarají. Práce s rodiči je někdy náročnější než práce s dětmi. Je obtížné přesvědčit některé rodiče, že jimi poskytovaná pomoc a doučování jsou naprosto neúčinné a vedou jen ke zvyšování odporu dítěte k matematice.

### – 1 – 6 – 5 Společenské postavení dospělých s SPU

Dyskalkulie je specifická porucha učení, avšak dítě často prokazuje průměrnou až nadprůměrnou inteligenci. Porucha tedy nemusí ovlivnit jeho středoškolské nebo vysokoškolské studium, dokonce technického nebo přírodovědného zaměření. Postavení člověka ve společnosti může být ovlivněno jeho vývojem v dětství a vztahem k matematice. Buď při rozhodování o volbě povolání vyhledává takové, kde se s matematikou příliš nesetká – např. obory umělecké nebo humanitní, nebo naopak jej jeho vývojová porucha nemusí omezit v oborech přírodovědných. Mnoho význačných osobností mělo v dětství problémy v matematice, a přesto dosáhli vynikajících úspěchů, někteří právě v matematice a fyzice.

Např. o fyzikovi George Gamovovi v publikaci *My World Line* se lze dočíst, že známá astronomka Věra Rubinová, jeho studentka, o něm prohlásila: „Neuměl psát ani počítat. Chvíli by mu trvalo, než by vám řekl, kolik je 7 krát 8. Ale jeho rozum byl schopen chápat vesmír.“ (Gamov, 2000, s. 153).

Význačný ruský matematik N. N. Luzin patřil k lidem s pomalou reakcí. Také se pomalu vyvíjel, ve škole neprospíval, dokonce právě v matematice.

David Hilbert, jeden z největších matematiků 20. století, dělal dojem tupého, pomalu uvažujícího člověka, který těžko chápe, co mu kdo vykládá.

Albert Einstein, největší fyzik 20. století, ve škole propadal, měl velké potíže se čtením.

Thomas Alva Edison pařil k horší části třídy, nikdy nezvládl dovednosti, jako je psaní, pravopis a také aritmetika.

Mohli bychom uvést ještě mnoho příkladů, kdy zdánlivě „tupý“ a ve škole neprospívající žák se v budoucnu projevil jako génius.

Je tedy nezbytné přistupovat k dětem s poruchami učení citlivě, snažit se pochopit jejich problémy a hledat cesty, jak jim učení usnadnit. Pomocí kompenzačních pomůcek (kalkulátor, počítač) lze řadu problémů eliminovat, zejména z oblasti numerických výpočtů a zápisů matematických úloh. Avšak problémy se z oblasti operací s přirozenými čísly přesunou do dalších matematických témat, např. počítání s mocninami a s algebraickými výrazy, řešení rovnic, řešení slovních úloh, kde se znovu projeví dyskalkulické potíže na vyšší úrovni matematického učiva. Člověk s poruchou učení se většinou v dospělosti s problémy nějakým způsobem vyrovná. Avšak vždy, když řeší situaci, ve které jsou dominantní oblasti, které mu činí potíže, vždy si je uvědomí a musí vynaložit velké úsilí na to, aby je zvládl. Většina dospělých lidí své problémy tají z obavy ze společenské degradace.

## Shrnutí

Příčiny problémů dětí v matematice mají nejrůznější podstatu a je nutné umět je rozlišovat a diagnostikovat. Jednou z výrazných příčin problémů v matematice jsou specifické poruchy učení, které souhrnně zahrnují takové poruchy, které postihují čtení, psaní, počítání a nejsou způsobeny nevhodnou výukou nebo nedostatečnou přípravou dítěte. Nalézt přesnou hranici mezi dyskalkulií a dalšími příčinami problémů dítěte v matematice je náročné a je třeba provádět diagnostická vyšetření v pedagogicko-psychologické poradně. Přístupy k diagnostice i k využívání reedukačních a kompenzačních postupů se neustále zdokonalují.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Prostudujte některé tituly věnované dyskalkulii.
2. Charakterizujte projevy dyskalkulie.
3. Vysvětlete, jaký vliv má dyslexie a dysgrafie na úspěšnost žáka v matematice.
4. Seznamte se s vývojem názorů na dyskalkulii.
5. Pokuste se analyzovat a popsat problémy v matematice u konkrétního žáka.
6. Zamyslete se nad řešením konkrétního problému, např.: Jaké přístupy by bylo vhodné uplatnit, aby se žák třetí třídy základní školy zbavil odporu k matematice. Jak vysvětlit mamince, že její doučování je naprosto neúčinné, že chlapec má jiné myšlenkové pochody než jeho maminka.
7. Zamyslete se nad tím, jak přesvědčit paní učitelku, že každodenní diktované pětiminutovky nemůže žák 1. stupně základní školy zvládnout a že žák k řešení příkladů potřebuje vizualizaci na papíře.

# – 2 – ROZVOJ PŘEDMATEMATICKÝCH PŘEDSTAV

Pro budoucí úspěšnost dítěte v matematice je vhodné nepromarnit žádnou z příležitostí, které od nejranějšího věku napomáhají dítěti chápat kvantitu a prostorové vztahy.

V předškolním věku by dítě mělo postupně zvládat tyto dovednosti (*Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání*, 2017, s. 22–23):

- Chápat základní číselné a matematické pojmy, elementární matematické souvislosti a podle potřeby je prakticky využívat (porovnávat, řadit a třídit soubory předmětů podle určitého pravidla, orientovat se v elementárním počtu zhruba do šesti, chápat číselnou řadu v rozsahu první desítky, poznat vztahy *více*, *méně*, *stejně*, první, poslední apod.).
- Chápat prostorové pojmy (vpravo, vlevo, dole, nahoře, uprostřed, za, pod, nad, u, vedle, mezi apod.), elementární časové pojmy (teď, dnes, včera, zítra, ráno, večer, jaro, léto, podzim, zima, rok), orientovat se v prostoru i v rovině, částečně se orientovat v čase.
- Řešit problémy, úlohy a situace, myslet kreativně, předkládat „nápady".
- Nalézat nová řešení nebo alternativní k běžným.

Důležité je, že se v předškolním věku nejedná o systematické vzdělávání dětí, o výuku, ale využívá se všech běžných denních činností dětí. Matematické představy nejsou odděleny od konkrétních činností, dítě se rozvíjí v rámci integrovaného přístupu. Je však nutné mít na paměti, že rozvoj dětí není rovnoměrný, že každé dítě má svůj vlastní čas k pochopení toho či onoho pojmu. Dostatek podnětů v předškolním věku může poruchy učení částečně eliminovat.

Povšimněme si nejprve, jaké myšlenkové pochody předcházejí vytvoření správné představy přirozeného čísla.

## – 2 – 1 CESTY K VYTVÁŘENÍ POJMU PŘIROZENÉ ČÍSLO V PŘEDŠKOLNÍM VĚKU

Při zkoumání, jakým způsobem se vytváří pojem čísla u dětí, je dobré poučit se z historie, jakým způsobem se vytvářel pojem přirozené číslo v historickém vývoji člověka a jakým způsobem je tento pojem budován v matematice jako vědecké disciplíně, neboť obojí je východiskem chápání vývoje číselných představ u dětí od nejranějšího věku.

Pojem přirozené číslo se v historickém vývoji vytvářel složitě, mnoho roků, snad i staletí, a člověk musel učinit velký pokrok v rozvoji svých myšlenkových procesů, aby byl schopen chápat kvantitu, tj. aby abstrahoval od viditelných vlastností předmětů a byl schopen pochopit, kolik jich je. Člověk vnímal skupiny předmětů, které ho obklopovaly, a nejprve přiřazováním poznával, zda je předmětů stejně nebo je některých více či méně (např. za každou ovci ve stádě položil kamének). Počet byl tedy nejprve vyjadřován přiřazováním, tj. vytvářením ekvivalentních množin stejných předmětů, např. prstů na rukou, kaménků, dřívek, zářezů apod. Další složitý vývoj přinesl schopnost zapsat tuto skutečnost a vyjádřit ji slovem a postupně se tak vyvíjely číslice, číslovky a číselné soustavy.

V matematice se pojem přirozená čísla buduje buď pomocí čísel kardinálních nebo čísel ordinálních nebo pomocí Peanovy množiny. Při velmi stručném přiblížení můžeme uvést:

Pojem čísla kardinálního se opírá o pojem tříd navzájem ekvivalentních množin a přirozená čísla zaváděná pomocí čísel kardinálních dávají vesměs odpověď na otázku *kolik to je*. Pojem čísla ordinálního se opírá o uspořádané množiny a podobná zobrazení mezi uspořádanými množinami a přirozená čísla pomocí nich zaváděná dávají většinou odpověď na otázku *kolikátý*. Přirozená čísla budovaná pomocí Peanovy množiny vycházejí z prvního prvku a pomocí tohoto prvku a pojmu následovníka se vybuduje množina všech přirozených čísel. Teoretické základy budování pojmu přirozené číslo jsou uvedeny v publikacích aritmetiky a algebry a didaktické přístupy k zavádění přirozených čísel v publikacích didaktiky matematiky.

Všímejme si, jak dvouleté nebo tříleté dítě vnímá počet věcí kolem sebe (k čemu dospěje samostatně, co jej nikdo neučí). Nejprve ukazuje: tam jsou dvě, tam také jsou dvě, později tři. Když mu ukážeme hromádku prvků o větším počtu než tři, odmítá říct, kolik to je, a zpravidla řekne: „to je moc“. Postupně však vnímá další čísla, až v šesti letech je schopno určit počet prvků ve skupinách, ve kterých je jich šest až deset. Při vnímání počtu předmětů musí dítě učinit obrovský pokrok ve svém myšlení, a to tak, že postupně přestává vnímat viditelné vlastnosti předmětů, jako je barva, velikost, tvar, materiál, ze kterého jsou zhotoveny, zda jsou živé či neživé a všímá si pouze toho, kolik jich je. To znamená, že začne vnímat, že mezi určitými skupinami objektů existuje něco společného, co nesouvisí s jejich viditelnými vlastnostmi, ale s tím, že obsahují prvky, které se dají vzájemně jednoznačně přiřadit, tj. že jich je stejně. Přitom však nejde o žádnou cílenou výuku matematiky, ale všechny nové poznatky dítě získává prostřednictvím her a běžných činností souvisejících s jeho životem. Současně se rozvíjí jeho komunikace verbální (zdokonaluje se jeho řeč) i nonverbální (využívá např. své značky v mateřské škole, kreseb, symbolů). Postupně se zkvalitňuje jeho vnímání, paměť, představivost i pozornost, což je nezbytné pro jeho další matematický rozvoj. Děti jsou přirozeně tvořivé a jejich tvořivosti je třeba účelně využít a dávat jim takové podněty, které přispívají k rozvoji jejich myšlení.

Číslo, podobně jako jiné abstraktní pojmy, nemůžeme vnímat smysly, vnímáme pouze reprezentanty těchto čísel. Například reprezentantem čísla čtyři mohou být čtyři auta, čtyři děti, čtyři jablíčka apod. Ale také např. bydlíme ve čtvrtém poschodí, náš dům má číslo čtyři, jsou čtyři hodiny, mám čtyři roky apod. Děti se seznamují s kvantitativní stránkou jevů v kontaktu s okolním světem, pomocí konkrétních předmětů se postupně propracovávají k obecnějšímu chápání až k pochopení abstraktního pojmu čísla. Mnohokrát opakovaná činnost s konkrétními předměty vede k získávání zkušeností dětí, že nezáleží na tom, s jakými předměty pracují, ale pouze na tom, že je jich stejně. Musí se také naučit číslo pojmenovat a zapsat. K tomu, aby proces vytváření čísla byl pro děti snadný, využíváme mnoho činností, ve velké většině nematematických. Např. při skládání kostek domina, hraní hry Člověče, nezlob se, apod. Přitom se však nemá nic uspěchat, protože k pojmu čísla se každé dítě dopracuje samostatně vlastní činností, až mu tzv. „svitne".

Co všechno může předškolní dítě vnímat na konkrétních předmětech? Dejme do neprůhledného sáčku např. 4 koláče a nechme děti povídat, co všechno o nich mohou říct. Sledujme, jaké mají představy – zrakové, chuťové, čichové, hmatové, čím jsou koláče naplněny, kam je mohou přemístit (např. na talíř). Kolik z dětí je však již ve „světě matematiky" a zeptá se „kolik jich je"?

V první fázi se děti naučí chápat čísla jedna až pět, později čísla do deseti a číslo nula. Měly by umět vytvořit skupinu o daném počtu prvků, zapsat počet prvků dané skupiny, dále pak čísla porovnávat. Než se však dospěje k pojmu *přirozené číslo*, je třeba dávat dětem mnoho podnětů, které souvisejí s jejich hrami a činnostmi, které běžně každý den provádějí a které s matematikou zdánlivě nesouvisí. V tomto období není vhodné učit děti počítat po jedné, protože tímto se zpravidla učí pouze vyjmenovat řadu slov beze smyslu, slov, která zatím nemají reálnou představu vysloveného čísla. Pokud tyto fáze na sebe nenavazují, dochází u některých dětí k problémům při vytvoření pojmu čísla.

## – 2 – 2 PROPEDEUTICKÁ CVIČENÍ K VYTVOŘENÍ POJMU ČÍSLA, VYPLÝVAJÍCÍ Z BĚŽNÝCH ČINNOSTÍ A HER

S dětmi provádíme elementární cvičení, která jsou propedeutikou k pozdějšímu chápání pojmu *přirozené číslo*. Nejprve se jedná o běžné činnosti s hračkami, obrázky a dalšími předměty, využívají se pohádky, hry apod., přičemž se vždy vyčleňují některé charakteristické vlastnosti se zapojením více smyslů. Podrobně jsou tyto činnosti uvedeny např. v publikacích autorek Jany Coufalové a Michaely Kaslové (Coufalová, 1997; Kaslová, 2010).

**Práce s předměty**

Dětem předkládáme různé předměty, které je obklopují, a snažíme se o to, aby děti uvedly názvy nebo jména předmětů – co to je, jak se to jmenuje. Zároveň zkoumají a pojmenovávají viditelné vlastnosti předmětů – jaké jsou, zda jsou živé, či neživé, jaká je jejich barva, jaký je jejich tvar, z jakého jsou materiálu. Nejprve pracujeme s izolovanými předměty, později s dvojicemi, trojicemi předmětů a skupinami více předmětů.

**Identifikace** předmětů prostřednictvím smyslů

Děti mohou identifikovat předměty, osoby, zvířata pohledem, hmatem, chutí, čichem apod., tedy svými smysly.

**Charakteristika** předmětů

Děti provádějí charakteristiku předmětů z různých hledisek, např. jaké to je, k čemu to je, co dělá, kdo to je, kdo něco dělá apod.

**Diferenciace** předmětů

Jedná se o hledání shod a rozdílů mezi předměty *– je to stejné jako…*, *je to jiné než…*, čím se liší – např.
který předmět (obrázek) nepatří mezi ostatní,
který předmět (obrázek) má jinou barvu než ostatní,
který předmět (obrázek) má jiný tvar než ostatní,
který předmět (obrázek) má jinou velikost než ostatní,
který předmět (obrázek) má jinou polohu než ostatní apod.

**Vyhodnocení** situací

Jde o pohled zpět, utvrzení správnosti a rozhodnutí: Je to tak? Je to správně?

**Komparace (srovnání)**

Porovnávání předmětů probíhá z mnoha hledisek. Předměty jsou stejné, podobné, nejsou stejné, jsou různé. Děti rozhodují: V čem se liší, v čem jsou stejné (např. v pohádce Dlouhý, Široký a Bystrozraký – porovnáváme výšku, šířku, tloušťku apod., tedy porovnáváme viditelné vlastnosti objektů). Při rozhodování o polohách nebo postavení objektů porovnáváme nejprve objekty, které dítě vidí současně (předměty na poličkách, hledání rozdílů v obrázcích). Teprve později se porovnávají situace s tím, co je uchováno v paměti (jak to bylo před tím, je to tak, jak to bylo původně, jak to má být, co se změnilo). Pro matematiku je to důležitá činnost – např. při nácviku psaní číslic porovnává dítě to, co napíše, s předlohou, se vzorem na začátku linky v sešitě. Děti porovnávají předměty v různých polohách – vedle sebe, pod sebou, jinak umístěné.

Dále se porovnává množství – upevňují se vztahy více, méně, stejně – což je příprava na porovnávání čísel.

**Zpřesňování**

Jde o zpřesňování původní, vstupní informace, většinou s využitím smyslového vnímání. Využíváme otázek typu: Kdo je to? Co je to? Dalšími poskytnutými informacemi přibližujeme přesný význam – např. hra na řemesla, které zvíře myslím apod. Zde se uplatňuje orientace na sluch (ptáme se slovy) nebo na zrak (předvádíme pantomimu) nebo na hmat (hmatem se určuje předmět). Může se také určovat kvantita nebo vzájemné postavení objektů.

**Negace**

Spočívá na využití předpony *ne* – např. je to živé–neživé, létá to, nelétá to, je to modré, není to modré. Přitom dbáme na jasné vyjádření, kdy předmět danou vlastnost má, či nemá (např. negace „je to bílé“ není „je to černé“).

**Závislosti**

Využíváme pravidelného opakování skupin prvků, rytmizace – vytváření dvojic, trojic prvků, které se pravidelně opakují (navlékání korálků různých barev, stavby hradeb z krychlí apod.).

**Gradace**

Jde o určení polohy nebo pořadí prvků v realitě i na obrázku – je to blíž než, dál než, vlevo od, vpravo od, nad, pod, za.

## – 2 – 3 ČINNOSTI SMĚŘUJÍCÍ K VYTVOŘENÍ POJMU PŘIROZENÉ ČÍSLO

Mezi činnosti, které cíleně směřují k vytváření předpokladů pro správné pochopení přirozeného čísla, patří klasifikace (třídění), přiřazování, uspořádání.

### – 2 – 3 – 1 Třídění (klasifikace)

V matematice souvisí třídění s rozkladem množiny na třídy ekvivalentních prvků. Při rozkladu množiny na podmnožiny musí být splněny požadavky:

1. Každý prvek základní množiny musí být zařazen do některé z podmnožin.
2. Žádný prvek nemůže být současně ve dvou podmnožinách.
3. Sjednocením všech podmnožin je základní množina.

Třídění se provádí podle určité charakteristické vlastnosti, děti mají za úkol roztřídit do skupin dané předměty na ty, které požadovanou charakteristickou vlastnost mají, a na ty, které ji nemají. Přitom charakteristická vlastnost musí být stanovena jednoznačně (např. nestačí určit malý–velký, když se třídí více předmětů různých velikostí). Vzniknou tak dvě, později více skupin a přitom každý prvek musí být zařazen v některé ze vzniklých skupin podle daného kritéria. Nejprve se provádí třídění dichotomické (na dvě skupiny), později trichotomické (na tři skupiny) atd. Děti mohou provádět třídění podle barvy na dvě skupiny, např. červené, modré a potom předměty v těchto skupinách třídit podle dalšího kritéria, např. podle velikosti nebo podle tvaru.

Vymezení charakteristické vlastnosti se provádí na předmětech denní potřeby, např. vybírá se, co se jí, co se obléká, sportovní náčiní, pracovní nářadí, čím jezdíme apod. Jídlo se pak dále vymezuje např. na ovoce, zeleninu, pečivo, mléčné výrobky apod., sportovní náčiní podle jednotlivých sportů atd.

Provádí se zařazování předmětů do skupin podle stejné vlastnosti, např.

Panenky – chodící, nechodící.
Auta – osobní, nákladní.
Kostky ze stavebnice, (např. 2 velikosti, 3 barvy, 4 tvary).
Geometrické tvary (trojúhelníky, čtverce, obdélníky, kruhy).
Umisťování příborů do příborníku (lžíce, vidličky, nože, malé lžičky).
Ukládání nádobí do skříňky (hrníčky, talířky, talíře hluboké, mělké).

### – 2 – 3 – 2 Přiřazování

Při přiřazování předmětů poznávají děti skupiny objektů, které mají společné to, že každému prvku v jedné skupině je přiřazen právě jeden prvek druhé skupiny a naopak (prvky jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny). Přitom si děti postupně uvědomují, že skupiny, jejichž prvky lze vzájemně jednoznačně přiřadit, mají stejně prvků a že nezáleží na tom, jakého druhu prvky jsou. Postupně zvyšujeme náročnost na abstrakci – od konkrétních předmětů k symbolům, postupně až k číslu. Přiřazujeme tedy:

a) předměty předmětům,
b) symboly předmětům,
c) symboly symbolům,
d) předmětům a symbolům čísla.

Ad a) Pro pochopení pojmu přirozená čísla je vhodné využívat činností, kdy děti přiřazují předměty předmětům (zpočátku tak, aby v obou skupinách bylo předmětů stejně – vytvářejí dvojice). Umisťují např. panenky do kočárků, auta do garáží, přiřazují děvčata chlapcům, pomeranče dětem, hrníčky na podšálky, vajíčka do kalíšků apod. Velmi vhodnou činností je prostírání nádobí a příborů na stůl – u stolečku sedí Jirka, Petr, Terezka, Irenka, každému přiřadíme talířek, lžičku, skleničku.

K nácviku přiřazování můžeme také využívat i pohádkových postav nebo postav z večerníčků – kdo ke komu patří:

Hurvínek–Spejbl, Maková panenka–motýl Emanuel, Rumcajs–Manka, Mach–Šebestová, Křemílek–Vochomůrka, Jeníček–Mařenka, Zlatovláska–Jiřík, Bob–Bobek, Ája–Fík atd.

Ad b) Vybereme několik dětí, jindy hraček (do pěti), přiřazujeme prsty, kamínky, tyčinky, obrázky apod.

Ad c) Obrázkům přiřazujeme např. puntíky, tyčinky, tyčinkám puntíky apod. Např. Nakresli tolik čárek, kolik je na obrázku pejsků, nakresli tolik puntíků, kolik je na obrázku kočiček.

Ad d) Skupinám předmětů nebo symbolů přiřadíme číslo – kolik jich je.

Každý správný postup, který by mohl napomoci vybudování pojmu přirozené číslo, je velmi potřebný. Dostatek rozmanitých činností před tím, než uvede číslo, je předpokladem vytvoření potřebné abstrakce.

### – 2 – 3 – 3 Uspořádání

Uspořádání děti vnímají zcela přirozeně na naprosto nematematických činnostech, při hrách, prostřednictvím pohádek, říkadel aj. Cílem činností je, aby si děti v budoucnu postupně uvědomily, že množina přirozených čísel je uspořádaná, že je možné o každých dvou prvcích rozhodnout, který je před kterým (toto je však již učivem 1. stupně ZŠ).

V období předčíselných představ uvádíme pohádky, ve kterých hraje roli posloupnost dějů či uspořádání osob. Jsou to například pohádka O kohoutkovi a slepičce, pohádka O veliké řepě, Zlatovláska, Tři zlaté vlasy Děda Vševěda aj. Děti si velmi dobře a přesně pamatují uspořádání postav nebo dějů v pohádkách. V pohádce O veliké řepě se navíc uvádějí pojmy „první prvek“, „poslední prvek“ ve skupině. Zde je třeba správného zdůvodnění, neboť se musí pracovat se všemi prvky dané skupiny a první nebo poslední prvek je třeba vymezit vzhledem k ostatním prvkům dané skupiny. Např. v pohádce O veliké řepě: Proč je dědeček první – protože všichni ostatní jsou za ním. Chybně by bylo – protože před ním nikdo není. Proč je myška poslední – protože všichni ostatní jsou před ní. Opět chybné zdůvodnění by bylo – protože za ní nikdo není.

Dalšími činnostmi mohou být např. uspořádání dětí v řadě podle velikosti, skládání pastelek podle velikosti, navlékání korálků podle určitého pravidla, kdy děti mají pravidlo dodržet, stavby z krychlí podle pravidla apod.

# – 2 – 4 VNÍMÁNÍ ČÍSEL V PŘEDŠKOLNÍM VĚKU

## – 2 – 4 – 1 Význam čísla

Již v předškolním věku poznávají děti číslo v mnoha jeho významech, uveďme tedy některé:

a) Označení množství (počtu prvků): 5 dětí, 3 medvídci, 10 jablek, 4 prsty apod.
b) Číslo jako operátor (pokyn ke změně): přidej mi tři bonbóny, uber mi dva knedlíky apod., o kolik mám víc (méně) než ty aj.
c) Číslo jako pořadí – jsem pátý v abecedě, čtvrtý v řadě, narodil jsem se 15. 6. apod.
d) Číslo jako adresa (pořadí, uspořádání): bydlíme v domě číslo 24, ve třetím poschodí apod.
e) Číslo jako kód – např. kódy na zabezpečovacích zařízeních, PIN, telefonní číslo.
f) Číslo jako veličina (míra) – 2 kg banánů, moje výška je 130 cm aj.

Čísla v různých významech děti zcela přirozeně používají. V každém případě by se však měly seznámit nejprve s číslem ve významu množství a teprve potom ve významu pořadí a s číselnou řadou. Je třeba si také uvědomit, že s čísly v různých významech nelze zacházet stejně, např. sčítat a odčítat můžeme čísla ve významu množství – počtu prvků, ale není to možné např. ve významu čísla jako adresy.

Pojem čísla ve významu počtu prvků je třeba vytvářet a podporovat mnoha různými činnostmi.

- Čísla 1 a 2 spojujeme s částmi těla (Dítě a jeho tělo): Kolik máš očí, rukou, nohou, nosů, brad apod.
- Kolik máš sourozenců?
- Kolik máš kamarádů nebo kamarádek?

Při vytváření čísla 3 (a dalších čísel v oboru do pěti) umístíme na stůl tři předměty (nejprve stejného druhu, později předměty různé) a dáváme dětem úkoly:

a) Řekni, kolik předmětů (jablíček, kostek, kaštanů apod.) vidíš na stole.
b) Kde ještě vidíš stejně věcí jako je na stole?
c) Ukaž tolik prstů, kolik vidíš předmětů.
d) Vyber kartičku, na které je stejně puntíků jako jablíček na stole.
e) Doplň předměty tak, aby byly tři (když je např. na stole méně předmětů než 3).
f) Na obrázcích jsou různé předměty v různém počtu (nejprve od 1 do 5). Vyber ty obrázky, na kterých jsou tři prvky.

Využíváme i pohybových her, např.

a) Na zemi nakreslíme kruhy, do každého zapíšeme některé z čísel jedna až pět a děti se mají postavit do kruhů podle vyznačených čísel (je nutné, aby všechny děti byly zařazeny v některém z kruhů). Po zatleskání se mohou vyměnit děti do jiných kruhů tak, aby jich bylo tolik, kolik je v kruhu zapsáno).

b) Umístíme dětem na záda kartičky s puntíky (od jedné do pěti) a děti se mají rozdělit do skupin tak, aby v každé skupině byly děti se stejným počtem puntíků na zádech.
c) Rozdáme dětem kartičky s tečkami od jedné do pěti a požadujeme, aby vytvořily vždy řady pěti dětí tak aby kartičky byly uspořádané od jedné do pěti.

Dalším důležitým poznatkem je, že změnou konfigurace se počet prvků nemění. Dětem dáme pět tyčinek a vyzveme je, aby z nich něco vytvořily. Děti tak vytvářejí různé sestavy, např. sestavují domeček, šipku a nejrůznější obrázky podle vlastní fantazie, sestavy se liší tvarem, avšak neliší se počtem – tyčinek je stále pět. Podobně sestavují různé stavby z pěti stejných krychlí.

Intuitivně přicházejí k závěru, že změnou tvaru obrázku nebo stavby se nezmění počet prvků.

Využíváme pohádky, ve kterých hraje roli počet osob nebo předmětů, např. Tři zlaté vlasy děda Vševěda, Tři oříšky pro Popelku, Budulínek, Sněhurka a sedm trpaslíků, Pohádka o dvanácti měsíčkách aj. a necháme děti kreslit obrázky postav. Téměř na každé číslo od 1 do 12 lze vybrat nějakou pohádku.

Čísla od jedné do pěti znázorněná pomocí nějakých prvků děti zpravidla poznají bez počítání – zejména když jsou ve vhodném seskupení, jako např. na kostce pro hru Člověče, nezlob se.

### – 2 – 4 – 2 Počítání po jedné

Uvědomme si, co vlastně děláme, když počítáme po jedné. Máme-li skupinu předmětů, u kterých na první pohled nepoznáme, kolik jich je, zpravidla ukazujeme na jednotlivé předměty prstem (nebo je označíme tužkou) a ke každému přiřadíme jedno slovo ze známé uspořádané řady číslovek – jedna, dvě, tři, … až patnáct (např.) a poslední vyslovená číslovka udává počet prvků ve skupině. Tímto vlastně skupinu předmětů uspořádáme a každému předmětu přiřadíme prvek z uspořádané skupiny číslovek.

Cílem je, aby děti uměly vyjmenovat řadu čísel od jedné do pěti, později do deseti, a to vzestupně i sestupně. Přitom však za každou vyslovenou číslovkou by měly vidět počet prvků, aby nepoužívaly pojmy bezobsažně, bez významu.

Při počítání po jedné je třeba respektovat, aby:

- nebyl vynechán žádný prvek,
- žádný prvek se nepočítal dvakrát,
- při změně konfigurace předmětů nedošlo k chybnému počítání, kdy názvy čísel jsou vázány těsně na určité předměty,
- konkrétní předměty nebyly počítány od nuly.

Pokud bychom učili děti pouze vyjmenovat řadu slov (číslovek) od jedné do deseti a děti neměly vytvořenou představu čísla tak, aby si za každým slovem uměly představit počet prvků, dojde většinou k tomu, že děti např. počítají: jedna, dvě, tři, čtyři, sedm, pět, čtyři …, tj. říkají jakási slova bez obsahu.

Číselná řada je jednou z očekávaných kompetencí dítěte v předškolním věku.

Podpůrné jsou i různé básničky nebo říkadla, kdy se postupně číselná řada opakuje, např:

- Jedna, dvě, Honza jde, nese pytel mouky.
- Jedna, dvě, tři, my jsme bratři.
- Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, cos to, Janku, cos to snědl.
- Jedna, dvě, Honza jde.
  Jedna, dvě, tři, pes ho větří.
  Jedna, dvě, tři, čtyři, kampak si to míří?
  Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, běží k mámě na oběd.

Pro čísla do deseti, např. Oře, oře Jan, přiletělo k němu devět vran.

K upevnění představy čísla vyžíváme i různých hádanek (čtyři rohy, čtyři nohy apod.).

Pomocí běžných činností se děti připravují k pochopení velikosti předmětů (malý, velký, krátký, dlouhý, široký, úzký, vysoký, nízký aj.), porovnávání počtu předmětů (více, méně, stejně).

Další činnosti spočívají v tom, aby děti přidaly nebo dokreslily prvky podle pokynů: Polož na stolek stejně lžiček, jako je hrníčků, přines stejně jablíček, jako je dětí, nakresli více mrkví, než je králíků, nakresli méně vajíček, než je slepic apod.

Některé propedeutické činnosti se mohou týkat časových údajů:
Když mi byl 1 rok, začal/a jsem chodit.
Když mi byly 3 roky, začal/a jsem chodit do mateřské školy.
Až mi bude 6 roků, začnu chodit do 1. třídy.

### – 2 – 4 – 3 Příprava na operace s přirozenými čísly

V rámci běžných her a denních činností se mohou děti setkat i s operacemi s přirozenými čísly, např. Na misce jsou tři jablka, dvě jablka přidáme, kolik jich pak bude na misce?

Vždy se vychází z konkrétní manipulace s předměty a v žádném případě nejde o výuku sčítání, ale o přípravu na pochopení této operace. V první fázi se nejprve používají předměty stejného druhu, např. 2 švestky a 3 švestky, aby součet měl stejné pojmenování jako oba sčítanci a teprve později se využívá předmětů různého druhu, např. 2 hrušky a 3 jablka, kdy součet má již název nadřazený (ovoce). Pokud se využívá obrázků nebo grafického znázornění pomocí symbolů, je třeba dbát na jeho správnost.

K přípravě na další operace (odčítání, násobení, dělení) s přirozenými čísly volíme příklady typu:

- Na talíři byly čtyři koblížky, dva jsme snědli. Kolik koblížků zůstalo na talíři?
- Maminka má tři děti, každému dá 2 bonbóny. Kolik bonbónů jim dá celkem?
- Rozděl 6 kuliček mezi tři děti tak, aby měly stejně. Kolik kuliček bude mít každé dítě?
- Rozděluj 6 kuliček dětem tak, aby každé dítě mělo tři kuličky. Kolik dětí podělíš?
- Uměl/a bys rozdělit 7 bonbónů mezi tři děti?
- Uměl/a bys rozdělit pět jablek mezi dvě děti?

Vybíráme činnosti tak, aby děti rozdělovaly předměty (kaštany, bonbóny, kostky aj.) mezi několik dětí tak, aby měly všechny děti stejně a rozdělili jsme, pokud to lze, všechny předměty. Dělení může být beze zbytku nebo se zbytkem.

Dále rozdělujeme předměty po několika (oříšky do misek po třech, kaštany dětem po pěti apod.). Opět může být rozdělování beze zbytku nebo se zbytkem.

Již v předškolním věku se děti mohou setkávat s významem pojmu zlomek jako části celku, např. polovina rohlíku, čtvrtka chleba, půl jablíčka, avšak pouze ve smyslu rozdělování konkrétních objektů. Rozdělujeme jablíčko na stejné části – na poloviny, čtvrtiny, papír rozdělíme na poloviny apod. Řešíme problém, kdy máme 3 jablka a chceme je spravedlivě rozdělit mezi 6 dětí. Děti, které již v předškolním věku hrají na hudební nástroj, se seznamují s notami celými, půlovými, čtvrťovými. Všechny tyto činnosti napomáhají chápání pojmu zlomek jako části celku.

## – 2 – 5 GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVY

S geometrickými útvary se děti setkávají již od nejútlejšího věku na předmětech, které je obklopují. Učí se orientovat v prostoru, sledováním obrázků v knihách se učí vnímat vztah rovina – prostor. Postupně se vytváří geometrické představy. Jde zejména o tyto:

1. Orientace v rovině a v prostoru – vztahy nahoře, dole, před, nad, pod, za, vedle, mezi, vlevo, vpravo, uprostřed.
2. Poznávání tvarů – hranaté, kulaté, špičaté, trojúhelník, kruh, čtverec, obdélník.
3. Poznávání těles – krychle, válec, koule, kvádr, hranol.
4. Vytváření koláží podle vlastní fantazie.
5. Stavby podle vlastní fantazie.
6. Kreslení, vybarvování.
7. Zhotovování přáníček, využívání symetrie.

Již v předškolním věku si hrají se stavebnicemi, míči apod. a nejprve se učí rozlišovat věci a předměty hranaté, kulaté a špičaté.

Např. pod pojem „kulaté“ se vejde: míč – koule, kostka ze stavebnice – válec, dopravní značka zákazová – kruh, náušnice, obruč – kružnice.

Postupně se děti učí diferencovat útvary rovinné a prostorové a také používat pojem oblá nebo zaoblená tělesa (např. pro kouli a válec).

Hierarchie pojmů:

- hranaté
  - obdélník, čtverec
  - kvádr, krychle, hranol, mnohostěny
- kulaté
  - kruh, kružnice
  - koule, válec
- špičaté
  - trojúhelník
  - jehlan, kužel

Hry s různými stavebnicemi přispívají k rozlišování geometrických útvarů i chápání různých prostorových vztahů. Stavby provádějí buď podle vlastní fantazie, nebo podle předlohy. Využívá se přitom různých zákonitostí, opakování tvarů, symetrie aj.

Diferenciace rovinných útvarů předpokládá, že děti postupně rozliší jednotlivé tvary – trojúhelník, čtverec, obdélník, kruh. K vytvoření správných představ by měly útvary vidět vždy jako části roviny, tedy vystřižené např. z papíru nebo barevné fólie a teprve potom nakreslené na papíře nebo tabuli pomocí jejich hranice nebo vytvořené pomocí tyčinek. Pochopení geometrických útvarů v rovině může napomoci skládání různých předmětů z papíru, kdy děti útvary vidí a při vhodném využití i správně vnímají a dokážou je pojmenovat (např. skládání čepice, lodičky, jednoduchá origami aj.).

Velmi vhodnou činností k určování geometrických útvarů je využití tvaru dopravních značek. Některým dětem činí problém rozlišit čtverec a obdélník, některé děti mají problémy s rozlišením kruhu a kružnice.

Při kreslení obrázků se děti učí vnímat různé čáry (přímé, křivé, lomené), učí se znázornit vztahy a vzájemné polohy objektů. Postupně vnímají proporce (např. poměr částí těla osob nebo zvířat) a perspektivu (jak se znázorní prostorová situace v rovině). Na obrázcích vnímají intuitivně shodnost úseček, rovnoběžnost a kolmost přímek, symetrie.

Postupně se připravují na chápání měření délek úseček, určení vzdálenosti pomocí odhadu. Vhodné je např. svislé umístění měřidla – tyčového metru – a měření výšky dětí.

## Shrnutí

Ke správnému vytváření matematických představ a pojmů je nezbytné využívat již v předškolním věku všech příležitostí, které tomu napomáhají. Jde o všestranný rozvoj dítěte, ve kterém se prostřednictvím běžných denních činností a her vytváří představy o počtu, tvaru, velikosti, poloze aj. Je nutné respektovat všechna úskalí, která činnosti a aktivity přinášejí. Přitom je nejdůležitější, aby si dítě vytvářelo poznatky samo vlastní činností a zkušeností, nikoliv to, co ho naučí dospělý.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Sledujte, jak děti v předškolním věku chápou kvantitu a jak se u nich postupně vytvářejí představy o přirozených číslech do pěti (bez zásahu dospělých).
2. Prostudujte publikaci *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání* (Kaslová, 2010).
3. Pozorujte děti v předškolním věku, jak se učí počítat po jedné (vyjmenovat číselnou řadu) a s jakým pochopením.
4. Posuďte didaktickou hodnotu materiálů uvedených v dětských časopisech pro předškolní věk.

# – 3 – ČÍSLA PŘIROZENÁ

Uveďme nejprve několik příběhů, které ilustrují, že pochopení pojmu přirozené číslo a jeho zápisu mohou být u dětí spojeny s řadou problémů a že je třeba respektovat přirozený vývoj dětí a poskytovat jim správné podněty, které v budoucnu nepovedou k chybám.

1. *Jedeme v autobuse, prší a na předním skle se pohybují tři stěrače. Malý Tomášek sedí mamince na klíně a znenadání zvolá: „Tři“. „Kde jsou tři?“, ptá se maminka. Tomášek ukazuje na pohybující se stěrače. Maminka s nadšením: „Tomášku, tys to poznal, ty jsi šikovný, ty už to umíš.“ Stále jej velmi chválila. Na můj dotaz, kolik je Tomáškovi roků, maminka říká: „ukaž paní, kolik ti je“. Tomášek ukazuje tři prstíčky. Potom mi maminka sdělila, co to dalo práce, než se naučil ukázat, že jsou mu tři roky. Maminka byla nadšena, že Tomášek pochopil, co znamená 3.*

Matematik ví, že Tomášek dospívá od představ vázaných na konkrétní předměty k představám univerzálnějším a postupně k abstrakci.

2. *Holčičky si hrají s panenkami. Na můj dotaz, kolik mají panenek, postupně odpovídají:*
   *Maruška: máme hodně.*
   *Eliška: máme Lucinku, Gábinku, Michalku a Karolínku.*
   *Terezka: počítá po jedné: jedna, dvě, tři, čtyři. Jsou čtyři.*
   *Monička: řekne hned: máme čtyři panenky.*

Každá z holčiček je na jiném stupni chápání kvantity – počtu prvků.

3. *Honzík slaví čtvrté narozeniny. Na otázku „kolik je ti roků“ ukazuje čtyři prstíky, na dortu má čtyři svíčky, ale význam pojmu „čtyři roky“ je mu zatím neznámý.*

Postupně se připravuje k chápání čísla 4 v jeho různých významech.

4. *V pokoji si hrají čtyři děti. Pošlou nejmladší z nich – Sofinku – do kuchyně pro buchty. Sofinka bere z mísy nejprve po jedné a potichu si říká: Filipovi, Viktorovi, Aničce a mně. Pak bere ještě jednou po jedné a odnáší osm buchet, aniž by věděla, kolik jich je.*

Sofinka neumí počítat, ale pomocí přiřazování dokáže odnést správný počet buchet.

5. *Jedeme v tramvaji číslo 11 a obě číslice jsou napsány poněkud jinak, než se učí děti psát číslici 1 v první třídě. Maminka jede s holčičkou (tři a půl roku), která má bratříčka v první třídě. Holčička doma zřejmě přihlíží přípravě bratříčka do školy. Ukazuje na číslo v tramvaji a říká: „sedmička“. Maminka namítá: „to*

*není sedmička, ale jednička". Holčička neustále trvá na svém, maminka však také. Až maminka řekne: „to jsou dvě jedničky". Jak holčička uslyší „dvě", začne se velmi zlobit a podrážděně zvolá: „ne dvě, sedm".*

U dítěte se ukazuje problém chápání zápisu čísel, tvaru číslic a nakonec vztahu číslo – číslice.

6. *Petr drží v ruce lístek, na kterém je číslo 200 a říká: „dvojka". Maminka doplňuje: dvojka a dvě nuly, dvě stě. Tříletý Petr vnímá „2" a „dvě" nuly a nemůže pochopit, jak to může být 200.*

Petr ještě nedokáže rozlišit zápis čísla v desítkové soustavě a číslo jako počet prvků.

7. *Tříletého Jirku učí dědeček počítat od jedné do deseti. Jirka počítá: jedna, dvě, tři, čtyři, pět, sedm, devět, čtyři, šest, deset.*

Jirka se učí jakousi „básničku" – řadu slov, ale nevidí za slovy číslo ve významu počtu prvků.

8. *Čtyřletá Adélka „počítá" na krejčovském metru do sta. Při každém přechodu přes desítku se ptá „kolik to je".*

Neustále opakuje slova jedna, dvě,… i v příslušných desítkách, ale představu čísla zatím nemá. Když ji ukážeme 8 prstů, neví kolik to je.

9. *Vzpomíná Saskie: Jako malá jsem nemohla pochopit pojem „dvě" a byla jsem z toho nešťastná. Ukázali mi jeden prst, řekli „jedna", ukázali k němu jiný prst, řekli „dvě". Nechápala jsem, proč dvě, když byl jeden prst a potom zase jeden prst, ale jiný. Bylo to pro mě stresující, stále vidím, jak se mi smějí, jak to já nechápu, a mám z toho negativní zážitek na celý život.*

To, co je pro dospělé zcela samozřejmé, může být pro dítě naprosto nepochopitelné. Jestliže se k tomu přidá nevhodná reakce dospělých (např. lehký posměch nebo pokárání), dítě má trauma na celý život.

10. *Baví se maminka se svou tetou v přítomnosti Janičky, která byla právě u zápisu do první třídy. Tetička mezi jiným říká: „No na matematiku u nás v rodině nikdy nikdo nebyl. To je pro naši rodinu úplná hrůza."*

Vztah k matematice vytváříme téměř za každých okolností, často si to ani neuvědomujeme a Janička již může být ovlivněna negativním postojem dospělých.

11. *Maminka říká dcerce: Letos se budete učit zlomky. To je úplná hrůza. Ale dcerka po zvládnutí zlomků říká: Vůbec to nebyla hrůza, mně se zlomky moc líbí a umím s nimi počítat.*

12. *Ptá se pán, jak se dostane na určité místo ve městě. „Jeďte nejprve tramvají číslo dvě a potom přestupte na osmičku". Jede tramvaj číslo 10. Pán říká: „tak to já můžu jet desítkou".*

Můžeme čísla vždy (v každém jejich významu) sčítat?

## – 3 – 1 SYSTEMATICKÝ PŘÍSTUP PŘI BUDOVÁNÍ POJMU PŘIROZENÁ ČÍSLA

V předcházející kapitole bylo uvedeno, které důležité činnosti předcházejí tomu, aby dítě chápalo správně kvantitu a postupně se u něj vytvářela představa čísla. Jde tedy o:

- hledání společné charakteristické vlastnosti předmětů,
- třídění,
- uspořádání,
- přiřazování.

Uveďme v přehledu, co a jak v souvislosti s čísly v mladším školním věku dítě postupně zvládá a jak se pojem čísla vytváří. Je to důležité zejména z hlediska vývojových poruch učení, protože pokud se u dítěte nevytvoří potřebná abstrakce, je obtížné postupovat v matematice k dalšímu učivu.

a) **Vytvoření pojmu přirozená čísla**

Práce s konkrétními předměty

Práce se symboly – libovolným předmětům přiřazujeme tentýž symbol, dochází k prvnímu stupni abstrakce

Pochopení pojmu čísla – libovolné skupině předmětů či symbolů přiřadíme číslo, dochází ke druhému stupni abstrakce

Vyslovení čísla

Pochopení symbolu k zápisu čísla, číslice

Psaní číslic

b) **Numerace**

Čtení čísel

Zápis čísel

Orientace v číselných řadách

Znázorňování čísel na číselné ose

Porovnávání čísel

Zaokrouhlování čísel

c) **Operace s přirozenými čísly**

Vyvození každé z operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení), práce s konkrétními předměty

Práce se symboly, dochází k prvnímu stupni abstrakce

Zápis příkladu příslušné operace, dochází ke druhému stupni abstrakce

Pamětné spoje

Písemné algoritmy

Aplikační úlohy

d) **Aplikace**

Řešení jednoduchých úloh z běžného praktického života

Uvědomělé používání jednotlivých operací

Práce s veličinami a jednotkami měr

Využívání odhadů

Matematické modely reálných situací a jejich interpretace v realitě

## – 3 – 2 BUDOVÁNÍ POJMU PŘIROZENÉ ČÍSLO V MLADŠÍM ŠKOLNÍM VĚKU

V kapitole 2 byl přiblížen proces budování přirozeného čísla prostřednictvím činností v předškolním věku. Na tuto zkušenost děti navazují v prvním ročníku základní školy, jejich zkušenosti se upřesňují a postupně přecházejí od činností charakteristických hrou k činnostem a poznatkům založených na základě myšlenkových operací. I když jsou zpočátku činnosti a myšlení založeny na názornosti a konkrétnosti, dochází postupně k abstrakci tak, aby děti pochopily pojem přirozené číslo v jeho obecnosti a všech významech.

### – 3 – 2 – 1 Teoretická podstata pojmu přirozené číslo

Teoretické základy budování pojmu přirozené číslo je možné najít v publikacích týkajících se aritmetiky nebo algebry. Uveďme jen stručně možnosti jejich zavedení.

a) Přirozená čísla se zavádějí jako kardinální čísla konečných množin. V tomto případě je třeba chápat pojmy zobrazení, ekvivalentní množiny, kardinální číslo množiny A.
Kardinální číslo množiny A je třída, do které patří množina A z neprázdného systému množin a všechny množiny s množinou A ekvivalentní. Dvě množiny jsou ekvivalentní, právě když existuje prosté zobrazení jedné množiny na druhou (každému prvku jedné množiny přiřadíme právě jeden prvek druhé množiny a naopak).

| | | | |
|---|---|---|---|
| o | o | o | o |
| \| | \| | \| | \| |
| x | x | x | x |
| \| | \| | \| | \| |
| n | n | n | n |
| \| | \| | \| | \| |
| l | l | l | l |

b) V případě, kdy nelze určit počet prvků souboru objektů jediným pohledem, využíváme možnosti zavedení přirozených čísel pomocí čísel ordinálních. Např. Divíšek (1989, s. 57) uvádí:

> „Zvolme si nějaký systém dobře uspořádaných množin a definujme na něm binární relaci „množina X je podobná množině Y“. Tato relace indukuje rozklad daného systému množin a název každé třídy rozkladu je ordinálním číslem všech množin, které jsou v této třídě. Podobnost množin chápeme jako existenci vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dobře uspořádanými množinami, ve kterém pořadí vzorů určuje pořadí obrazů.“

Ordinální číslo dané konečné množiny určíme tak, že množinu nějakým způsobem uspořádáme a každému prvku postupně přiřazujeme číslovku z číselné řady. Poslední použitá číslovka pak udává počet prvků v množině – souboru prvků. Na obrázku je ilustrováno, že můžeme prvky uspořádat např. po řádcích nebo po sloupcích, vždy určíme počet prvků dané skupiny.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| o | o | o | nebo | o | o | o |
| jedna | dvě | tři | | jedna | čtyři | sedm |
| o | o | o | | o | o | o |
| čtyři | pět | šest | | dvě | pět | osm |
| o | o | o | | o | o | o |
| sedm | osm | devět | | tři | šest | devět |

Každému prvku přiřadíme jedno slovo z uspořádané řady číslovek – jedna, dvě, tři…, prvky počítáme po jedné, žádný nesmíme vynechat a žádný nesmíme počítat dvakrát a nezáleží na tom, jakým směrem při počítání postupujeme, zda prvky počítáme v řádcích, sloupcích nebo i jinak.

c) Přirozená čísla se zavádějí pomocí prvků Peanovy množiny.

Nejprve vytvoříme představu čísla 1 (např. máme jednu hlavu, jednu maminku, jedno je sluníčko). K jednomu prvku přidáme další – vytvoříme číslo 2, ke dvěma prvkům přidáme další, vytvořme číslo 3 a tak postupujeme stále dál. Pomocí čísla 1 tak prostřednictvím vytvořením následovníka dostaneme množinu všech přirozených čísel.

Současně s vytvářením pojmu čísla se děti učí psát příslušnou číslici 1 až 9, 0 a později pomocí číslic zapisovat víceciferná čísla.

### – 3 – 2 – 2 Význam čísla, číselné soustavy

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, děti se odmalička setkávají s čísly v různých významech. Na prvním stupni ZŠ by se měly tyto představy ujasnit poměrně přesně, aby dítě mohlo s čísly pracovat dál (zejména provádět operace s čísly). Znovu tedy zopakujme význam čísla:

- Číslo ve významu množství – tj. počtu prvků určité skupiny (množiny) – 5 dětí, 3 rohlíky, 4 jablka apod.
- Číslo ve významu pořadí – první v řadě, narodil jsem se 2. 8. 2009.
- Číslo jako veličina – 2 kg mouky, 3 litry mléka, 75 Kč, 37 °C.
- Číslo jako adresa – např. bydlíme v domě číslo 8, v pátém poschodí.
- Číslo jako kód – pin platební karty, zabezpečovací kód, telefonní číslo.
- Číslo jako operátor – o kolik, kolikrát (více, méně).

V prvním ročníku se seznamují děti s čísly do dvaceti a již při vytváření čísel 10–20 začínají děti chápat podstatu poziční číselné soustavy desítkové.

**Číselné soustavy**
V současnosti používáme poziční desítkovou soustavu, to znamená, že deset prvků nižšího řádu tvoří bezprostředně následující jednu jednotku vyššího řádu, např. deset jednotek je jedna desítka, deset desítek je jedna stovka atd. a v zápisu čísla záleží na pozici jednotlivých číslic. Každá číslice v zápisu čísla má dvě hodnoty, hodnotu vlastní (počet jednotek příslušného řádu) a hodnotu místní (na kterém místě v zápisu čísla je uvedena). Např. v čísle 333 je vlastní hodnota vždy 3, ale místní hodnota každé z číslice je jiná – 3 jednotky, 3 desítky, 3 stovky.

V historii se používalo mnoho různých číselných soustav. Některé byly adiční (nezáleželo na umístění znaků, hodnota čísla se určila sečtením hodnot jednotlivých znaků). Takovou soustavou byla např. číselná soustava starých Egypťanů.

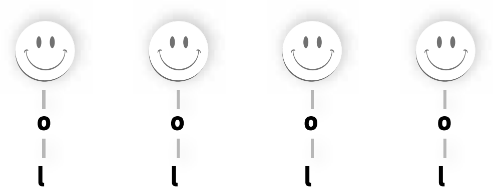
Požívaly se soustavy o různých základech, např. Babylóňané používali soustavu o základu šedesát.

Didakticky se tato teorie transformuje takto:

Nejprve budujeme čísla do pěti, potom do deseti.

a) Např. vytváříme číslo čtyři:

   1. Dítěti se ukazují různé skupiny konkrétních předmětů, učí se chápat pojem „stejně“ (např. kaštany, jablka, židle, děti aj.)
   2. Dítě přiřazuje symboly – ke konkrétním předmětům přiřazuje nejprve obrázky a potom symboly, např.



(přiřazujeme puntíky, tyčinky, čárky aj.)

4

   3. Všechny skupiny (předmětů nebo symbolů), které vytvoříme tak, že mají stejně prvků, tj. prvky se dají vzájemně jednoznačně přiřadit), určují přirozené číslo.
   4. Nezáleží na konfiguraci prvků – např. pomocí čtyř tyčinek nebo pomocí čtyř čtverců nebo krychlí můžeme vytvářet různé sestavy, tvar je jiný, ale počet předmětů je stejný.
   5. U dítěte se postupně vytváří takový stupeň abstrakce, že při vyslovení slova „čtyři“ nemusí vidět žádné konkrétní předměty a chápe je jako celou třídu skupin prvků, kterých je stejně (jsou čtyři).
   6. Současně s budováním pojmu čísla se dítě učí názvy čísel vyslovovat a zapisovat čísla pomocí číslic.

b) Jestliže je na hromádce nebo na obrázku více prvků a dítě nepozná na první pohled kolik jich je, zpravidla je počítá po jedné. Ukazuje na předměty a zároveň každému předmětu přiřazuje jedno slovo z řady číslovek: jedna, dvě, tři, čtyři, pět atd. Poslední vyslovená číslovka určí počet předmětů ve skupině.

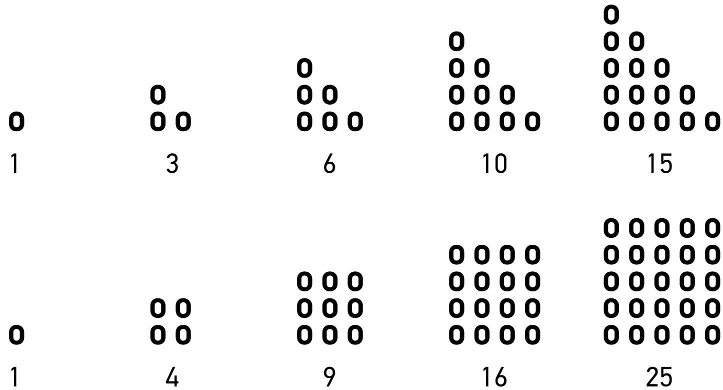
**Číslo 0**

Číslo 0 je třeba vytvářet analogicky jako každé jiné číslo – jako počet prvků prázdné množiny. Např. na jednom talíři jsou tři koblihy – označíme číslem 3, druhý talíř je prázdný – počet označíme číslem 0.

Číslo 0 je možné vyvodit také odčítáním dvou sobě rovných čísel, např. $3 - 3 = 0$.

Při vytváření čísla 0 není vhodné používat pojmy „nic“ nebo „žádný“, protože pak se děti k nule chovají jako k „ničemu“ a neuznávají ji ani jako číslo, ani jako pozici v zápisu čísla. Nerozliší zápisy např. 32, 302. (Přitom stačí zapsat nulu k jinému nenulovému číslu zprava a číslo se desetkrát zvětší – např. 7, 70).

Prvky v určitém počtu je možné modelovat pomocí různých seskupení, které mají určitou pravidelnost. Mohou to být např. konfigurace puntíků na hrací kostce pro hru „Člověče, nezlob se“, nebo konfigurace známé z historie jako tzv. Pythagorejská čísla, kdy se prvky sestavují do trojúhelníků nebo čtverců (čísla trojúhelníková, čísla čtvercová). Tyto konfigurace si děti snadněji zapamatují.




**Číslice**
K zápisu čísel používáme znaky – číslice, kterých je v desítkové soustavě 10 – jednička, dvojka … devítka, nula. Pomocí těchto deseti znaků zapíšeme jakékoliv přirozené číslo.

Psaní číslic je pro děti náročné, např. dvojka, osmička, proto je vhodné rozfázování psaní jednotlivých částí číslic. Některým dětem dělá problémy rozlišení znaků, např. 6 a 9, 2 a 5, děti s poruchou pravolevé orientace mají problémy se zápisem čísel 1, 3, 7. V současnosti je také třeba, aby děti zvládly digitální zápis čísel, zejména vzhledem k jejich velmi častému používání na různých přístrojích.

Důsledné rozlišování pojmů „číslo“ a „číslice“ přispívá k lepšímu chápání u dětí (např. ve školské matematice není vhodné používání výrazů patnáctka, třicítka apod. – neboť číslo 15 je zapsáno dvěma číslicemi – jedničkou a pětkou, patnáctka není číslice).

**Čísla 10–20**
Při rozšíření číselného oboru do dvaceti je třeba si uvědomit, že zde se začínají vytvářet základy poziční číselné soustavy desítkové. V zápisu čísla 15 má „1“ již jiné postavení, neboť označuje jednu desítku, což je 10 jednotek. Děti potřebují mnoho konkrétních modelů, aby viděly 10 jednotek jako jednu desítku (vhodné jsou např.

svazky tyčinek nebo brček na pití svázané po deseti). Méně vhodné jsou pro některé děti s poruchou učení v první fázi papírové kartičky nebo modely peněz, protože dítě vidí jednu kartičku nebo jednu desetikorunu a nevidí za jednou desítkou 10 jednotek.

**Čísla 0–100**

Vycházíme nejprve z kontextu – kde se dítě setká s čísly do sta (věk rodičů, prarodičů, počet dětí ve třídě, počet zubů, hmotnost dítěte v kilogramech, počet dní v měsíci, ceny některého zboží aj.)

Zápis dvojciferných čísel vyžaduje jasnou představu o desítkách a jednotkách v dvojciferném čísle – dětem dělá problémy např. rozlišit čísla 26 a 62. Představa je nutná i pro chápání řady čísel do sta, protože pokud ji děti nemají, nedokážou přecházet mezi jednotlivými desítkami (např. počítají třicet osm, třicet devět, třicet deset…) a mají problémy zejména s čísly od 50 do 100. Řadu čísel by měly umět vyjmenovat vždy od určitého čísla k jinému vzestupně i sestupně.

**Čísla 0 – 1 000**

Motivací čísel do tisíce může být počet žáků ve škole, v menší obci počet obyvatel obce, počet dnů v roce, výška dítěte v centimetrech, délka skoku do dálky v cm, ceny některého zboží aj.). Pokud se u dítěte objevují problémy při chápání čísel do sta, analogické problémy se vyskytnou při chápání čísel do tisíce.

**Čísla 0 – 1 000 000**

Pro správné pochopení čísel větších než 1 000 je nutná vhodná motivace (kde se dítě setká s čísly od tisíce do deseti tisíc) a dále pochopení principu poziční desítkové soustavy a zápisu čísla v ní. Jde zejména o pochopení, že deset jednotek nižšího řádu tvoří jednu jednotku vyššího řádu (deset jednotek tvoří jednu desítku, deset desítek tvoří jednu stovku atd.) a dále, že na každém místě v zápisu čísla může být pouze jedna číslice. K znázornění velkých čísel můžeme využít řádové počitadlo.

## – 3 – 3 PROBLÉMY DĚTÍ V OBLASTI CHÁPÁNÍ POJMU PŘIROZENÁ ČÍSLA

a) dítě neumí vytvořit skupinu předmětů o daném počtu prvků,
b) neumí určit počet prvků dané skupiny,
c) při počítání po jedné je vázáno na konkrétní předměty, takže při změně konfigurace těchto předmětů uvádí to číslo, které mu bylo přiřazeno poprvé (např. při počítání panenek počítá: jedna, dvě, tři, čtyři, pět, avšak když se panenky přemístí, počítá např. jedna, čtyři, dvě, pět, tři),
d) dítě neumí vyjmenovat řadu čísel v přirozeném uspořádání vzestupně i sestupně,
e) dítě není schopno zbavit se konkrétních představ a nevytvoří se u něj pojem čísla,
f) nepochopí podstatu poziční desítkové soustavy.

**Problémy dětí se zápisem čísla**

a) problémy se zvládnutím psaní číslic, psaní číslic v přiměřené velikosti,
b) problémy s rozlišením číslic tvarově podobných, např. 6, 9; 3, 8; 3, 5; 2, 5 v zápisu číslicemi arabskými i v digitálním tvaru,
c) problémy s pravolevou orientací – u číslic jednostranně orientovaných (např. 1, 3, 7) neví, na kterou stranu se píší,
d) nerozlišování řádu číslic – u dvojciferných čísel nerozlišuje např. 35 a 53, 435 a 453 apod.,
e) chybný zápis čísel s nulami – např. místo 305 píše buď 35, nebo 3005 (slyší tři sta pět, a tak to zapíše),
f) nepochopení čísla jako celku – např. v zápisu čísla 647 dítě vidí jen izolované číslice 6, 4, 7 a nikoliv číslo jako celek,
g) neschopnost psát čísla podle diktátu.

Dále je důležité správně budovat pojmy číslo a číslice a správně je rozlišovat. Číslic (cifer), tj. znaků používáme 10 (nula, jednička, dvojka … devítka) a pomocí těchto deseti znaků umíme zapsat jakékoliv číslo. Vyjádření jako „patnáctka“, „dvacítka“ nemají ve školské matematice místo, jak již bylo řečeno dříve. Číslo 15 je zapsáno pomocí dvou znaků – jedničky a pětky, ale jeden znak pro patnáctku neexistuje. Na otázku, zda může být trojka větší než pětka, můžeme odpovědět kladně, protože znaky mohou takto být zapsány: 3, 5, ale číslo 3 je vždy menší než číslo 5.

**Počítání po jedné (po desítkách, stovkách atd.)**

Pro zvládnutí posloupnosti přirozených čísel a pro počítání po jedné je třeba, aby děti znaly bezpečně uspořádanou řadu slov „jedna, dvě, tři, čtyři…“, analogicky pak „deset, dvacet, třicet…“ a např. „dvacet jedna, dvacet dva…“, aby slova nezaměňovaly a aby za každým vysloveným slovem viděly vždy počet prvků. Řady čísel se učí vyjmenovat vzestupně i sestupně (to má význam pro další operace s přirozenými čísly, zejména pro odčítání). Uvědomme si však náročnost vyjmenovat číselnou řadu sestupně. Řekněte si např. nějakou větu nebo básničku, která má např. asi 15 slov (např. Měla babka čtyři jabka) a potom se pokuste říci ji pozpátku. Koncentrace na jednotlivá slova je veliká a často si musíte větu nebo básničku opakovat, abyste zjistili, v jakém uspořádání jednotlivá slova původně byla. Podobně náročné je pro dítě vyjmenovat číselnou řadu od 20 do 1.

Dále je důležité, aby děti:

a) konkrétní předměty nepočítaly od čísla 0,
b) při počítání konkrétních předmětů nepočítaly některý předmět dvakrát,
c) aby počítaly správně i při změně konfigurace předmětů.

**Problémy dětí se čtením čísel**

a) neumí rozlišit a přečíst jednotlivé znaky – číslice,
b) neumí přečíst víceciferná čísla, např.
2 008 čte dva osm nebo dva nula nula osm,

2 010 čte dva deset, nebo dva nula jedna nula, dvacet deset apod.,

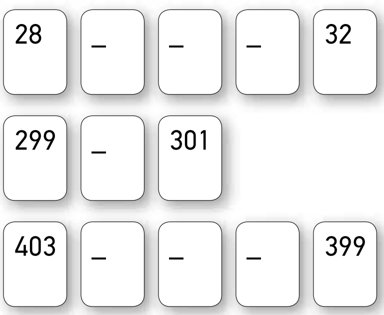
c) neorientuje se ve větších číslech, např. se čtením čísel řádu statisíců a větších si neví rady,

d) neumí skloňovat číslovky.

## – 3 – 4 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Manipulativní činnosti s konkrétními předměty, s obrázky, se symboly. Využíváme běžných denních činností – např. prostírání nádobí k obědu, hry dětí ve skupinách, práce s krabičkami, obálkami apod., kdy děti doplňují předměty tak, aby v nich byl stanovený počet (nejprve do pěti, potom do deseti), využívání znázornění čísel od 10 do 20 pomocí svazků (např. brček, dřívek apod.). Nezbytné je zapojení všech smyslů (hmat, sluch, zrak, pohyb) a poté matematický zápis činnosti.
2. Důležité jsou pohádky, ve kterých hraje roli počet (např. 7 trpaslíků) nebo posloupnost dějů (např. O kohoutkovi a slepičce).
3. Podpůrné jsou různé říkánky a písničky, ve kterých se vyskytují číselné údaje (např. Jedna, dvě, Honza jde…; Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, cos to Janku, cos to snědˇ; Měla babka čtyři jabka… apod.)
4. K chápání víceciferných čísel je třeba využívat speciální kartičky, např. číslo 753 se znázorní pomocí kartiček, které se kladou na sebe:


5. Využíváme různé typy počitadel (dvacítkové, stovkové, řádové), avšak práci s počitadlem je třeba dítě naučit. Vhodná jsou např. stovková počitadla, u kterých jsou různobarevné kuličky vždy po deseti na jednom drátě.
6. Ke správnému zvládnutí posloupnosti přirozených čísel využíváme kartičky k doplňování jednoho nebo více čísel, a to vzestupně i sestupně, zejména procvičujeme přechody přes desítky, stovky apod., např.



Cílem všech činností je, aby děti uměly vytvořit skupinu o daném počtu prvků, aby dokázaly určit počet prvků v dané skupině, aby uměly zapsat dané číslo a aby docházelo k postupné abstrakci potřebné pro pochopení pojmu přirozené číslo. Dále je třeba, aby děti zvládly vyjmenovat řadu čísel v uspořádání vzestupně i sestupně. Je třeba uvědomit si, že vyjmenovat řadu čísel od 20 do 1 je pro dítě stejně obtížné, jako pro dospělého říkat pozpátku nějakou delší větu.

## Shrnutí

Proces vytváření pojmu přirozené číslo je dlouhodobý a je třeba ponechat dítěti dostatek času, aby k tomuto pojmu dospělo samostatně. Vzhledem k nestejnoměrnému vývoji dětí nelze stanovit, v kterém období tomu nastane. Nemá smysl, aby děti počítaly po jedné – vyjmenovávaly řadu slov (číslovek) bez pochopení významu každého čísla. Postupné rozšiřování číselného oboru od 0 do 1 000 000 je třeba provádět citlivě, aby dítě pochopilo princip vytváření poziční číselné soustavy desítkové, umělo čísla správně vyslovit a zapsat. Bez řádného vytvoření pojmu přirozené číslo nemůže dítě pochopit další učivo. Pokud má dítě s diagnostikovanou dyskalkulií s víceciferným čísly problémy, lze v rámci individuálního plánu číselný obor upravit (např. bude počítat nejvýše s čísly čtyřcifernými).

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Charakterizujte problémy, se kterými se setkáváme u dětí při vytváření pojmu přirozené číslo.
2. Uveďte, jaký je rozdíl mezi číslem a číslicí.
3. Navrhněte pomůcky, které mohou pomoci dětem k budování pojmu přirozené číslo.
4. Uveďte některé problémy, které mají děti se zápisem číslic.
5. Uveďte některé problémy dětí při čtení a zápisu víceciferných čísel.
6. Vymyslete motivační příklady k pochopení „velkých“ čísel (větších než 10 000).

# – 4 – POROVNÁVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

*Kuba je žákem druhé třídy. Dělají mu problémy „větší, menší“ v souvislosti s čísly, stále neví, zda 7 je menší či větší než 8, neví si rady, jak umístit mezi čísla znaky >, <.*

Porovnávání přirozených čísel se provádí několika způsoby. Využívá se pojmu zobrazení nebo se k porovnávání přirozených čísel používá číselná osa a nebo se využívá zápisu čísla v desítkové soustavě.

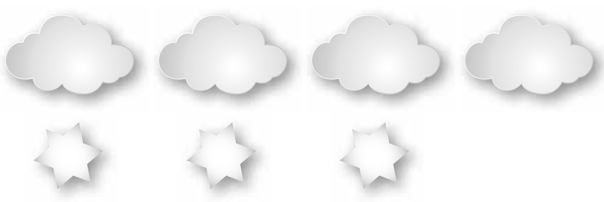
K základním dovednostem žáka patří umět rozhodnout, která skupina má více či méně prvků a které číslo je větší či menší. Aby děti neměly problémy, které by byly způsobeny nedostatečnou nebo nevhodnou výukou, je třeba zachovat určitý metodický postup:

- Nejprve se děti učí chápat vztahy „více“, „méně“, „stejně“ (bez čísel). K tomu se využívá obrázků a tvoření dvojic.
- Teprve ve druhé fázi se ke skupinám prvků přiřadí čísla a porovnávají se přirozená čísla pomocí vztahů „větší“, „menší“, „rovná se“.
- Zvládne se technika používání znaků >, <, =.

## – 4 – 1 POROVNÁVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL S VYUŽITÍM ZOBRAZENÍ

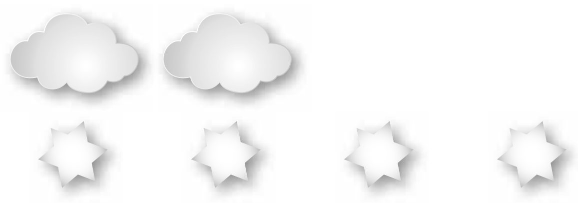
Pomocí přiřazování předmětů – tvoření dvojic se děti učí chápat vztahy „více“, „méně“, „stejně“, avšak nejprve bez čísel.

a)



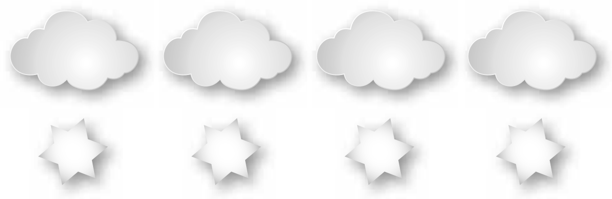
Obláčků je více než hvězdiček.

b)



Obláčků je méně než hvězdiček.

c)



Obláčků je stejně jako hvězdiček.

Takových podnětů na různých činnostech nebo obrázcích potřebuje dítě mnoho. Využívá se činností s konkrétními předměty, zejména s hračkami (např. panenky – kočárky, auta – garáže, talíře – lžičky, děvčata – chlapci aj.), dále pak modelování a kreslení. Neustále se pracuje s objekty bez čísel a zdůrazňují se vztahy „více“, „méně“, „stejně“.

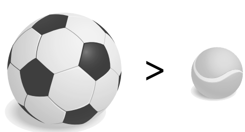
Teprve ve druhé fázi se skupinám objektů přiřadí číslo a děti porovnávají počet předmětů:

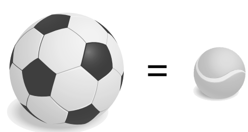
$4 > 3$ $\quad$ $2 < 4$ $\quad$ $4 = 4$

Varujme se chybného grafického znázornění:

a) Nerozlišování mezi velikostí objektů a jejich počtem (mezi objekty nevkládáme znak pro porovnávání nebo rovnost, protože v další výuce budeme požadovat, aby děti pochopily, že na obrázku je jeden míč velký a jeden míč malý.

**Chybně:**




**Správně:**

Velký míč Malý míč $\qquad$ 1 = 1

b) Nerozlišování mezi ekvivalencí množin a počtem prvků:

**Chybně:**

○○○○ = ♡♡♡♡

Kruh se nikdy nerovná srdíčku.

**Správně:**

○○○○  ♡♡♡♡

4 = 4

**c)** Nesprávné je i znázornění typu ○ ○ ○ ○ ○ > ○ ○ ○ ve smyslu 5 > 3, nebo ○ ○ ○ ○ ○ > 3.

**Správně:**

○○○○○  ○○○

5 > 3

nebo lépe

○○○○○ 5

○○○ 3

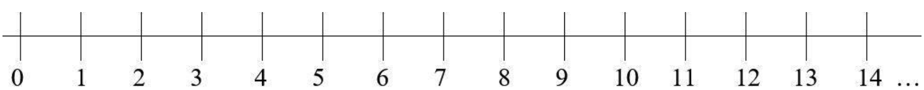
5 > 3

**Chybný** je i zápis ○ ○ ○ ○ ○ = 5. Zde je nesprávně použit symbol pro rovnost = .

Tedy mezi objekty nelze umisťovat znaménka pro porovnávání nebo rovnost – předměty se sobě nerovnají ani neporovnávají, porovnáváme pouze **jejich počet**.

## – 4 – 2 POROVNÁVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL POMOCÍ ČÍSELNÉ OSY

Nejprve je třeba si uvědomit, co je číselná osa. Obecně je číselná osa přímka, na které znázorňujeme obrazy reálných čísel. Každému reálnému číslu je přiřazen právě jeden bod na přímce a naopak každému bodu přímky odpovídá právě jedno reálné číslo. Pokud pracujeme pouze s čísly přirozenými, tak znázorňujeme číselnou osu jako polopřímku, na které je počátek polopřímky obrazem čísla 0 a každému přirozenému číslu je přiřazen právě jeden bod (nikoliv úsečka).




Na číselné ose porovnáváme čísla podle jejich vzájemné polohy, nikoliv podle vzdálenosti od počátku, tedy od nuly. Porovnávání přirozených čísel pomocí vzdálenosti od nuly v budoucnu dětem komplikuje porovnávání čísel záporných.

**Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší to, jehož obraz leží více vpravo.**

## – 4 – 3 POROVNÁVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL POMOCÍ ZÁPISU V DESÍTKOVÉ SOUSTAVĚ

a) U přirozených čísel platí, že ze dvou čísel je větší to, v jehož zápisu je více cifer, např.

   7 542 < 12 509

b) Pokud mají čísla ve svém zápisu stejný počet číslic, porovnáváme počet jednotek příslušných řádů, až najdeme ten řád, ve kterém se liší, např.

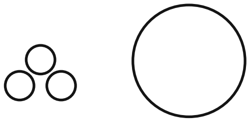
   Porovnáváme čísla 49 567 a 49 576. Desetitisíců, tisíců a stovek je v obou číslech stejně, čísla se liší až počtem desítek. Protože 6 < 7, je

   49 567 < 49 576

## – 4 – 4 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI POROVNÁVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

1. **Neschopnost používání znaků <, >**
   I když dítě znak pochopí, že k většímu číslu se „rozevírá“, jakmile jej má umístit mezi čísla, má problémy. Mnoho dětí má problémy s pochopením a umístěním znaků nerovnosti, ač se jim učitelé snaží nabízet nejrůznější mnemotechnické pomůcky.

2. **Nerozlišování porovnávání tvaru předmětů a jejich počtu**
   Děti nejprve porovnávají předměty – např. velký míč, malý míč, velký kruh, malý kruh. Pokud nepoužíváme grafického znázornění správně, dítě má problém při řešení úlohy typu, kdy vidí tři malé kruhy a jeden velký. Tři malé kruhy mu připadají menší než jeden velký, avšak většinou v tomto případě má porovnávat počet kruhů.

   Má tedy zapsat 3 > 1.

3. **Chybné používání číselné osy při porovnávání přirozených čísel**
   Pokud se dětí naučí u přirozených čísel porovnávat čísla pomocí vzdálenosti od nuly (ze dvou čísel je větší to, které je dále od nuly), má v budoucnu velké problémy při porovnávání záporných čísel, neboť tam tato poučka neplatí.

4. **Při porovnávání čísel pomocí zápisu se děti zaměří na větší číslo zapsané na místě nejvyššího řádu, ale ne na počet řádů**

   Např. 985 > 1 123, protože 9 > 1 (bez ohledu na příslušné řády).

## – 4 – 5 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Zásadně využívat správného znázornění pomocí konkrétních předmětů, jak bylo uvedeno výše. Nezaměňovat porovnávání velikostí předmětů s porovnáváním jejich počtu.

2. Vytváření skupin prvků podle požadavků – např.:
   - Děvčat je 6, chlapců je méně. Kolik může být chlapců? – vymodeluj, znázorni na obrázku, zapiš příslušnou nerovnost.
   - Králíků je 5, nakresli více mrkví, než je králíků. Zapiš.
   - Slepic je 8, nakresli méně vajec než je slepic. Zapiš.

3. V případě, že děti správně využívají číselné osy, je možné ji k porovnávání přirozených čísel využít.
4. Znázorňování obrázků k zapsané nerovnosti, např. k zápisu $7 > 5$ nakresli obrázek.
5. Důležité je chápání obou zápisů nerovností, např. $3 < 5$ , $5 > 3$.
6. Při porovnávání víceciferných čísel vždy zdůrazňovat příslušné řády, např. 9 stovek, 1 tisíc apod.
7. Při eventuálních chybách požádat dítě o znázornění situace (konkrétní předměty, kartičky, modely peněz apod.) – zda dítě vůbec chápe požadovaný úkol.

V návaznosti na porovnávání čísel a zápis nerovností řeší úlohy typu „o kolik má více (méně)“, eventuálně „kolikrát má více (méně)“. Tyto úlohy je vhodné zařazovat až po probraných příslušných operacích. Pokud však děti samy spontánně zvládnou tyto situace dříve, nebráníme jim.

# – 5 – ZAOKROUHLOVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Andělka má zaokrouhlit číslo 46 275 na tisíce a zapíše: 46 075.

*Andělka neví přesně, jak se zaokrouhlují čísla a pracuje pouze se dvěma aktuálními řády. Není jí jasný postup při zaokrouhlování přirozených čísel, ani smysl této činnosti.*

## – 5 – 1 TEORETICKÁ VÝCHODISKA

Zaokrouhlování přirozených čísel se využívá průběžně během celé výuky matematiky. Má význam jednak praktický, jednak se používá k provádění odhadů výpočtů.

Mnoho čísel, kterých v praxi užíváme, neumíme určit přesně. Např. počet obyvatel státu, rozlohy určitých území, výsledky měření apod. Pracujeme s čísly, která jsou přibližná, avšak upravená podle určitých pravidel.

**Zaokrouhlování přirozených čísel je nahrazení čísla přesného číslem jemu blízkým, a to podle určitých pravidel.** Pravidla jsou stanovena státní normou.

Jestliže zaokrouhlujeme přirozené číslo na určitý řád, zajímá nás počet jednotek řádu o jednu nižšího, např. máme zaokrouhlit číslo 26 479 na tisíce. Zajímá nás počet stovek.

Pokud je počet jednotek řádu o jednu nižšího, než je řád zaokrouhlovaný, 0, 1, 2, 3 nebo 4, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu ponecháme a na místa nižších řádů zapíšeme nuly.

26 479 ≐ 26 000
Čteme: číslo 26 470 se po zaokrouhlení na tisíce rovná 26 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování dolů.

Pokud je na místě řádu o jednu nižším, než je řád zaokrouhlovaný, některé z čísel 5, 6, 7, 8 nebo 9, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu zvětšíme o jednu a na místa nižších řádů zapíšeme nuly, např. číslo 26 789 zaokrouhlené na tisíce:

26 789 ≐ 27 000

Čteme: číslo 26 789 se po zaokrouhlení rovná 27 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování nahoru.

*Poznámka 1.*

V běžném životě se používají i jiná pravidla pro zaokrouhlování, ta však musí být explicitně a srozumitelně vyjádřena (např. v daňových přiznáních, placení zdravotního pojištění aj.).

*Poznámka 2.*

- Zaokrouhlené číslo představuje vždy určitý interval, např. číslo 250 získáme po zaokrouhlení přirozených čísel 245 až 254 na desítky.
- Zaokrouhlování postupné, v několika stupních, je nepřípustné, může vést k chybám. Např. číslo 34 798 zaokrouhlené na desetitisíce je 30 000, protože tisíce jsou 4, tedy zaokrouhlujeme dolů. Kdybychom zaokrouhlovali nejprve na desítky, dostali bychom 34 798 ≐ 34 800, kdyby se dále toto číslo zaokrouhlilo na tisíce, dostaneme 35 000, toto číslo zaokrouhlené na desetitisíce je 40 000. Toto postupné zaokrouhlování vede k chybě.
- Názorně můžeme ilustrovat zaokrouhlování čísel na číselné ose.

## – 5 – 2 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI ZAOKROUHLOVÁNÍ

- Děti pracují pouze se dvěma číslicemi zapsanými na potřebných aktuálních řádech, ostatní číslice nižších řádů opíší, např.: 942 567 ≐ 940 567.
- Uplatňují nesprávnou analogii – při zaokrouhlování nahoru počet jednotek zaokrouhlovaného řádu o jednu zvýší, při zaokrouhlování dolů pak počet jednotek o jednu sníží, např.: 942 567 ≐ 930 000.
- Pokud mají čísla zapsaná v tabulce a mají dané číslo zaokrouhlit na desítky, stovky, tisíce atd., zaokrouhlují již zaokrouhlené číslo (zaokrouhlování postupné).

## – 5 – 3 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Vycházíme z praktických příkladů, ve kterých se využívá zaokrouhlování, např. přibližná cena nákupu, počet lidí na sportovním utkání apod., příklady volíme podle zájmu dětí.
2. Pro grafické znázornění využijeme číselné osy s vhodnými figurkami (ke kterému číslu má blíž?).
3. Využíváme regionálních údajů – přibližný počet obyvatel místa bydliště, výška budov, ceny automobilů aj.
4. Zaokrouhlování využíváme k odhadu výsledků početních operací.

## Shrnutí

Pochopení principu porovnávání přirozených čísel je důležité jednak proto, aby děti měly představu o množině přirozených čísel a jejím uspořádání, jednak proto, aby je uměly využívat v praktickém životě.

Zaokrouhlování přirozených čísel je využíváno v běžném životě při provádění odhadů i ve školské matematice při provádění odhadů výsledků (význam má zejména při počítání na kalkulátoru) a v dalších předmětech, zejména ve fyzice.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Připravte několik propedeutických cvičení, které napomohou dětem k pochopení porovnávání přirozených čísel.
2. Uveďte, jak pomoci dětem správně zapisovat a umisťovat mezi čísla znaky >, <.
3. Uveďte několik příkladů, kdy v běžném životě používáte zaokrouhlování přirozených čísel.

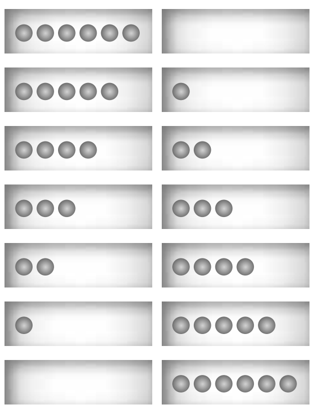
# – 6 – ROZKLADY ČÍSEL

Dříve než se budeme věnovat problematice operací s přirozenými čísly, uvedeme důležitou dovednost, která mnoha dětem usnadní počítání, a tou je provádění rozkladů čísel. Dítě se během výuky matematiky seznamuje s různými rozklady čísel, kterých pak využívá ke snadnějšímu počítání při operacích s přirozenými čísly. Je však potřeba uvědomit si, že k rozkladům má každé dítě svůj vlastní přístup a není možné jeho představy příliš měnit.

## – 6 – 1 ROZKLAD ČÍSLA NA DVĚ ČÁSTI

Rozklady tohoto typu je třeba zvládnout, aby bylo možné provádět sčítání a odčítání s přechodem přes základ deset. Začínáme hraním s konkrétními předměty, např.:

Máme 6 korálů a máme je rozdělit do dvou krabiček. Kolika způsoby to můžeme udělat:



Výsledek manipulativních činností zapíšeme:

| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 0 | 5 1 | 4 2 | 3 3 | 2 4 | 1 5 | 0 6 |

K nácviku těchto rozkladů můžeme využít i jiných činností, např. tleskání rukama napravo a nalevo, hraní hlubokých a vysokých tónů na klavíru, vytváření skupin dětí apod. Důležité je, aby děti příslušný rozklad vždy zapsaly a k danému rozkladu naopak dokázaly vytvořit skupiny předmětů.

Tyto rozklady využívají děti zejména při pamětném sčítání a odčítání v oboru do dvaceti a v oboru do sta.

Např. 6 + 9 počítají: 6 + 9

4 5

Tedy číslo 9 rozloží tak, aby číslo 6 doplnily do 10, tedy na 4 a 5. Pak 6 + 4 = 10, 10 + 5 = 15, tedy 6 + 9 = 15.

Podobně u odčítání, např. 15 – 7 počítají: 15 – 7

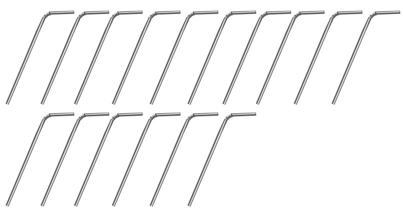
5 2

Číslo 7 rozloží na 5 a 2, aby získaly číslo 10. Pak 15 – 5 = 10, 10 – 2 = 8, tedy 15 – 7 = 8.

## – 6 – 2 ROZKLAD ČÍSLA NA DESÍTKY A JEDNOTKY

Sčítání a odčítání v oboru do sta vyžaduje zvládnutí rozkladů dvojciferných čísel na desítky a jednotky.

a) Začínáme s čísly v oboru do dvaceti, např. číslo 16 rozkládáme na 10 a 6:



Ilustrujeme názorně, aby děti vždy viděly 10 prvků jako jednu desítku (brčka, dřívka apod.).

b) Rozkládáme dvojciferná čísla, např. číslo 48 na 40 a 8, 84 na 80 a 4.

Procvičujeme často příklady, ve kterých mají děti problémy s nerozlišováním desítek a jednotek, např. nerozlišují 34 a 43.

Rozklad na desítky a jednotky se využívá u sčítání a odčítání dvojciferných a víceciferných čísel, např. 25 + 48 se počítá tak, že číslo 48 rozložíme na desítky a jednotky: 48 = 40 + 8 a počítáme:

25 + 40 = 65, 65 + 8 = 73, tedy 25 + 48 = 73.

Analogicky u odčítání, např: 64 – 29 počítáme tak, že číslo 29 rozložíme na 20 a 9.

64 – 20 = 44, 44 – 9 = 35, tedy 64 – 29 = 35.

## – 6 – 3 ROZVINUTÝ ZÁPIS ČÍSLA V DESÍTKOVÉ SOUSTAVĚ

U víceciferných čísel se děti učí rozvinutý zápis čísel – posiluje se tím chápání počtu jednotek příslušných řádů, např. 4 628 = 4 000 + 600 + 20 + 8

4 628 = 4 · 1 000 + 6 · 100 + 2 · 10 + 8 · 1

Naopak z rozvinutého zápisu zapisují děti zápis zkrácený, např.

5 · 10 000 + 9 · 1 000 + 0 · 100 + 7 · 10 + 3 · 1 = 59 073

Zde činí problémy zápisy čísel, ve kterých nejsou uvedeny řády s nulami,

např. 7 · 1 000 + 4 . 100 + 5 · 1 = 7 405 děti však mohou zapsat chybně 745.

Podobně 7 · 1 000 + 4 · 100 + 5 · 10 = 7 450 opět zapíší chybně jako 745. Je tedy vhodnější zapisovat všechny řády, tedy i ty, jejichž počet je 0.

V budoucnu budou tyto rozklady využívat při zápisu velkých čísel pomocí mocnin deseti.

## – 6 – 4 ROZKLAD ČÍSLA NA SOUČIN ČINITELŮ

V souvislosti s výukou násobilek vnímají děti také rozklad čísel na součin činitelů. Do budoucna jsou tyto rozklady potřebné zejména k učivu o dělitelnosti v oboru přirozených čísel.

Každé přirozené číslo můžeme zapsat jako součin činitelů, některá právě jedním způsobem, jiná více způsoby, např.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 = 5 · 1 | 5 = 1 · 5 | | | | | | |
| 9 = 9 · 1 | 9 = 3 · 3 | 9 = 1 · 9 | | | | | |
| 12 = 12 ·1 | 12 = 6 · 2 | 12 = 4 · 3 | 12 = 3 · 4 | 12 = 2 · 6 | 12 = 1 · 12 | | |
| 24 = 24 · 1 | 24 = 12 · 2 | 24 = 8 · 3 | 24 = 6 · 4 | 24 = 4 · 6 | 24 = 3 · 8 | 24 = 2 · 12 | 24 = 1 · 24 |

Je to důležité jednak k chápání vztahů a souvislostí, jednak do budoucna k pochopení pojmů prvočíslo a číslo složené.

## – 6 – 5 ROZKLAD PŘIROZENÉHO ČÍSLA NA DVĚ ČÍSLA PRO DĚLENÍ MIMO OBOR NÁSOBILEK

K pamětnému dělení mimo obor násobilek rozkládáme čísla na dvě vhodná čísla, abychom mohli provést dělení (zpravidla je první číslo rozkladu desetinásobek nebo dvacetinásobek dělitele).

Např. 76 : 4 číslo 70 rozložíme na 40 a 36, obě tato čísla umíme vydělit čtyřmi.

76 : 4 = (40 : 4) + (36 : 4) = 10 + 9 = 19

Podobně např.

85 : 5 = (50 : 5) + (35 : 5) = 10 + 7 = 17

72 : 3 = (60 : 3) + (12 : 3) = 20 + 4 = 24

## – 6 – 6 STRATEGIE DĚTÍ PŘI PROVÁDĚNÍ ROZKLADŮ

Rozklady výše uvedené jsou popisovány v didaktice matematiky a většině dětí usnadňují výpočty, zejména sčítání a odčítání s přechodem přes základ deset. Avšak řada dětí se specifickými poruchami učení využívá svých vlastních přístupů k rozkladům. Nerespektují postupy uváděné v učebnicích, a i když počítají správně, nejsou jejich postupy akceptovány a někdy nejsou jejich postupy pozitivně hodnoceny. Uvádíme některé z postupů dětí s dyskalkulií:

a) Při sčítání s přechodem přes základ deset v oboru do 20 rozkládají k číslu pět, např. 6 + 8 rozkládají: 6 je 5 a 1, 8 je 5 a 3.

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{6} & \multicolumn{2}{c}{+\ 8 =} \\ 5 & 1 & 5 & 3 \end{array}$$

a počítají: 5 + 5 = 10, 1 + 3 = 4, 10 + 4 = 14, tedy 6 + 8 = 14.

b) Děti často využívají postupů, kdy číslo rozloží tak, jak si pamatují, a i když výpočty mohou být složitější, poradí si s nimi, např. 9 + 7 postupují tak, že 7 rozloží na 3 a 4 (tento rozklad si nejlépe zapamatovaly) a počítají 9 + 3 = 12, 12 + 4 = 16, tedy 9 + 7 =16.

c) Někdy je pro děti výhodnější rozkládat oba sčítance, např. 16 + 9:

číslo 16 rozloží na 10 a 6,
číslo 9 na 4 a 5 a počítají:
6 + 4 = 10, 10 + 10 = 20, 20 + 5 = 25, tedy 16 + 9 = 25.

d) Při sčítání dvojciferných čísel využívají rozkladu tak, že prvního sčítance doplní do nejbližší desítky, např. 47 + 25:

číslo 25 rozloží na 3 a 22 a počítají: 47 + 3 = 50, 50 + 22 = 72.

e) Při odčítání bez přechodu i s přechodem v oboru do dvaceti je možné setkat se s nejrůznějšími rozklady, jak menšence, tak menšitele, např.

14 – 8: rozloží číslo 14 na 6 a 8, počítají 8 – 8 = 0, 6 + 0 = 6, tedy 14 – 8 = 6.
19 – 7: rozloží číslo19 na 17 a 2, počítají 17 – 7 = 10, 10 + 2 = 12, tedy 19 – 7 = 12.
19 – 7: rozloží číslo 19 na 14 a 5, počítají 14 – 7 = 7, 7 + 5 = 12, tedy 19 – 7 = 12.
19 – 7: rozloží číslo 7 na 4 a 3, počítají 19 – 4 = 15, 15 – 3 = 12, tedy 19 – 7 = 12.
16 – 9: rozloží číslo 16 na 10 a 6, číslo 9 na 6 a 3, počítají 6 – 6 = 0, 10 – 3 = 7, tedy 16 – 9 = 7.
16 – 9: rozloží číslo 16 na 9 a 7, počítají 9 – 9 = 0, 7 – 0 = 7, tedy 16 – 9 = 7.

f) Při odčítání využívají postupu, kdy od menšence i menšitele odečtou stejné číslo, např. 31 – 3 počítají 30 – 2 = 28 (31 – 1 a 3 – 1).

g) Při odčítání dvojciferných čísel postupují analogicky jako v předchozích příkladech, např. 73 – 56 postupují tak, že číslo 56 rozloží na 3 a 53 a dále od menšence i menšitele odečtou stejné číslo. Počítají: 73 – 3 = 70, 70 – 53 = 67 – 50 = 17 nebo počítají 73 – 53 = 20, 20 – 3 = 17.

Z několika uvedených příkladů je patrné, že děti s dyskalkulií mohou mít své představy o využívání rozkladů čísel při provádění operací sčítání a odčítání. Ve většině případů jsou jejich představy i výpočty správné, mohou je používat i v dalších operacích při počítání s víceciferným čísly. Proto je vhodné jim jejich postupy ponechat a nenutit je do postupů, které považují za správné dospělí (učitelé a rodiče).

## Shrnutí

S rozklady přirozených čísel se děti setkávají velmi často a v nejrůznějších podobách. Rozklad čísla na dvě (nebo na několik částí) představuje postup, kdy z celku vytváříme části. Je třeba používání jednotlivých typů rozkladů řádně vysvětlit a zdůvodnit, avšak pokud děti mají své vlastní postupy a ty jsou správné, je vhodné jim je ponechat. Dítě může vidět jinak než dospělý, a pokud je nuceno přijímat přístupy dospělých, často není schopno je přijmout, odmítá je. Pokud není pochopeno, je bezradné a ztrácí zájem o matematiku.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Zamyslete se nad postupy a rozklady, které pro operace sčítání a odčítání používáte vy.
2. Sledujte dítě s dyskalkulií a popište jeho vlastní přístupy k provádění rozkladů čísel při sčítání a odčítání.
3. Uveďte nejčastější chyby, kterých se děti dopouštějí při provádění rozkladů čísel.
4. Promyslete argumenty, kterými přesvědčíte dospělé (rodiče nebo učitele), aby ponechali dětem jejich přístupy k rozkladům a jejich využívání při operacích s přirozenými čísly.

# – 7 – SČÍTÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

## – 7 – 1 PAMĚTNÉ SČÍTÁNÍ

*František vidí v učebnici obrázek* ○ + ○○○ = ○○○○ *a zapisuje: 1 + 3 = 8.*

*Spočítal všechny kuličky na obrázku.*

*Filip má se sčítáním problém: nerozlišuje řády v zápisu čísel a sčítá 3 + 45 = 75.*

*Felix při výpočtu příkladu 23 + 35 čísla správně sečte, řekne součet 58, avšak zapíše 23 + 35 = 85.*

Početní operace sčítání přirozených čísel je vyvozována na základě sjednocení dvou množin, které nemají společné prvky, což v praxi znamená, že předměty seskupujeme, dáváme dohromady, přidáváme apod. Aby děti dobře pochopily sčítání, měly by mít potřebu sčítat, měly by být k provedení operace správně motivovány (jinak mohou určit součet např. počítáním předmětů po jedné).

Postup vyvození operace sčítání by měl respektovat několik zásad:

1. Vycházíme z manipulativní činnosti s konkrétními předměty, např.
   Na misce jsou 3 jablíčka, přidáme ještě 2 jablíčka.
   Kolik jablíček bude na misce?
2. Situaci znázorníme nejprve pomocí obrázků (např. na tabuli nebo na papíře).
3. Dále znázorníme pomocí symbolů (puntíků, úseček apod.).

   ○○○ ○○
   
   3 2

4. Zapíšeme příklad: 3 + 2 = (vysvětlíme význam znaménka +)
5. Příklad vyřešíme: 3 + 2 = 5
6. Vyslovíme a zapíšeme odpověď: Na misce bylo pět jablíček.

7. Přesvědčíme se o správnosti výpočtu. Zpočátku, když děti neznají vlastnosti operace sčítání ani operaci odčítání, provádíme zkoušku správnosti tzv. „krokem zpět“ – např. přesvědčíme se počítáním po jedné, že na misce je skutečně 5 jablíček.

Čísla, která sčítáme, se nazývají sčítanci, výsledek operace se nazývá součet. Při vyvozování sčítání je vhodné, aby oba sčítanci i součet měli stejný název (3 jablíčka a 2 jablíčka je 5 jablíček), teprve později formulujeme úlohu typu: Na hřišti si hráli 4 chlapci a 3 děvčata. Kolik dětí bylo na hřišti? Součet má zde název nadřazený.

**Pozor:** Vyvarujeme se nesprávného grafického znázornění typu:

○○○ + ○○ = ○○○○○

3 + 2 = 5

Sice vypadá jako ilustrativní, avšak vůbec neodpovídá realitě, protože dítě potřebuje 10 předmětů, aby znázornilo součet 3 + 2. Velmi často se stává, že děti k tomuto znázornění zapíší příklad 3 + 2 = 10, protože položí 10 předmětů a spočítají je po jedné. Tento obrázek znázorňuje modely jednotlivých čísel, nikoliv model operace sčítání. Navíc v běžném životě nesčítáme předměty (ty k sobě přidáváme, přiřazujeme), tedy znaménko sčítání nepoužíváme mezi objekty, ale pouze mezi čísly. Podobně je to s použitím znaku pro rovnost (zde je nepochopena rovnost množin a ekvivalence množin). Je dobré si představit zcela konkrétní situaci, kdy např. na parkovišti stála 3 osobní auta a 2 nákladní auta. Jak by se znázornila situace na pravé straně rovnosti?

Co všechno může dítě chápat pod zápisem 3 + 2 = 5:
- tři plus dva rovná se pět,
- tři a dvě je pět,
- když ke třem přidám dvě, dostanu 5,
- když tři zvětším o dvě, dostanu 5,
- pět je o 2 víc než 3,
- pět je o tři víc než 2 atd.

Postup vyvození jednotlivých spojů sčítání je u dětí s poruchami učení rozčleněn do velmi jemných metodických kroků. Vždy by se mělo dbát nejprve na pochopení situace na základě manipulativní činnosti samotným dítětem spojenou s prožitkem a potom teprve na pamětné zvládnutí jednotlivých spojů sčítání. Pouhý mechanický nácvik spojů sčítání je málo efektivní, neboť děti rychle zapomínají mechanicky naučené učivo.

### – 7 – 1 – 1 Vyvození sčítání v oboru do pěti

V tomto případě je jen několik základních spojů, které se děti naučí zpravidla zpaměti s oporou o konkrétní znázornění:

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| **2** | 3 | 4 | 5 | | |
| **3** | 4 | 5 | | | |
| **4** | 5 | | | | |
| **5** | | | | | |

### – 7 – 1 – 2 Sčítání v oboru do deseti

V tomto případě je třeba brát v úvahu obtížnost jednotlivých spojů, neboť příklad 8 + 2 je pro dítě snadnější než příklad 2 + 8. V tomto období se také naučí přičítat nulu, tedy řeší příklady typu 6 + 0 = 6, 0 + 6 = 6.

### – 7 – 1 – 3 Sčítání v oboru do dvaceti

a) **Přičítání k číslu 10**
Některé děti potřebují zvlášť procvičit příklady typu 10 + 7, 9 + 10.

b) **Sčítání v oboru do dvaceti bez přechodu přes základ deset**
Jde o příklady typu 13 + 5.

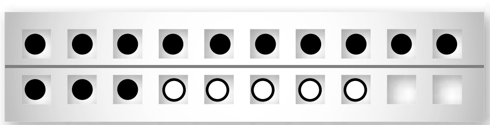
Jednou z možností je využití analogie ze sčítání v oboru do deseti:
3 + 5 = 8, tedy 13 + 5 = 18.

Další možnost je využití rozkladu: 13 + 5 =

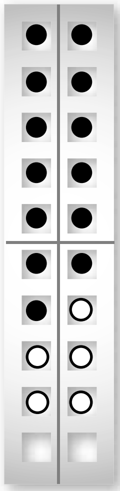
10 3

Číslo 13 rozložíme na 10 a 3 a počítáme: 3 + 5 = 8, 10 + 8 = 18.

Ke grafickému znázornění je možné využít i tzv. mřížky. Z tvrdšího kartonu vystřihneme dětem obdélník, který obsahuje 2 řady čtverců po deseti. Prvky modelujeme např. pomocí uzávěrů od PET lahví (např. dvou barev).



Pro některé děti je vhodnější používat mřížku ve svislé poloze (v předchozím znázornění jim vadí, že se číslo 13 „rozdělí“ do dvou řádků). Ve svislé mřížce je vhodné rozdělit ji vodorovnou čarou na 10 a 10 prvků (bude patrnější znázornění rozkladu).



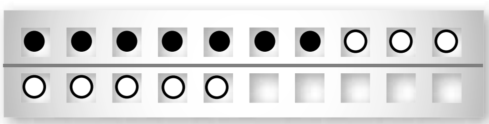
c) **Sčítání v oboru do dvaceti s přechodem přes základ deset**
Jedná se o příklady typu 7 + 8.

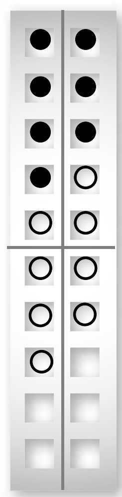
Zpravidla se postupuje tak, že se využívá rozkladu druhého sčítance tak, abychom prvního sčítance doplnili do deseti:

7 + 8 =
3 5

Počítáme: 7 + 3 = 10, 10 + 5 = 15, tedy 7 + 8 = 15.

Tento výpočet je možné znázornit na mřížce ve vodorovné nebo svislé poloze:





Mnoho dětí s poruchou učení tento rozklad považuje za velmi obtížný, nechápou jej, ani nedokáží najít číslo, kterým je třeba prvního sčítance doplnit do deseti. Pokud si dítě vytvoří svůj postup a ten je matematicky správný, ponecháme mu jej.

Řada dětí rozkládá oba sčítance vzhledem k číslu 5 a počítají:

7 + 8 =

5 2 5 3

2 + 3 = 5, 5 + 5 = 10, 5 + 10 = 15, tedy 7 + 8 = 15.

Vzhledem k tomu, že sčítání přirozených čísel je komutativní, tj. sčítance můžeme zaměnit a součet se nezmění, ponecháme dětem na vlastním rozhodnutí, zda budou počítat 2 + 8 nebo 8 + 2.

Při sčítání více sčítanců využijeme také asociativnosti sčítání, tj. sdružování sčítanců. Např. součet 4 + 9 + 6 je výhodnější počítat záměnou a sdružováním sčítanců: 4 + 6 + 9.

### – 7 – 1 – 4 Sčítání v oboru do sta

Při vyvozování sčítání v oboru do sta zpaměti využíváme velmi podrobného postupu při volbě příkladů tak, aby jeden typ příkladů byl předpokladem pro zvládnutí příkladů vyšší náročnosti. Využíváme přitom mnoho pomůcek pro grafické znázornění. Jde např. o stovkovou tabuli, svazky předmětů po deseti, modely peněz, číselnou osu apod.

a) sčítání desítek – příklady typu: 40 + 30;

b) sčítání dvojciferného čísla a čísla jednociferného – příklady typu: 40 + 3, 42 + 3, 47 + 3, 46 + 7;

c) sčítání dvojciferných čísel – příklady typu: 40 + 30, 42 + 30, 42 + 34, 48 + 32, 48 + 36.

**Pozor**: V posledním případě dbáme na to, aby dítě rozkládalo pouze jednoho sčítance, nikoliv oba, protože návyk rozkládat obě čísla způsobí značné problémy při odčítání dvojciferných čísel s přechodem přes základ deset (příklady typu 62 – 37).

Počítáme tedy: 42 + 34 = 42 + 30 = 72, 72 + 4 = 76

30 4

48 + 32 = 48 + 30 = 78, 78 + 2 = 80

30 2

48 + 36 = 48 + 30 = 78, 78 + 6 = 84

30 6 2 4

S dětmi s poruchami učení počítáme takové příklady, které jsou pro ně zvládnutelné. Pokud se přes veškerou snahu dítě nemůže naučit sčítat zpaměti dvojciferná čísla, pak je buď naučíme sčítat písemně (pokud mu to vyhovuje), nebo použijeme kalkulátor jako motivační a reedukační pomůcku. Víceciferná čísla, která by dětem činila problémy, již nesčítáme zpaměti, ale buď písemně, nebo s použitím kalkulátoru. Avšak používání kalkulátoru má také svá pravidla.

***Poznámka***:
Respektujme i jiné rozklady dětí, které si děti samy zvolí a pokud jim rozumí a počítají správně, např.

46 + 34 　　 46 + 4 = 50 　　 50 + 30 = 80
4 30

28 + 36 　　 28 + 2 = 30 　　 30 + 34 = 64
2 34

S jakými dalšími rozklady se můžeme setkat?

16 + 9 　　 6 + 4 = 10 　　 10 + 5 = 15 　　 10 + 15 = 25
10 6 4 5

9 + 7 　　 9 + 4 = 13 　　 13 + 3 = 16
4 3

Některé děti si dokonce představí čísla pomocí rozdílu od čísla 10 (kolik chybí do deseti), např.

7 + 9 =
Napíší: 3 1 　 a počítají: 　 20 – 4 = 16
Tedy počítají: 7 = 10 – 3 　　 9 = 10 – 1 　　 (10 – 3) + (10 – 1) = 20 – 4 = 16

Podobně 8 + 5 =
2 5 　　 8 + 5 = (10 – 2) + (10 – 5) = 20 – 7 = 13

## – 7 – 2 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI PAMĚTNÉM SČÍTÁNÍ

1. Děti nechápou rozdíl mezi zápisem čísla a operací sčítání, čísla zapíší vedle sebe, např.: 1 + 4 = 14, 32 + 4 = 324, 42 + 51 = 4 251.
2. Děti si v prvním seznámení zafixují nesprávné spoje a ty potom stále uplatňují, např.: 3 + 4 = 9, 6 + 7 = 14, 8 + 7 = 13, 8 + 7 = 14, 9 + 8 = 18, 6 + 8 = 15, 26 + 27 = 51

3. Nepochopí poziční číselnou soustavu a sčítají čísla různých řádů, např.: 7 + 20 = 90, 3 + 13 = 43, 3 + 13 = 34, 300 + 20 = 500.

   Podobně počítají např. 44 + 32 = 67, protože 4 + 2 = 6, 4 + 3 = 7.

4. Děti využívají postupu písemného sčítání v řádku (ač s písemným sčítáním se ještě neseznámily) a nezvládnou přitom práci s řády, např:

   576 + 4 = 5 710

   počítají 4 + 6 = 10, zapíší 10 a další čísla prvního sčítance opíší, nebo opíší všechna ostatní čísla prvního sčítance: 576 + 4 = 57 610.

5. Používají zvláštní postupy, kdy čísla seskupují vedle sebe bez smyslu, nebo sčítají zvláštním postupem, např.: 36 + 30 = 363; 24 + 40 = 82 (dominantní je spoj 4 + 4); 532 + 8 = 530;

   23 + 35 = 5 800, počítají 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, připíšou dvě nuly, protože oba sčítanci mají dohromady 4 číslice, součet musí mít také 4 číslice.

6. Používají nesprávných analogií a zdůvodňují je, např.

   8 + 6 = 18
   Mám 8, do deseti chybí 2 8 + 2 = 10, 10 + 6 = 16, 16 + 2 = 18.

7. Při přičítání čísel „po jedné“ na prstech se děti dopouštějí té chyby, že mají součet vždy o jednu menší, např. 6 + 4 počítají: šest, sedm, osm, devět, 6 + 4 = 9.

## – 7 – 3 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Základní spoje sčítání vyvozujeme na základě opory o konkrétní předměty a znázornění, aby dítě vidělo podstatu sčítání. Nespoléháme na pouhé pamětné zvládnutí bez opory o pochopení dané operace.
2. Pokud dítě chybuje, hledáme spolu s ním příčinu chyby a vhodné modely, které pochopí. Dítě by mělo znázornit svůj postup počítání na konkrétních modelech.
3. Pro sčítání s přechodem přes základ deset hledáme modely a pomůcky, kterým dítě rozumí.
4. Respektujeme matematický postup tak, aby neměly děti v budoucnu problémy (např. při sčítání dvojciferných čísel nerozkládáme oba sčítance).
5. K nácviku sčítání vybíráme vhodné didaktické hry (Blažková a kol., 2007; Krejčová, 2009).

## – 7 – 4 PÍSEMNÉ SČÍTÁNÍ

Písemné sčítání se liší od pamětného sčítání tím, že při písemném sčítání začínáme sčítat od jednotek, zatímco při pamětném sčítání začínáme sčítat od nejvyšších řádů (tedy ne tím, že pamětné sčítání se pouze říká zpaměti a písemné sčítání se zapisuje).

Algoritmus písemného sčítání se vyvozuje na číslech dvojciferných a potom se postupně zobecňuje. V současné době se používá zápis sčítanců pod sebe (v minulosti se využíval i při písemném sčítání zápis sčítanců v řádku). Nejprve se vyvozuje sčítání bez přechodu přes základ deset, potom s přechodem přes základ deset. Je vhodné dodržovat přesný postup algoritmu tak, aby se děti naučily jeden postup, který mohou využívat jak při písemném sčítání, tak při písemném odčítání. Vždy provádíme zkoušku správnosti tak, že sčítance zaměníme. Dětem, které mají problém se zápisem čísel poskytneme sešit s většími čtverečky, aby se naučily správně zapisovat čísla jednotlivých řádů pod sebou a jednotlivé řády vyznačíme (D – desítky, J – jednotky jednotlivých sčítanců i součtu).

**Sčítání bez přechodu přes základ deset**:

| D | J |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 3 | 6 |
| 7 | 8 |

Elementární kroky: 6 + 2 = 8 8 zapíšeme pod jednotky
3 + 4 = 7 7 zapíšeme pod desítky.

Zkoušku správnosti provedeme záměnou sčítanců (využitím komutativnosti sčítání):

| D | J |
|---|---|
| 3 | 6 |
| 4 | 2 |
| 7 | 8 |

**Sčítání s přechodem přes základ deset:**

| D | J |
|---|---|
| 4 | 8 |
| 2 | 6 |
| 7 | 4 |

Elementární kroky: 6 + 8 = 14 4 zapíšeme pod jednotky
jednu desítku přičteme k desítkám: 1 + 2 = 3
3 + 4 = 7 7 zapíšeme pod desítky.

Zkouška:

| D | J |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 4 | 8 |
| 7 | 4 |

Sčítání víceciferných čísel využívá znalostí ze sčítání čísel dvojciferných.

## – 7 – 5 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI PÍSEMNÉM SČÍTÁNÍ

1. Děti neumí zapsat sčítance správně pod sebe podle jednotlivých řádů, např.

$$\begin{array}{l} 528 \\ 45 \\ \hline 978 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 350 \\ 4279 \\ \hline 7779 \end{array}$$

2. Při sčítání s přechodem přes základ deset nepochopí podstatu desítkové soustavy a přechod nerealizují, např.

$$\begin{array}{r} 59 \\ 36 \\ \hline 815 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 176 \\ 209 \\ \hline 3715 \end{array}$$

3. Děti nepochopí podstatu algoritmu a přičítají částečné součty, např.

$$\begin{array}{r} 396 \\ 528 \\ \hline 3354 \end{array}$$

počítají 8 + 6 = 14, správně zapíší 4, avšak dále počítají 14 + 2 = 16, 16 + 9 = 25, správně zapíší 5 a pokračují 25 + 5 = 30, 30 + 3 = 33.

4. Sčítají všechna čísla v obou sčítancích bez ohledu na řády, např.

$$\begin{array}{r} 59 \\ 67 \\ \hline 27 \end{array}$$

počítají 7 + 9 + 6 + 5 = 27.

5. Sečtou všechna čísla v obou sčítancích a dále počítají podle algoritmu, např.

$$\begin{array}{r} 59 \\ 67 \\ \hline 137 \end{array}$$

počítají 7 + 9 + 6 + 5 = 27, 7 zapíší pod jednotky a počítají dále 2 + 6 + 5 = 13.

6. Přičítají druhého sčítance k oběma číslům prvního sčítance, např.

$$\begin{array}{r} 58 \\ 7 \\ \hline 1215 \end{array}$$

počítají 7 + 8 = 15, 7 + 5 = 12, oba částečné součty zapíší do výsledku.

7. U čísel zapsaných v řádcích používají částečně postup písemného sčítání, částečně postup pamětného sčítání, např.

378 + 2 = 3 710

počítají 2 + 8 = 10, 10 zapíší a ostatní čísla opíší.

8. Používají zvláštní postupy, např.

   24 + 35 = 5 900

   počítají 2 + 3 = 5, 4 + 5 = 9 a připíší dvě nuly, protože oba sčítanci mají dohromady 4 číslice.

## – 7 – 6 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Vyvozujeme přesně algoritmus písemného sčítání.
2. Neustále opakujeme základní spoje sčítání v oboru do dvaceti.
3. Využíváme čtverečkovaných sešitů, aby pro číslice každého řádu mělo dítě jedno políčko.
4. Využíváme barevných zápisů, např. jednotky červeně, desítky modře apod.
5. Vždy vyžadujeme zkoušku správnosti prováděnou dítětem.
6. Pro jednodušší postupy využíváme komutativnosti sčítání, (např. místo 3 + 7 je pro dítě snazší počítat 7 + 3) a asociativnosti sčítání (např. místo (12 + 9) + 8 je snazší počítat (12 + 8) + 9).
7. V případě, že přes veškerou snahu a veškeré úsilí dítěte se úspěch nedostavuje, zvážíme, zda by byl vhodným kompenzačním prostředkem kalkulátor.

### Shrnutí

Sčítání přirozených čísel je nejjednodušší operace (vzhledem k ostatním operacím) a je třeba, aby děti správně pochopily její podstatu – co se vlastně děje, když sčítáme přirozená čísla. Sledujeme problémy, které mají děti zejména při pamětném sčítání s přechodem přes základ deset v oboru do dvaceti. Pamětné počítání do dvaceti je základním učivem, které dětem usnadňuje počítání s většími čísly i počítání písemné. Vždy musí být založeno na pochopení, nejen na pamětném zvládnutí. Umožníme dětem využívat vlastností sčítání, např. záměny sčítanců (co se ti počítá lépe 3 + 9 nebo 9 + 3 ?), sdružování sčítanců (co je pro tebe výhodnější: 3 + 9 + 7 nebo 3 + 7 + 9 ?) Snažíme se, aby děti nepřičítaly („po jedné“), u víceciferných čísel by to bylo složité a vedlo by to k chybám. Vždy respektujeme vlastní přístupy dětí, pokud jsou matematicky správné a mohou být využity i v dalších číselných oborech (při rozšíření do sta, do tisíce atd.).

Písemné sčítání předpokládá zvládnutí sčítání pamětného. Vždy provádíme zkoušku správnosti záměnou sčítanců.

### Úkoly k samostatnému studiu

1. Jak dětem vysvětlíte podstatu sčítání přirozených čísel?
2. Jaké vlastnosti má operace sčítání v množině přirozených čísel a jak je možné těchto vlastností využít při práci s dyskalkulickými dětmi?
3. Sledujte vlastní přístupy dětí při sčítání přirozených čísel s přechodem přes základ deset.
4. Jaké rozklady čísel jsou pro děti pochopitelné?
5. S jakými problémy se můžete setkat při písemném sčítání přirozených čísel.
6. Jak jsou pro děti přínosné sčítací tabulky (tabulky všech součtů čísel od 1 do 10)?
7. Kdy je vhodné doporučit dětem kalkulátor?

# – 8 – ODČÍTÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

*Ondra je žákem první třídy. Má problémy se znaménky + a – , nikdy neví, kdy které má zvolit.*

*Oliver počítá příklad 17 – 9. Vždy si v mysli zamění jednotky menšence za menšitele a počítá 17 – 9 = 12, jako by počítal 19 – 7. Neumí si některé z čísel vhodně rozložit a stále se snaží odečítat od většího čísla menší ve smyslu 9 – 7, protože 7 – 9 „nejde“.*

## – 8 – 1 PAMĚTNÉ ODČÍTÁNÍ

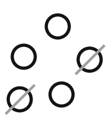
### – 8 – 1 – 1 Vyvození odčítání

Odčítání přirozených čísel je definováno jako operace inverzní ke sčítání, tj. jestliže pro přirozená čísla $a, b, c$ platí $a + b = c$, pak $c – a = b$ , $c – b = a$ (např. 1 + 2 = 3, 3 – 2 = 1, 3 – 1 = 2).

Ve školské matematice je odčítání vyvozováno jako operace dynamická, která souvisí s ubíráním, zmenšováním, oddělováním apod. Děti by měly být dostatečně motivovány, aby pochopily význam operace odčítání i význam znaménka „–“ (minus, bez).

Postup vyvození operace odčítání by měl respektovat několik zásad:

1. Vycházíme z manipulativní činnosti s konkrétními předměty, např.
   Na misce je 5 ořechů, 2 ořechy Jirka snědl. Kolik ořechů zbylo na misce?
2. Situaci znázorníme nejprve pomocí obrázků (např. na tabuli nebo na papíře).
3. Dále ji znázorníme pomocí symbolů (puntíků, úseček apod.).



nebo

Při práci s konkrétními předměty dva z nich oddělíme, na obrázku je škrtneme. Předměty mohou být znázorněny buď v řádku uspořádaně, nebo i volně jako na hromádce. Ponecháme na dítěti, které dva předměty škrtne nebo odstraní.

4. Zapíšeme příklad (s bohatým slovním komentářem – kolik jsme měli ořechů, kolik jsme jich snědli, jak zapíšeme, že ubylo, kolik ořechů zbylo…, aby dítě za každým napsaným číslem i znakem vidělo jeho význam):

   5 – 2 = 3
   Názvy jednotlivých čísel jsou: menšenec, menšitel, rozdíl.

5. Příklad se zapíše, přečte nahlas a provede se zkouška správnosti. Protože v této době ještě děti neznají souvislost mezi sčítáním a odčítáním, je vhodné přesvědčit se o správnosti tzv. „krokem zpět“ – znovu situaci zopakovat.

**Pozor**: Vyvarujeme se chybného grafického znázornění typu:

○○○○○ - ○○ = ○○○
5 - 2 = 3

Kdy dítě položí 5 předmětů, napíše –, přidá další 2 předměty, napíše =, přidá další 3 předměty, tedy dítě musí naskládat 10 předmětů, aby mohlo odečíst 5 – 2. Takovýmto způsobem se v běžném životě neodčítá.

Podobně jako u sčítání sledujeme, jak zápis 5 – 2 = 3 může dítě chápat:
- Pět bez dvou jsou tři.
- Pět minus dva jsou tři.
- Když od pěti oddělím dvě, dostanu tři.
- Pět mohu rozdělit na dvě a tři.

Ale také:
- Pět je o dvě více než tři.
- Pět je o tři více než dvě.
- Pět je dvě a tři.

Odčítání v oboru do pěti obsahuje deset spojů, které se děti učí zpaměti, ale až po pochopení (umí znázornit příslušný příklad pomocí předmětů nebo obrázků):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 – 4 | 5 – 3 | 5 – 2 | 5 – 1 |
| 4 – 3 | 4 – 2 | 4 – 1 | |
| 3 – 2 | 3 – 1 | | |
| 2 – 1 | | | |

Dále se děti naučí odčítat čísla v oboru do deseti. Je třeba si uvědomit, že příklady jsou nestejně obtížné, např. 8 – 1 je snadnější než 8 – 6 nebo 10 – 3 je snadnější než 10 – 8. Častěji tedy opakujeme ty spoje odčítání, které jsou pro děti obtížné, a vždy vyžadujeme znázornění pomocí konkrétních předmětů. Není možné opírat se o pouhé pamětné naučení, neboť děti s poruchou učení mívají s pamětí problémy a velice rychle zapomínají.

Děti se také naučí počítat příklady, kdy menšitel je 0, příklady typu 7 – 0 = 7.

Děti se učí vždy příslušné odčítání v období, kdy probírají sčítání, avšak v tomto textu uvádíme jednotlivé operace zvlášť, aby byla patrna návaznost jednotlivých částí učiva při vyvozování téže operace.

### – 8 – 1 – 2 Postup pamětného odčítání

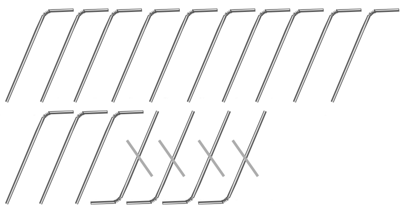
1. **Odčítání v oboru do pěti**
2. **Odčítání v oboru do deseti**
3. **Odčítání v oboru do dvaceti bez přechodu** přes základ deset, příklady typu:

   17 – 4 =

   10 7

   Menšence rozložíme na desítku a jednotky, počítáme 7 – 4 = 3, 10 + 3 = 13, tedy 17 – 4 = 13

   Názorně můžeme situaci modelovat na mřížkách nebo pomocí svazků tyčinek nebo brček na pití:

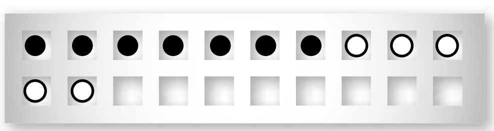
   nebo 

4. **Odčítání s přechodem** přes základ deset, příklady typu:

   12 – 5 =

   2 3

   Menšence rozložíme tak, abychom od menšitele odečetli jednotky, počítáme 12 – 2 = 10, 10 – 3 = 7, tedy 12 – 5 = 7.

Při řešení příkladů tohoto typu je třeba respektovat tyto zásady:

- Děti potřebují neustále opakovat rozklady čísel.

- Může se stát, že si dítě vytvoří svůj postup odčítání a ten, pokud je správný a může se použít i v dalších příkladech odčítání v oboru do sta, atd., dítěti ponecháme. Jde např. o počítání následujícího typu (rozloží menšence, avšak odčítají od deseti):

  12 – 4 =

  10 2

  Počítáme: 10 – 4 = 6, 2 + 6 = 8, tedy 12 – 4 = 8.

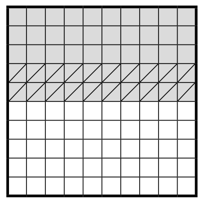
- Není nejvhodnější, když děti odčítají „po jedné“ s ukazováním si na prstech, protože často počítají např. 12 – 4 takto: dvanáct, jedenáct, deset, devět, 12 – 4 = 9, pak jim vyjde rozdíl o jednu více, než je správný výsledek.

**5. Odčítání v oboru do sta**

Ve všech následujících typech příkladů využíváme vždy aplikačních úloh, které ilustrují použití v praxi, grafického znázornění a dále respektujeme jemnou metodickou řadu, kdy s každým novým příkladem zařadíme vždy jen jeden nový jev.

a) Nejprve se odčítají násobky deseti, příklady typu 50 – 20.

   Můžeme využít grafického znázornění pomocí čtvercové sítě, kdy děti vyznačují (např. vybarví příslušné desítky a ty, které odčítají, škrtnou).



   Dále je možné používat svazky tyčinek nebo brček a pití svázaných po deseti, modelů peněz, předmětů, které jsou baleny po deseti (např. hygienické kapesníčky, obaly od vajíček aj.).

   Také je možné využít analogie, kdy děti využívají dříve naučeného učiva:

   6 – 2 = 4
   6 desítek – 2 desítky = 4 desítky, 60 – 20 = 40.

b) Odčítání jednociferného čísla od dvojciferného

   Vycházíme od nejsnadnějšího typu úloh: 64 – 4, pak následují postupně úlohy typu: 68 – 3, 60 – 3, 64 – 8.

   Děti mohou využívat rozkladů, nebo analogie z odčítání v oboru do 20:

| 68 – 3 = | 60 – 3 = | 64 – 7 = |
|---|---|---|
| 60 8 | 50 10 | 4 3 |

   Pokud rozklady děti nepotřebují, nevyžadujeme je. Pokud si zvolí vlastní postupy a jsou matematicky správné, ponecháme jim je.

c) Odčítání dvojciferných čísel

Počítají se příklady typu 64 – 20, 65 – 25, 65 – 23, 63 – 28.

Pokud počítají děti tyto typy příkladů s rozkladem, je dobrým pravidlem naučit je rozkládat pouze menšitele, protože kdyby rozkládaly menšence i menšitele, mohlo by to u odčítání s přechodem přes základ deset vést k chybám typu 60 – 20 = 40, 3 – 8 nejde, tak odečítají 8 – 3 = 5, jako by řešily příklad 68 – 23.

Počítáme: 65 – 23: 65 – 20 = 45, 45 – 3 = 42
63 – 28: 63 – 20 = 43, 43 – 8 = 35.

Víceciferná čísla odčítáme zpaměti pouze v případě, obsahují-li v zápisu pouze jednu nebo dvě nenulové číslice, např. 30 000 – 20 000, 1 500 – 300 apod. Pokud se dětem nedaří pamětné odčítání, využijeme odčítání písemného.

**Poznámka**: Opět respektujeme vlastní přístupy dětí, pokud jim rozumí a jsou správné, např. 31 – 3, 1 – 3 chybí 2, příklad si nahradí příkladem 30 – 2 = 28

Další možnost rozkladů, které děti používají:

14 – 8 8 – 8 = 0 14 – 8 = 6
6 8

19 – 7 17 – 7 = 10 10 – 2 = 8
17 2

19 – 7 14 – 7 = 7 7 + 5 = 12
14 5

19 – 7 19 – 4 = 15 15 – 3 = 12
4 3

16 – 9 6 – 6 = 8 10 – 3 = 7
10 6 6 3

16 – 9 9 – 9 = 0 0 + 7 = 7
9 7

16 – 9 10 – 4 = 6 6 – 5 = 1 6 + 1 = 7
10 6 4 5

54 – 26 54 – 4 = 50 50 – 22 = 50 – 20 – 2 = 28
4 22

V některých případech sledujeme, zda dítě neuvádí správný výsledek při chybném postupu, což se může stát v ojedinělých případech, např. 14 – 9 = 5, když počítá 9 – 4 = 5.

## – 8 – 2 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI PAMĚTNÉM ODČÍTÁNÍ

1. Děti vůbec nepochopí operaci odčítání a buď čísla sčítají, nebo je libovolně zaměňují, je jim jedno, zda napíší 5 – 3, nebo 3 – 5.
2. Při odčítání po jedné je rozdíl většinou o jednu větší než správný výsledek, např. 16 – 5 počítají a ukazují na prstech, až mají 5 prstů: šestnáct, patnáct, čtrnáct, třináct, dvanáct, tedy 16 – 5 = 12.
3. Pokud odčítají po jedné a neumí bezpečně vyjmenovat řadu čísel sestupně, některé číslo vynechají, např. 15 – 6 počítají: čtrnáct, dvanáct, jedenáct, deset, devět, osm, tedy 15 – 6 = 8.
4. Nepochopí postup pamětného odčítání, počítají např. 44 – 5 = 11 počítají jako 5 – 4 = 1, 5 – 4= 1.

   Nebo počítají např. 18 – 13 = 50, protože 1 – 1 = 0, napíší 0 a dále počítají 8 – 3 = 5. Číslo nemůže začínat nulou, proto 50.

5. Počítají s čísly různých řádů, např.

| | |
|---|---|
| 80 – 6 = 20 | počítají jako 8 – 6 = 2 a připíší nulu, |
| 64 – 40 = 60 | počítají jako 4 – 4 = 0 a 6 opíší, |
| 45 – 3 = 12 | počítají jako 4 – 3 = 1, 5 – 3 = 2, |
| 56 – 2 = 36 | jako 5 – 2 = 3, 6 opíší, |
| 93 – 3 = 60 | jako 9 – 3 = 6, 3 – 3 = 0 |
| 300 – 50 = 200. | |

6. Zaměňují čísla v menšenci a menšiteli, zásadně odčítají od většího čísla menší, i když je v menšiteli.

| | |
|---|---|
| 62 – 28 = 46 | protože 6 – 2 = 4, 8 – 2 = 6, |
| 640 – 350 = 310 | protože 600 – 300 = 300, 50 – 40 = 10. |

7. Může se projevit i porucha pravolevé orientace, kdy příklady typu 74 – 26 počítají: 20 – 70 = 50, 6 – 4 = 2 a místo výsledku 52 zapíší 25.
8. Při odčítání dvojciferných čísel s přechodem neustále rozkládají menšence i menšitele a odčítají vždy od většího čísla menší:

   82 – 57 = počítají 80 – 50 = 30, 2 – 7 nejde, tak 7 – 2 = 5, 82 – 57 = 35.

9. Velké problémy dětem dělají příklady typu 70 – 8, kdy se obtížně orientují v jednotlivých desítkách.

10. Při nepochopení operace odčítání část menšence odčítají, část přičítají, např.

    45 – 12 =                 počítají: 45 – 10 = 35, 35 + 2 = 37.

11. Nedokáží vidět odčítání v úlohách formulovaných s tzv. antisignálem, kdy odčítání není formulováno přímo, např. úlohu:

    Na drátě sedělo 8 vlaštovek, několik odletělo a zůstalo jich na drátě 5.
    Kolik vlaštovek odletělo?

    Počítají 8 + 5 = 13.

## – 8 – 3 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Nejdůležitější je vyvození operace odčítání a znaménka „–“ (minus) na konkrétních situacích.
2. Neustále se opakují základní spoje odčítání v oboru do 20.
3. Hledají se vhodné komunikační cesty, aby dítě chápalo odčítání s přechodem přes základ deset.
4. Aktivně se pracuje s chybou, vhodně se ilustruje jak chybný postup, tak správný postup.
5. Využívá se vhodných motivačních a aplikačních úloh.

## – 8 – 4 PÍSEMNÉ ODČÍTÁNÍ

*David nechápe postup písemného odčítání, čísla zapsaná pod sebou neustále sčítá, např.* 

$$\begin{array}{r} 23 \\ -15 \\ \hline 38 \end{array}$$

Algoritmus písemného odčítání se vyvozuje nejprve pro čísla dvojciferná a potom se zobecňuje na čísla víceciferná. V učebnicích je možné najít několik různých postupů vyvození písemného odčítání, tj. buď pomocí tzv. dočítání nebo odčítání „shora“ (od čísel zapsaných v jednotlivých řádech menšence se odčítají čísla zapsaná v příslušných řádech menšitele). Vzhledem k dalšímu počítání s víceciferným čísly a vzhledem k číslům, v jejichž zápisu se vyskytují nuly, je vhodné vyvozovat tuto operaci pomocí „dočítání“.

a) Písemné odčítání bez přechodu přes základ deset.

Odečtěte písemně 68 – 25. Čísla zapíšeme pod sebe, nejlépe do tabulky:

| D | J |
|---|---|
| 6 | 8 |
| -2 | 5 |
| **4** | **3** |

Počítáme:

5 plus kolik je 8? 5 + **3** = 8, zapíšeme **3** jednotky.

2 plus kolik je 6? 2 + **4** = 6 zapíšeme **4** desítky.

Zkoušku správnosti provedeme sečtením rozdílu a menšitele, součtem je číslo zapsané v menšenci zadaného příkladu:

$$\begin{array}{r} 43 \\ \underline{25} \\ 68 \end{array}$$

**Poznámka**: I když v tomto typu příkladů by děti mohly odčítat 8 – 5 a 6 – 2, není tento postup vhodné uplatňovat, protože při odčítání s přechodem přes základ deset by docházelo k chybám, když by děti odčítaly vždy od většího čísla číslo menší bez ohledu na to, zda je zapsáno v menšenci nebo menšiteli.

b) Písemné odčítání s přechodem přes základ deset.

Při písemném odčítání s přechodem přes základ deset využíváme skutečnost, že rozdíl se nezmění, jestliže menšence i menšitele zvětšíme o stejné číslo, např. jestliže 8 – 5 = 3, pak také 18 – 15 = 3, 11 – 8 = 3, 28 – 25 = 3 atd.

Abychom mohli čísla odečíst písemně, zvětšíme menšence i menšitele o deset, ale vhodně tak, že menšence zvětšíme o 10 jednotek a menšitele zvětšíme o 1 desítku.

Odečtěte písemně 62 – 28. Čísla zapíšeme pod sebe:

| D | J |
|---|---|
| 6 | 2 |
| -2 | 8 |
| **3** | **4** |

Počítáme:

8 plus kolik je dvanáct?

(k jednotkám menšence přičteme 10 jednotek 2 + 10 = 12)

8 + **4** = 12 Do rozdílu zapíšeme **4** jednotky.

Dále k desítkám menšitele přičteme 1 desítku a počítáme:

2 + 1 = 3, 3 plus kolik je 6?

3 + **3** = 6 Do rozdílu zapíšeme **3** desítky.

Zkoušku správnosti provedeme sečtením rozdílu a menšitele:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \underline{28} \\ 62 \end{array}$$

c) Písemné odčítání čísel, v jejichž zápisu je nula, např.

$$\begin{array}{r} 86 \\ \underline{-\,50} \\ \mathbf{36} \end{array}$$

počítáme analogicky jako v předchozích případech:

0 a kolik je 6 ? 0 + **6** = 6

5 plus kolik je 8? 5 + **3** = 8

$$\begin{array}{r} 70 \\ \underline{-\,46} \\ \mathbf{24} \end{array}$$

počítáme:

6 plus kolik je 10? 6 + **4** = 10 1 + 4 = 5,

5 plus kolik je 7? 5 + **2** = 7.

**Poznámka**:

1. K vyvozování odčítání dvojciferných čísel s přechodem přes základ deset není vhodné využívat tzv. „půjčování“, kdy si z desítek menšence jednu desítku vypůjčíme. Děti pak mají zmatek v tom, jak je možné, že z jednoho čísla (menšence) si vypůjčíme a druhému číslu (menšiteli) ji vracíme.
2. Při formulaci slovních úloh na odčítání zpravidla děti řeší správně úlohy, ve kterých je odčítání patrné, např. Měl jsem 10 Kč, za 6 Kč jsem si koupil tyčinku. Kolik Kč mi zbylo? Avšak problém nastane, pokud je úloha formulována takto: Měl jsem 10 Kč, kolik Kč jsem utratil, když mi pokladní vrátila 4 Kč? Slovo „vrátila“ je signálem pro sčítání a děti řeší úlohu chybně: 10 + 4 = 14.

## – 8 – 5 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI PÍSEMNÉM ODČÍTÁNÍ

1. Při odčítání s přechodem přes základ deset děti neustále odčítají od většího čísla číslo menší, např.

$$\begin{array}{r} 62 \\ -\,38 \\ \hline 36 \end{array}$$

Protože 2 – 8 nejde, tak počítají 8 – 2 = 6, 6 – 3 = 3, jako kdyby počítaly 68 – 32.

2. Děti část příkladu odčítají, část sčítají, např.:

$$\begin{array}{r} 43 \\ -\,29 \\ \hline 74 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 612 \\ -\,348 \\ \hline 964 \end{array}$$

počítají:
9 plus kolik je 13?
9 + 4 = 13 správně zapíší 4,
dále pak počítají 2 + 1 = 3, 3 + 4 = 7,
nebo 8 plus 4 je 12, 1 + 4 = 5, 5 + 1 = 6, 3 + 6 = 9.

3. Děti odčítají „shora“ a nedokážou správně provádět přechod. Např. rozdíl 7 036 – 867 počítají (nad jednotlivá čísla menšence zapíší 1 a počítají 16 – 7, 13 – 6, 10 – 8, 7 sepíšou):

$$\begin{array}{r} 111 \\ 7\,036 \\ -\,867 \\ \hline 7\,279 \end{array}$$

Vůbec jim nevadí, že rozdíl je větší než menšenec.

4. Uplatňují přechod přes základ deset i tam, kde není, např.

$$\begin{array}{r} 7\,912 \\ -\,657 \\ \hline 6\,255 \end{array}$$

## – 8 – 6 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Vyvodíme a neustále opakujeme přesně postup písemného odčítání.
2. Volíme vhodné motivační úlohy z praktického života, na kterých je odčítání patrné.
3. Neustále opakujeme pamětné odčítání.
4. Vždy vedeme děti k posouzení výsledku, zda je reálný a dále je vedeme k provádění zkoušek správnosti.
5. V případě stálých neúspěchů, i přes veškeré úsilí, volíme kompenzační pomůcku, kalkulátor.

### Shrnutí

Odčítání je pro většinu děti náročnější operací než sčítání, a proto je třeba vyvození operace odčítání věnovat patřičnou pozornost, aby děti věděly, co se při odčítání s čísly děje. Při odčítání nelze využívat výhodných vlastností jako při sčítání (záměna nebo sdružování sčítanců) a je třeba všechny typy příkladů odčítání názorně vyvodit, nejlépe dramatizací a manipulativními činnostmi. Je nutné sledovat případné chyby, ke kterým mají děti sklon, a prostřednictvím konkrétního znázornění jednotlivých příkladů tyto chyby eliminovat.

### Úkoly k samostatnému studiu

1. Jak dětem vysvětlíte podstatu odčítání přirozených čísel?
2. Sledujte vlastní přístupy dětí při odčítání přirozených čísel s přechodem přes základ deset.
3. Jaké postupy jsou pro děti příznivé?
4. S jakými problémy se můžete setkat při písemném odčítání přirozených čísel?
5. Kdy je vhodné doporučit dětem kalkulátor?

# – 9 – NÁSOBENÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

*Maruška je žákyní třetí třídy, ve všech předmětech má úspěch, jen v matematice má problémy. Největším problémem pro ni je násobilka. Na dotaz „Kolik je 3 · 4?“ neodpoví a začne plakat. Vůbec neví, co má s čísly provést, když je má násobit.*

*Matěj je žákem čtvrté třídy. Dostane úkol, aby znázornil 3 · 4.*
*Nakreslí* ○○○ ○○○○ *a řekne: Nevím, jak mám znázornit to „krát“. Znázorňuje pouze modely čísel, nikoliv operaci násobení.*

*Mojmír je žákem 5. třídy. Neumí dobře násobilku, tak v pětiminutovkách vždy píše nějaké číslo, které ho napadne, jen aby něco napsal. Málokdy mu to vyjde, takže má neustále špatné známky a jeho nechuť k matematice se zvětšuje.*

## – 9 – 1 NÁSOBENÍ V OBORU NÁSOBILEK

Dobrá znalost operace násobení a základních spojů násobilky je pro děti dobrým východiskem pro zvládání dalšího učiva, kterým je dělení, dělení se zbytkem, písemné násobení a dělení, počítání se zlomky i praktické využití v aplikačních úlohách. Děti by měly nejprve pochopit, co je to násobení a teprve potom se snažit postupně zvládat jednotlivé spoje násobilky. Proto nejprve vyvozujeme násobilku dvou, tří, čtyř, pěti, následně další (šesti, sedmi, osmi, devíti). Až děti pochopí princip násobení, teprve potom učíme násobení číslem jedna, číslem 0 a číslem 10, protože na těchto specifických číslech děti princip násobení nemohou pochopit. Pokud se omezíme pouze na pamětné učení, děti nezvládají používat operaci násobení ve slovních úlohách.

Násobení přirozených čísel je vyvozováno na základě sčítání několika sobě rovných sčítanců. Při vyvozování této operace vycházíme z dramatizace a z konkrétních situací, které jsou dětem blízké. Např.

*Maminka dá každému ze svých čtyř dětí dva pomeranče. Kolik pomerančů maminka dá dětem celkem?*

Děti: A B C D

Pomeranče: 

2 + 2 + 2 + 2 = 8

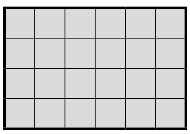
$4 \cdot 2 = 8$

Názvy jednotlivých čísel jsou: činitel, činitel, součin.

**Poznámka**: při tomto způsobu vyvozování násobení nelze tohoto příkladu použít pro spoj $2 \cdot 4$ – zde se musí znázornit dvě skupiny po čtyřech prvcích.

Při vyvozování násobení používáme vše, co děti osloví. Např.

- Při vyvozování násobilky čísel 2, 4, 6, 8 využíváme zvířátka, např. 2 nohy má papoušek, 4 nohy má pejsek nebo kůň, 6 noh má včela nebo moucha, 8 noh má pavouk.
- Při pečení buchet nebo vánočního cukroví sledujeme a počítáme, jak jsou na plechu umístěny jednotlivé druhy.
- Využíváme modelování ve čtvercové síti, např. $4 \cdot 6$ modelujeme:



- Ukážeme dětem „prstovou násobilku“ (podrobný popis viz Blažková a kol., 2007).
- Učíme vyjmenovávat násobky čísel vzestupně i sestupně.
- Vyznačujeme násobky čísel ve stovkové tabulce.
- Využíváme deskových her, např. loto, domino, pexeso, bingo.
- Hrajeme hru na „obchod“ a nakupujeme zboží, např. 4 jogurty po 8 Kč, 3 žvýkačky po 6 Kč, 5 lízátek po 4 Kč aj. a počítáme, kolik Kč zaplatíme.
- Využíváme obrázky různého zboží, např. ovoce a zeleniny (8 trsů banánů po 6 kusech, broskve v krabici 5 řad po 6 broskvích, 9 sáčků cibule po 10 kusech apod.), počítáme, kolik kusů je celkem.
- Využíváme oporu součinů sobě rovných činitelů, např. $6 \cdot 6$, $8 \cdot 8$, $4 \cdot 4$ aj.

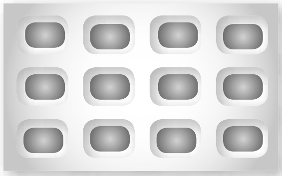
Násobení přirozených čísel má několik vlastností, které mohou děti využívat:

**Násobení přirozených čísel je komutativní**. Činitele můžeme zaměnit, součin se nezmění, např.

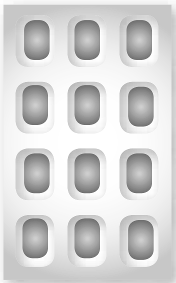
$3 \cdot 4 = 12$ $4 \cdot 3 = 12$ obecně $a \cdot b = b \cdot a$

Komutativnost násobení ilustrujeme na jednom objektu, např. máme bonboniéru, v ní jsou bonbóny uspořádány:

Ve třech řadách a čtyřech sloupcích $3 \cdot 4 = 12$



Nebo bonboniéru pootočíme a bonbóny jsou uspořádány ve čtyřech řadách a třech sloupcích $4 \cdot 3 = 12$



**Násobení přirozených čísel je asociativní**. Činitele můžeme sdružovat, součin se nezmění, např.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(4 \cdot 2) \cdot 5$ | $4 \cdot (2 \cdot 5)$ | obecně | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ |
| $8 \cdot 5 = 40$ | $4 \cdot 10 = 40$ | | |

Asociativnosti násobení využíváme pro výhodnější počítání nebo při násobení mimo obor násobilek.

**Násobení číslem 1**

Násobíme-li dané přirozené číslo číslem 1, součin je roven činiteli, tomuto číslu (číslo se nezmění). Volíme např. motivační příklad:

*Dědeček dal šesti vnukům po jednom jablku. Kolik jablek dal vnukům celkem?*

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

$6 \cdot 1 = 6$ $\quad 1 \cdot 6 = 6$ $\quad$ obecně $\quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

**Násobení číslem 0**

Násobíme-li dané přirozené číslo číslem 0, součin je roven 0.

*Jestliže babička dala každému z pěti vnuků nula bonbónů, kolik bonbónů jim dala celkem?*

A B C D E

0 0 0 0 0

$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

$5 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 5 = 0$ obecně $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

## – 9 – 2 NÁSOBENÍ MIMO OBOR NÁSOBILEK ZPAMĚTI

1. Příklady typu $4 \cdot 30$

   Vhodné je využít rozkladu čísla 30 na součin $3 \cdot 10$ a asociativnosti násobení, tj.

   $4 \cdot 30 = 4 \cdot (3 \cdot 10) = (4 \cdot 3) \cdot 10 = 12 \cdot 10 = 120$

   Stačí tedy, abychom vynásobili počet desítek a tento součin vynásobili deseti.

2. Příklady typu $5 \cdot 12$

   Využijeme rozkladu čísla 12 na desítku a jednotky a roznásobení součtu v závorce:

   $5 \cdot 12 = 5 \cdot (10 + 2) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 50 + 10 = 60$

## – 9 – 3 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI PAMĚTNÉM NÁSOBENÍ

1. Děti vůbec nechápou význam operace násobení přirozených čísel, vůbec nevědí, co mají s čísly udělat.
2. Děti zaměňují operaci násobení a zápis čísla, např.:

   $4 \cdot 4 = 44$ $6 \cdot 5 = 65$
3. Chybují při vyvození násobení, dominantní je pro ně jeden činitel, např.

   $5 \cdot 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
4. Děti stále používají pouze řadu násobků a nejsou schopny naučit se spoje nezávisle na řadě násobků.
5. Děti některé násobky zaměňují, např. $7 \cdot 8 = 54$, $9 \cdot 6 = 56$, $8 \cdot 9 = 80$, $7 \cdot 8 = 64$, $7 \cdot 7 = 53$, $5 \cdot 7 = 37$, $8 \cdot 4 = 34$.
6. Převažuje dominance některého čísla, např. $2 \cdot 9 = 19$, $4 \cdot 4 = 14$, $8 \cdot 8 = 68$.
7. Děti zaměňují operace násobení a sčítání, např. $50 \cdot 4 = 54$
8. Nerozlišují mezi rozvojem čísla v desítkové soustavě a násobením, např.:

   $13 \cdot 2 = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 16$ $32 \cdot 3 = 30 + 2 \cdot 3 = 36$

## – 9 – 4 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Neustále se snažíme o to, aby děti pochopily podstatu násobení, aby věděly, co se s čísly při násobení děje. Největší potíže při násobení činí dětem to, že nevědí, co s činiteli udělat, takže většinou napíší jako součin číslo, které je napadne.
2. Pamětné zvládnutí spojů násobení vždy opíráme o konkrétní představy. Násobilku učíme v malých krocích, ale procvičujeme neustále.
3. Při vyvození vždy začínáme násobilkami čísel 2, 3, 4 atd. Zdánlivě jednoduché případy násobení čísly 1, 0 a 10 nemohou být jako prvotní, protože nedostatečně ilustrují význam násobení.
4. Prvotní je vyvození operace násobení a její pochopení, teprve potom pamětné zvládnutí jednotlivých spojů.
5. Co nejvíce využíváme praktických příkladů, které děti zajímají.
6. Volíme vhodné didaktické hry (Blažková a kol., 2007; Krejčová, 2009).

**Poznámka**: Pokud děti zvládnou základní spoje násobení a s porozuměním a zpaměti, usnadní se jim zvládnutí mnoha dalších témat učiva matematiky.

## – 9 – 5 PÍSEMNÉ NÁSOBENÍ

*Šárka má problémy s písemným násobením, nezvládne všechno najednou. Když se zaměří na správnost spojů násobení, neví, kam co napsat, zaměří-li se na správnost zápisů v písemném algoritmu, chybuje v násobcích.*

Zvládnutí algoritmu písemného násobení vyžaduje jednak znalost pamětného násobení, jednak schopnost přesně postupovat a zapisovat čísla do schématu násobení. Písemné násobení vyžaduje zapojení všech typů paměti dítěte. Uvědomme si, co všechno musí dítě zvládnout, když např. násobí písemně:

$$\begin{array}{r} 157 \\ \underline{\cdot\ 8} \\ 1256 \end{array}$$

Nejprve z dlouhodobé paměti vyvolá spoj $8 \cdot 7 = 56$. Číslo 6 zapíše, 5 uloží do pracovní paměti. Dále násobí $8 \cdot 5 = 40$ – opět využívá dlouhodobou paměť, potom přičte 5, které má uloženo v pracovní paměti, $40 + 5 = 45$, zapíše 5 a násobí dále $8 \cdot 1 = 8$ , přičte 4, $8 + 4= 12$ a zapíše.

To je velký nápor na myšlenkovou činnost dítěte. Zároveň se ale zdokonaluje v koncentraci, protože při provádění tohoto algoritmu se musí plně soustředit na prováděné operace a postupy při zápisu čísel a nemůže myslet na nic jiného. Je však třeba počítat s tím, že pokud má dítě problémy s násobilkou, tak buď se plně soustředí na správnost násobení a chybuje v zápisu v algoritmu, nebo algoritmus zapisuje správně, ale chybuje v násobilce. Některé děti nejsou schopny soustředit se současně na obojí.

Nejprve se vyvozuje písemné násobení jednociferným činitelem, a to ve velmi jemné metodické řadě, kdy v každém novém příkladu je vždy jen jeden nový jev. Pokud by bylo možné, ukážeme dětem, jak by se postupovalo při pamětném počítání a jak se výpočet zjednoduší písemným algoritmem.

Např. vynásobte $123 \cdot 3$

Při pamětném postupu bychom násobili od stovek:

$$123 \cdot 3 = (100 + 20 + 3) \cdot 3 = 300 + 60 + 9 = 369$$

Při písemném násobení postupujeme od jednotek:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{\cdot\ 3} \\ 369 \end{array} \qquad \text{elementární kroky: } \begin{array}{l} 3 \cdot 3 = 9 \\ 3 \cdot 1 = 3 \\ 3 \cdot 2 = 6 \end{array}$$

První příklady jsou voleny tak, aby násobení bylo bez přechodu přes základ a aby děti zvládly postup při zápisu jednotlivých součinů.

Další příklady volíme tak,

a) aby byl nejprve přechod mezi jednotkami a desítkami $\begin{array}{r} 125 \\ \underline{\cdot\ 3} \end{array}$

b) aby byl přechod mezi desítkami a stovkami $\begin{array}{r} 162 \\ \underline{\cdot\ 3} \end{array}$

c) aby byly přechody mezi všemi řády $\begin{array}{r} 265 \\ \underline{\cdot\ 3} \end{array}$

Násobení dvojciferným činitelem se vyvozuje ve dvou fázích, nejprve se násobí násobky čísla 10, např. $\begin{array}{r} 123 \\ \underline{\cdot\ 30} \end{array}$

potom dvojciferným činitelem, např. $\begin{array}{r} 123 \\ \underline{\cdot\ 32} \end{array}$

Respektuje se analogický postup, jako při násobení jednociferným činitelem.

Příklady typu $\begin{array}{r} 123 \\ \underline{\cdot\ 30} \end{array}$

je vhodné ilustrovat takto: $30 = 3 \cdot 10$, nejprve tedy vynásobíme deseti (napíšeme nulu) a potom třemi:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{\cdot\ 30} \\ 3690 \end{array}$$

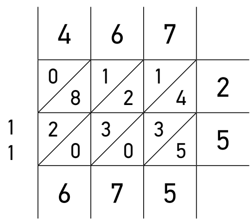
Příklady typu $\begin{array}{r} 123 \\ \underline{.\ 32} \end{array}$

řešíme s využitím obou dříve naučených postupů.

  123
· 32
  246 — násobíme číslem 2
3690 — násobíme číslem 30
3936 — (Nulu později nepíšeme, částečný součin posuneme 1 místo doleva.)

V posledních letech se v některých učebnicích uvádí postup písemného násobení indickým způsobem (viz např. učebnice nakladatelství Fraus), je však třeba posoudit, do jaké míry je tento způsob násobení pro to které dítě s poruchou učení vhodný – zejména sčítání v šikmých sloupcích a zda je schopno si samostatně schéma znázornit (pokud je nemá).

Postup tzv. indického násobení je velmi starý, vznikl v Indii ještě před vynalezením nuly, nazývá se *gelosia*. Byl popsán již v roce 1494 florentským matematikem Lucou Pacioli (Balada, 1959). Čísla zapisují do určitého schématu. Např. součin čísel 467 . 25 se zapisuje takto:




Tedy 467 · 25 = 11 675.

## – 9 – 6 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI PÍSEMNÉM NÁSOBENÍ

1. Děti přenášejí postup z písemného sčítání, násobí mezi sebou jednotky a desítky, např.

   42
   · 23
   86

   násobí: 3 · 2 = 6, 2 . 4 = 8.

2. Zapisují dílčí součiny do jednoho řádku, např.

   42
   · 21
   8442

   násobí 1 · 2 = 2, 1· 4 = 4, 2 · 2 = 4, 2 · 4 = 8 nebo 1 · 42 = 42, 2 · 42 = 84

3. Násobí pouze jednotkami druhého činitele, násobení nedokončí, např.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot\ 23 \\ \hline 126 \end{array}$$

násobí $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$.

4. Nezvládají přechody přes základ:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot\ 8 \\ \hline 3240 \end{array}$$

počítají $8 \cdot 5 = 40$, $8 \cdot 4 = 32$

5. Mají problémy s čísly s nulami:

$$\begin{array}{r} 304 \\ \cdot\ 2 \\ \hline 68 \end{array} \quad \text{násobí jako} \quad \begin{array}{r} 34 \\ \cdot\ 2 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 564 \\ \cdot\ 205 \\ \hline \end{array} \quad \text{násobí jako} \quad \begin{array}{r} 564 \\ \cdot\ 25 \\ \hline \end{array}$$

6. Nezapisují správně částečné součiny:

$$\begin{array}{r} 257 \\ \cdot\ 35 \\ \hline 1285 \\ 771 \\ \hline 2056 \end{array}$$

7. Přičítají v přechodech vždy druhého činitele, např.:

$$\begin{array}{r} 75 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 405 \end{array}$$

počítají $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 7 = 35$, $35 + 5 = 40$

8. Vynásobí vzájemně jednotlivá čísla a součiny sečtou, např.

$$\begin{array}{rl} 608 & \\ \cdot\ 65 & \\ \hline 40 & \quad 5 \cdot 8 \\ 30 & \quad 5 \cdot 6 \\ 48 & \quad 6 \cdot 8 \\ 36 & \quad 6 \cdot 6 \\ \hline 154 & \end{array}$$

9. Přičítají desítky k prvnímu činiteli, např.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 28 \\ \cdot\, 4 \\ \hline 202 \end{array}$$

počítají: 4 · 8 = 32, 2 + 3 = 5, 4 · 5 = 20

10. Zaměňují algoritmy sčítání a násobení tak, že čísla sčítají, ale postupují podle algoritmu násobení, např.:

$$\begin{array}{r} 48 \\ \cdot\, 39 \\ \hline 8247 \end{array}$$

počítají: 9 + 8 = 17, 7 zapíší pod jednotky, 1 desítku přičtou k dalšímu
1 + 9 + 4 = 14 4 zapíší pod desítky
1 + 3 + 8 = 12 2 zapíší pod stovky
1 + 3 + 4 = 8.

## – 9 – 7 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Znovu se přesvědčujeme o tom, zda děti chápou význam operace násobení, na praktických příkladech, např.: Koupím si 5 jogurtů, cena jednoho jogurtu je 9 Kč. Kolik Kč zaplatím?
2. Neustále (každodenně) opakujeme základní spoje násobení, avšak v malém počtu příkladů.
3. Nápravná opatření pro písemné násobení spočívají ve vypracování vhodných, velmi jemných metodických řad příkladů, zpočátku s menšími čísly.
4. Pokud mají děti problémy s násobilkou, mohou používat tabulky násobků a vyhledávat v nich potřebné spoje. Je však třeba si uvědomit, že používáním tabulky násobků se většinou děti násobilce nenaučí – naučí se pouze hledat v tabulce.
5. Je vhodné, aby děti prováděly zkoušky správnosti používáním kalkulátorů, pokud umí čísla na displeji správně zobrazit.

### Shrnutí

Správné vyvození podstaty násobení přirozených čísel je nezbytné k pochopení celého přístupu dětí k násobení. Pokud význam násobení nepochopí, nemá smyslu učit je pamětné spoje násobení. Avšak pokud podstatu násobení zvládnou (umí znázornit pomocí konkrétních předmětů, co znamená např. 2 krát 5), pak je pamětné zvládnutí násobení prospěšné – usnadní to dětem další učivo. Zásadou je, učit děti po malých kvantech, zejména násobilky čísel 6, 7, 8, 9 – např. jen dva až tři spoje, až je zvládnou, přidávat postupně další. K procvičování je třeba využít nejrůznějších forem práce a didaktických her. Pokud děti zvládají pamětné spoje, je možné přistoupit k písemnému násobení. Je třeba zvážit, který z algoritmů – násobení pod sebou nebo násobení indické je pro děti zvládnutelné. Oba postupy mají pro děti s poruchami učení svá úskalí.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Uveďte, jak je vyvozeno násobení přirozených čísel.
2. Jaké vlastnosti má operace násobení přirozených čísel v množině přirozených čísel a jak je možné je využívat při násobení, zejména při násobení mimo obor násobilek a výběru snadnějších spojů pro dítě.
3. Jaké didaktické hry je možné využít ke zvládnutí násobení přirozených čísel?
4. Jaké problémy zjišťujete u dětí v souvislosti s pamětným a písemným násobením?

# – 10 – DĚLENÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

*Rozárka je žákyní 4. třídy a nezvládá vůbec dělení přirozených čísel. Nemá představu, co s čísly provést, aby vypočítala např. 32 : 4.*

*Radim umí rozdělit 8 bonbónů mezi čtyři děti tak, aby měly stejně, avšak ke konkrétní situaci neumí zapsat příklad dělení. Často zapisuje 4 : 8.*

## – 10 – 1 PAMĚTNÉ DĚLENÍ

Dělení přirozených čísel je definováno jako inverzní operace k operaci násobení. Jestliže pro přirozená čísla $a, b, c$ platí $a \cdot b = c$ pak pro $a \neq 0, b \neq 0$ platí: $c : a = b, c : b = a$. Např.:

$4 \cdot 8 = 32$ $32 : 4 = 8$ $32 : 8 = 4$

Protože pro děti je dělení nejnáročnější operací, vyvozujeme dělení na základě rozdělování konkrétních předmětů. Již v předškolním věku umí děti rozdělit několik předmětů mezi určitý počet dětí tak, aby měly všechny děti stejně. Při vyvozování dělení vycházíme proto z konkrétní situace, kdy děti rozdělují konkrétní předměty, přitom je mohou rozdělovat na několik stejných částí, např. bonbóny mezi několik dětí, nebo mohou dělit podle obsahu, tj. po několika předmětech, např. bonbóny po třech. Formulujeme proto dva typy úloh.

### – 10 – 1 – 1 Dělení na stejné části

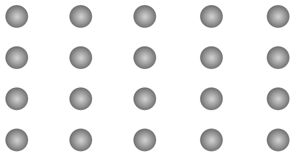
*Rozdělte 20 kuliček mezi pět dětí tak, aby měly všechny stejně a všechny kuličky jste rozdělili. Kolik kuliček bude mít každé dítě?*

a) Vycházíme z dramatizace, kdy situaci konkrétně předvedeme.

b) Situaci znázorníme graficky – postupně přikreslujeme každému z dětí po jedné kuličce.

Děti: A B C D E

Kuličky:



c) Zapíšeme příklad: 20 : 5 = 4

Každé dítě bude mít 4 kuličky.
Zkouška: (např. sečtením kuliček každého z dětí) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20.

Názvy čísel jsou: dělenec, dělitel, podíl.

V tomto příkladu je dělenec 20, dělitel 5, podíl 4 a podíl vyjadřuje počet prvků každé z částí.

### – 10 – 1 – 2 Dělení podle obsahu

*Rozdělte 20 kuliček na hromádky po pěti. Kolik hromádek vytvoříte?*

a) dramatizace – zde děti pracují samostatně – každý má 20 kuliček a vytváří hromádky po pěti kuličkách

b) grafické znázornění

c) zápis příkladu: 20 : 5 = 4

Vytvoříme čtyři hromádky.
Zkouška: 5 + 5 + 5 + 5 = 20

I v tomto příkladu je dělenec 20, dělitel 5, podíl 4, podíl však vyjadřuje počet vytvořených částí.

Je třeba si uvědomit, že jeden příklad vyjadřuje dvě zcela jiné situace a obě je třeba s dětmi provést, zejména proto, aby v budoucnu uměly řešit slovní úlohy, ve kterých se vyskytuje operace dělení.

### – 10 – 1 – 3 Speciální případy při dělení

a) Dělení číslem 1: 5 : 1 = 5

vyvodíme na příkladu: Pět bonbónů rozděl po jednom, kolik dětí podělíš?

b) Dělenec je roven děliteli 5 : 5 = 1

vyvodíme na příkladu: Pět bonbónů rozděl mezi 5 dětí, kolik bonbónů bude mít každé dítě?

c) Dělení nuly $0 : 5 = 0$

vyvodíme na příkladu: Nula kuliček rozděl mezi 5 dětí, kolik kuliček bude mít každé dítě?

d) Dělení nulou $5 : 0 = ?$

Děti se seznamují s větou „nulou nedělíme“, avšak často bez jakéhokoliv zdůvodnění, a proto v příkladech chybují a píší buď $5 : 0 = 0$ nebo $5 : 0 = 5$. Je vhodné ukázat dětem, že neexistuje přirozené číslo, pro které bychom mohli po vydělení nulou provést zkoušku správnosti.

Kdyby např. $5 : 0 = 0$, muselo by platit $0 . 0 = 5$. To však neplatí, protože $0 . 0 = 0$.

Kdyby $5 : 0 = 5$, muselo by platit $5 . 0 = 5$. To neplatí, protože $5 . 0 = 0$.

Takto můžeme postupovat a hledat číslo, pro které by vyšla zkouška správnosti. To však nenajdeme.

**Poznámka**: Obecněji, jestliže by platilo pro $a \neq 0$, $a : 0 = x$, pak by muselo platit $x \cdot 0 = a$. To však neplatí, protože $x \cdot 0 = 0$ pro každé přirozené $x$.

Postupně děti zvládají základní spoje dělení zpaměti a pokud chybují, měly by mít možnost vždy situaci znázornit konkrétními předměty.

Dále se děti seznámí se souvislostí operace násobení a operace dělení v oboru přirozených čísel, např. jestliže $5 \cdot 7 = 35$, pak $35 : 7 = 5$ a $35 : 5 = 7$.

## – 10 – 2 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI DĚLENÍ V OBORU NÁSOBILEK

1. Děti nepochopí význam operace dělení, zejména pokud nemají dostatek konkrétních činností a nácvik se opírá pouze o pamětné zvládnutí spojů dělení.
2. Děti zaměňují některé příklady dělení (základní spoje), např. $54 : 9 = 7$, $56 : 8 = 9$ apod. Jedná se zejména o čísla 42, 48, 54, 56, 63, 64 aj.
3. Chyby z nepozornosti, např. $40 : 5 = 10$.
4. Ve slovních úlohách nepochopí, kdy se užívá operace dělení.
5. Zaměňují dělence a dělitele, např. $2 : 8 = 4$.

## – 10 – 3 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Nejprve vyvozujeme dělení na konkrétních příkladech, rozdělujeme předměty mezi děti nebo na hromádky po několika předmětech. Vždy zapíšeme příslušný příklad.
2. Postupně (po malých krocích) učíme základní spoje zpaměti.

3. Vždy provádíme zkoušku správnosti pomocí násobení.
4. Volíme vhodné didaktické hry (Blažková a kol., 2007; Krejčová, 2009).

## – 10 – 4 DĚLENÍ MIMO OBOR NÁSOBILEK

### – 10 – 4 – 1 Dělení se zbytkem

*Zuzka má problémy při dělení se zbytkem, protože neumí najít nejblíže menší násobek daného čísla k danému číslu. Když počítá např. 39 : 6, vždy uvádí jen jeden násobek šesti, a to číslo 30.*

*Zbyněk zapisuje dělení se zbytkem: 39 : 6 = 36 (zb. 3).*

Dělení se zbytkem se definuje takto: Jestliže máme dvě přirozená čísla $a$, $b$ taková, že $a$ není násobkem $b$ a $b$ je různé od nuly, pak k těmto číslům existují přirozená čísla $q$, $z$ tak, že platí $a = b \cdot q + z$.

Číslo $a$ se nazývá dělenec, $b$ dělitel, $q$ neúplný podíl, $z$ zbytek. Přitom zbytek musí být vždy menší než dělitel.

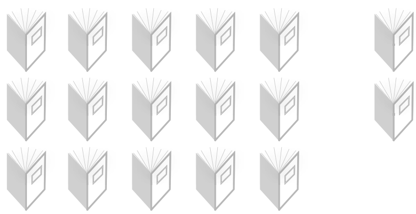
Dělení se zbytkem se vyvozuje analogicky jako dělení beze zbytku.

Nejprve formulujeme úlohu:

*17 sešitů máme rozdělit mezi 5 dětí. Kolik sešitů dostane každé dítě a kolik sešitů zbude?*

Děti: A B C D E

Sešity:



Zápis: 17 : 5 = 3 (zb. 2)
2

Zkouška: $3 \cdot 5 + 2 = 17$ nebo $3 \cdot 5 = 15$ $15 + 2 = 17$

Odpověď: Každé dítě dostane 3 sešity a 2 sešity zbydou.

Další úloha:

*17 sešitů máme rozdělit na hromádky po pěti. Kolik úplných hromádek vytvoříme a kolik sešitů zbude?*

17 : 5 = 3 (zb. 2)
2

Zkouška: 3 · 5 + 2 = 17

Vytvoříme 3 hromádky a 2 sešity zbydou.

Je nutné, aby děti viděly pod každým číslem jeho význam, tj. které číslo je ve významu dělitele, dělence, neúplného podílu i zbytku.

Vhodné je využití řad násobků čísel a vyznačení nejblíže menšího násobku daného čísla k danému číslu.

## – 10 – 4 – 2 Problémy dětí při dělení se zbytkem

1. Nezvládnutí základních spojů násobení a dělení, které jsou zde nezbytné.
2. Pokud je dělenec blízko dalšího násobku dělitele, děti počítají např.

   41 : 7 = 6 (zb. 1)
   1

   Zapisují vyšší násobek dělitele a do zbytku zapíší číslo, které do vyššího násobku chybí.
3. Děti zapisují přímo násobek, např.: 38 : 7 = 35 (zb. 3)
4. Nevědí si rady s případy, kdy je dělenec menší než dělitel, např. 3 : 5 = nemá řešení. Přitom 3 : 5 = 0 (zb. 3) – toto je nutné zvládnout pro písemné dělení.
5. Provádějí chybný zápis zkoušky správnosti, např.: 3 · 5 = 15 + 2 = 17. Zde je porušena tranzitivita rovnosti. V průběhu výpočtu není možné nic přičítat nebo odčítat a zapisovat tak chybné rovnosti.

## – 10 – 4 – 3 Dělení mimo obor násobilek zpaměti

Jedná se o příklady typu 72 : 4.

Je třeba najít vhodný rozklad čísla 72 na dvě čísla tak, aby byla, pokud možno, obě dělitelná číslem 4. V tomto případě jsou to čísla 40 a 32.

Počítáme: 72 : 4 = (40 + 32) : 4 = 40 : 4 + 32 : 4 = 10 + 8 = 18

Stručný zápis: 72 : 4 = 18

40 32

Zkouška: 18 · 4 = (10 + 8) · 4 = 10 · 4 + 8 · 4 = 40 + 32 = 72

Příklady tohoto typu se počítají zpaměti pouze v jednodušších případech. V případě, že děti toto učivo zvládají s velkými problémy, je možné v rámci individuálního plánu toto učivo vynechat.

## – 10 – 5 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Dělení se zbytkem modelujeme na konkrétních situacích, volíme dramatizaci, poukazujeme na význam jednotlivých čísel při prováděné dramatizaci, tj. které číslo je dělencem, které dělitelem, které neúplným podílem a které zbytkem.
2. Aktivně pracujeme s chybou.

## – 10 – 6 PÍSEMNÉ DĚLENÍ

*Vendulka dělí písemně: 423 521 : 7 = 653. Na otázku „Jak jsi to dělila?“ odpoví: „Copak to není dobře?“*

Písemné dělení se od ostatních algoritmů písemných operací liší tím, že algoritmy pro písemné sčítání, odčítání a násobení začínají vždy od jednotek, dělení však začíná od nejvyššího řádu. Dále je třeba, aby se děti uměly orientovat v zápisu algoritmu dělení, který musí zvládnout jak v horizontálním, tak ve vertikálním směru. Navíc, aby mohly děti úspěšně provádět písemné dělení, je třeba, aby měly zvládnuté všechny pamětné operace – zejména dělení se zbytkem a odčítání. Pro nácvik písemného dělení je vhodné sestavit velmi podrobnou metodickou řadu, kdy se v každém dalším příkladu objeví jen jeden nový jev.

### – 10 – 6 – 1 Dělení jednociferným dělitelem

1. První série příkladů je volena tak, aby děti dělily dvojciferné číslo číslem jednociferným a aby počet desítek dělence byl násobkem dělitele a aby dělení bylo beze zbytku. Děti se učí postupným krokům algoritmu (co čím dělit, kam co zapsat). U každého příkladu provádíme ihned zkoušku správnosti. Jednak tím opakujeme násobení a jednak učíme děti přesvědčit se o správnosti výpočtu vlastními silami. Např.:

9 : 3
6 : 3
69 : 3 = 23
09
0

Zkouška: 23
· 3
69

2. Ve druhé sérii příkladů volíme takové, kdy je počet desítek dělence větší než je dělitel, ale není jeho násobkem. Je třeba, aby děti zvládly zapsání zbytku při dělení a vytvoření nového částečného dělence, např.:

25 : 5
7 : 5
75 : 5 = 15
25
0

Zkouška: 15
· 5
75

3. Třetí série obsahuje příklady, kdy na místě nejvyššího řádu dělence je číslo menší než dělitel, např.:

36 : 6
15 : 6
156 : 6 = 26
36
0

Zkouška 26
· 6
156

4. Dělení je se zbytkem, např.

34 : 4
23 : 4
6 : 4
634 : 4 = 158
23
34
2 (zbytek)

Zkouška: 158
· 4
632

632
+ 2
634

6. Dělení čísel s nulami. V tomto případě je třeba vést děti tak, aby uplatňovaly důsledně naučený postup a nevynechaly některý z kroků nebo některé z čísel.

34 : 5
3 : 5
10 : 5
1034 : 5 = 206
03
34
4 (zbytek)

Zkouška: 206
· 5
1030

1030
+ 4
1034

### – 10 – 6 – 2 Dělení dvojciferným dělitelem

Postup dělení dvojciferným dělitelem kopíruje metodickou řadu dělení jednociferným dělitelem. Pro děti s poruchami učení je však náročný. Obtížně odhadují částečné podíly, hůře se v algoritmu orientují. Pokud se jim podaří zvládnout jednodušší příklady, je to velký úspěch. V opačném případě volíme jako kompenzační nástroj kalkulátor. Avšak je nezbytné, aby děti počítání na kalkulátoru ovládaly bezpečně a aby měly určitou představu o řádu podílu, tj. uměly správně odhadnout výsledek. Při počítání dělení se zbytkem na kalkulátoru vychází desetinné číslo. Na to je vhodné děti upozornit.

Zadáváme příklady typu:

a) 621 : 27 první číslici podílu můžeme určit odhadem, při kterém využijeme zaokrouhlených čísel: 600 : 30 (nebo 60 : 3)

$$\begin{array}{l} 621 : 27 = 23 \\ \;\;81 \\ \;\;\;\;0 \end{array} \qquad \text{Zkouška } \begin{array}{r} 23 \\ \underline{\cdot\, 27} \\ 161 \\ \underline{46\;\;} \\ 621 \end{array}$$

b) V některých případech je odhad provedený pomocí zaokrouhlených čísel odlišný od skutečného podílu, avšak může být využit k orientačnímu určení podílu (bude to asi…). Např. 184 : 24 odhad by byl 200 : 20 = 10, avšak skutečný podíl je 8. Podíl je menší než odhad proto, že jsme zaokrouhlovali dělence nahoru a dělitele dolů.

## – 10 – 7 PROBLÉMY PŘI PÍSEMNÉM DĚLENÍ

1. Numerické chyby vyplývající z nezvládnutí pamětných operací.
2. Formální provádění zkoušky, ve které se opakuje chyba.
3. Nedodržení přesného postupu algoritmu, např.

   2 535 : 5 = 57 422 149 : 7 = 639
4. Nezvládnutí dělení čísel s nulami, např.:

   2 408 : 6 = 41, zb. 2 82 000 : 4 = 205 3 000 : 10 = 30

## – 10 – 8 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Pro děti s problémy v matematice volíme pro písemné dělení jednodušší příklady – je přínosnější, když zvládnou jednoduché příklady, než když si neví rady s příklady složitějšími.

2. Vždy provádíme zkoušku správnosti.
3. Neustále opakujeme pamětné počítání – sčítání, odčítání, násobení, dělení.
4. Vhodně zařazujeme používání kalkulátoru.

## Shrnutí

Dělení je pro děti nejobtížnější operací, protože jednak je náročné na představivost a odhady, jednak je třeba, aby děti zvládly všechny předchozí operace.

K vyvození operace dělení přirozených čísel je třeba využívat manipulativních činností a dramatizace, aby děti pochopily význam operace dělení a dokázaly ji využít při řešení aplikačních úloh. Až po důkladném pochopení významu operace dělení je třeba zvládnout základní spoje. Je možné využít souvislosti operací násobení a dělení přirozených čísel.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Vysvětlete význam dělení na části a dělení podle obsahu.
2. Hledejte vhodné postupy, jak dětem zpřístupnit zvládnutí základních spojů dělení.
3. Jak problémy mají děti při pamětném dělení?
4. Sledujte problémy dětí při písemném dělení a posuďte, v kterých případech je vhodné doporučit používání kalkulátoru.

# – 11 – POUŽÍVÁNÍ ZÁVOREK A PRIORITA OPERACÍ

## – 11 – 1 TEORETICKÁ VÝCHODISKA

V praxi často řešíme úlohy, ve kterých pracujeme s více čísly (např. při řešení složených slovních úloh) a potřebujeme stanovit postup výpočtu v číselných výrazech. Děti používají ustálených pravidel, která se jednak týkají používání závorek (pokud jsou vyznačeny) a jednak různé úrovně jednotlivých operací.

Pokud se v číselných výrazech vyskytují závorky, pak výrazy v závorce se provádějí nejdříve, např.

$26 - (12 - 8) = 26 - 4 = 22$
$(3 + 5) \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$

Pokud se v číselném výrazu vyskytuje pouze sčítání a odčítání a nejsou vyznačeny závorky, pak při výpočtu postupujeme zleva doprava, např.

$42 + 14 - 16 = 56 - 16 = 40$
$100 - 25 - 30 = 75 - 30 = 45$

Jestliže se v číselném výrazu vyskytují operace sčítání, odčítání, násobení a dělení a nejsou vyznačeny závorky, pak platí, že násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním, např.

$3 + 5 \cdot 6 = 3 + 30 = 33$
$28 - 6 : 3 = 28 - 2 = 26$
$3 \cdot 9 + 8 \cdot 4 = 27 + 32 = 59$

## – 11 – 2 PROBLÉMY DĚTÍ PŘI PROVÁDĚNÍ MATEMATICKÝCH OPERACÍ

1. Děti počítají výraz v závorce jako první, avšak zapomenou na první číslo, např. $60 - (50 - 30) = 20$.
2. Vypočítají výraz v závorce jako první, také jej jako první zapíší a pak si neví rady, např. $60 - (50 - 30) = 20 - 60$.

3. Děti nerespektují poučku o pořadí operací a vždy postupují zleva doprava, např. $3 + 5 \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$, nebo počítají $48 - 8 : 4 = 40 : 4 = 10$, což je chybně.
4. Počítají podle svých postupů. Např. $6 \cdot 5 + 4 : 2$ počítají $5 + 4 = 9$, $6 \cdot 9 = 54$, $54 : 2 = 27$, přitom správný postup je $6 . 5 + 4 : 2 = 30 + 2 = 32$.

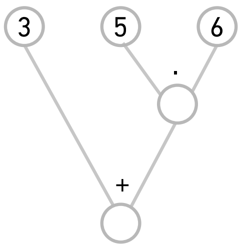
## – 11 – 3 REEDUKAČNÍ POSTUPY

1. Možnost zapisovat výsledek výrazu v závorce nad závorku a vést děti k zápisům všech čísel od začátku:

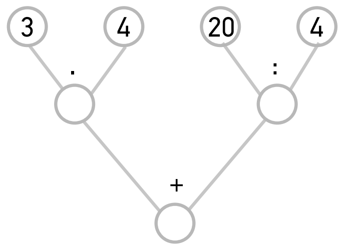
$$60 - \overset{20}{(50 - 30)} = 60 - 20 = 40$$

2. Postup provádění je možné znázorňovat pomocí stromu, ve kterém v první úrovni (shora) násobíme nebo dělíme a ve druhé úrovni sčítáme nebo odčítáme, např.

$3 + 5 \cdot 6$




$3 \cdot 4 + 20 : 4$




3. Používat závorky i ve výrazech s násobením nebo dělením, např.

   $5 + (6 \cdot 7)$ nebo $(3 \cdot 4) + (20 : 4)$

### Shrnutí

Práce s číselnými výrazy, ve kterých se vyskytuje více operací, vyžaduje systém a respektování určitých pravidel. I když žáci pravidla umějí formulovat (většinou zpaměti, bez hlubšího porozumění), neumějí je uplatňovat v konkrétních příkladech.

### Úkoly k samostatnému studiu

1. Sledujte, jaké chyby děti dělají, když pracují s číselnými výrazy s více operacemi.
2. Jaké postupy doporučujete ke správnému počítání s číselnými výrazy?
3. Jak počítá kalkulátor s číselnými výrazy?

# – 12 – DESETINNÁ ČÍSLA

*Šárka je žákyní 6. ročníku. Na prvním stupni měla diagnostikovanou dyskalkulii, největší problémy jí činily operace s přirozenými čísly. Při počítání s čísly desetinnými se projevují problémy při pamětném sčítání a odčítání a přechodem přes základ 10:*

| | |
|---|---|
| 4,6 + 8,9 = 12,15 | *sčítá zvlášť část celou a část desetinnou,* |
| 2,8 + 0,06 = 2,14 | *sčítá čísla nestejných řádů 8 + 6 = 14,* |
| 9,3 − 3 = 9 | *odčítá čísla nestejných řádů,* |
| 6,4 − 5,9 = 1,5 | *odčítá vždy od většího čísla číslo menší, 6 − 5 = 1, 9 − 4 = 5,* |
| 5,3 − 0,25 = 5,22 | *odčítá čísla nestejných řádů a navíc od většího čísla číslo menší, 5 − 3 = 2.* |

Individuální práce se Šárkou a analýza jejích chyb odhalila, že Šárka nemá představu o desetinném čísle a jednotlivých řádech. Bylo potřeba nejprve vybudovat základní pojmy a teprve potom s čísly provádět operace. Manipulativní činnost a geometrická prezentace desetinného čísla (zejména vybarvování) byla pro Šárku inspirativní.

## – 12 – 1 NUMERACE V OBORU DESETINNÝCH ČÍSEL

V návaznosti na přirozená čísla se zavádějí čísla desetinná. Tak, jak je věnována pozornost zavedení čísel přirozených, tak je nutné správné vyvození čísel desetinných. Pokud se žák pouze dozví, že desetinné číslo je číslo, které má desetinnou čárku, je to pro něj informace naprosto nulová. Pojem desetinné číslo musí být vybudován stejně důkladně, podobně jako pojem číslo přirozené. Výhodou je časté využívání desetinných čísel v běžném životě, a tedy motivační příklady mohou této skutečnosti využívat. Je však nutné vybudovat „most“ mezi čísly užívanými v běžné životní praxi a čísly v matematických úlohách. Mnoho žáků, kteří běžně desetinná čísla používají v běžném životě, např. při nákupech nebo ve sportu, při řešení školních úloh selhávají. Výchozím krokem pro vytvoření pojmu desetinné číslo je pochopení zlomku jako části celku, následuje desetinný zlomek a poté desetinné číslo. Schematicky znázorněno:

**zlomek jako část celku**

**desetinný zlomek**

**desetinné číslo**

Již dítě v mateřské škole chápe intuitivně pojem zlomek jako část celku – ví, co je polovina rohlíku, polovina nebo čtvrtina jablíčka, polovina nebo čtvrtina krajíce chleba a na toto je třeba navazovat.

Metodické postupy vyvození zlomku jako části celku se opírají o manipulativní činnosti – překládání čtverců, kruhů, obdélníků na několik stejných částí.

Např. úkol „přeložte čtverec na čtyři stejné části“ mohou děti řešit tak, že papír přeloží na 4 shodné trojúhelníky nebo na 4 shodné čtverce nebo na 4 shodné obdélníky (a také mnoha jinými způsoby) a uvědomí si, na kolik stejných částí čtverec dělily.

Další činnost souvisí s vybarvováním: Vybarvěte jednu část čtverce.

Zápis zlomku se provádí od jmenovatele:

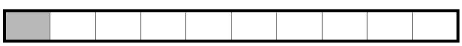
Na kolik stejných částí jsme rozdělili čtverec – na čtyři. Kolik částí čtverce jsme vybarvili – jednu část. Jak zapíšeme, že jsme vybarvili jednu část ze čtyř? Pomocí zlomku.

zápis: $\frac{1}{4}$

Vysvětlí se pak význam jmenovatele a čitatele zlomku.

V návaznosti na tyto činnosti se buduje pojem desetinný zlomek (nejprve desetiny, potom setiny), tj. zlomku, v jehož jmenovateli je některá z mocnin čísla deset.

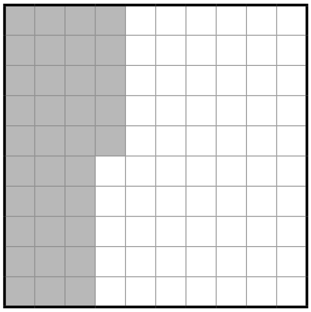
Např. žáci řeší úkol rozdělit obdélník na 10 stejných částí a jednu část vybarvit.



Jednа část je jedna desetina obdélníku, zapíšeme ji jednak pomocí zlomku $\frac{1}{10}$, jednak pomocí desetinného čísla 0,1.

Postupně vybarvujeme např. dvě desetiny, pět desetin, sedm desetin, deset desetin, dvanáct desetin obdélníku a zapisujeme jak zlomkem, tak desetinným číslem.

Analogicky vyvozujeme setiny – zvolíme čtverec (nebo obdélník), který má sto stejných čtverečků (nebo obdélníků), jeden čtvereček (obdélník) je jedna setina čtverce (obdélníku). Vhodný je čtverečkovaný papír. Vybarvujeme např. pět setin, dvanáct setin, dvacet setin, sedmdesát pět setin, sto setin atd.



Na obrázku je vyznačeno $\frac{35}{100}$ obdélníku.

Číslo $\frac{35}{100}$ zapíšeme pomocí desetinného čísla 0,35.

Podobně se učíme zapisovat další desetinná čísla, např.: $\frac{1}{100} = 0{,}01$; $\frac{5}{100} = 0{,}05$; $\frac{50}{100} = 0{,}50$; $\frac{100}{100} = 1{,}00$; $\frac{105}{100} = 1{,}05$; $\frac{120}{100} = 1{,}20$.

Tento postup usnadní pochopení desetinného čísla a jeho zápisu. Děti mívají nejčastější problémy se zápisem desetinného čísla, protože nevědí, na které místo za desetinnou čárku zapsat příslušnou číslici. Např. 0,12 chápou jako dvanáct desetin (správně 1,2), 0,012 jako dvanáct setin (správně 0,12) apod. Při porovnávání desetinných čísel se často projevuje nesprávný transfer z oboru přirozených čísel (větší číslo má ve svém zápisu větší počet číslic), takže např. 9,3 < 1,27, protože má méně číslic, podobně 0,448 > 0,45. Při porovnávání desetinných čísel má někdy dominantní postavení číslice 9 (nebo 8), např. 12,01 < 9,78.

Problémy mají děti i se zaokrouhlováním desetinných čísel. Při zaokrouhlování desetinných čísel se žáci řídí analogickými pravidly, jako při zaokrouhlování čísel přirozených, avšak jiná je situace s nulami na desetinných místech, což činí žákům problémy.

Číslo 12,97 zaokrouhlené na desetiny je 13,0, zaokrouhlené na jednotky je 13. Chybné je 13,00, neboť toto číslo by udávalo přesnost na setiny. Časté chyby žáků spočívají v tom, že pracují pouze s aktuálními řády, které mají při zaokrouhlování význam a ostatní čísla opíší, např. 7,429 zaokrouhlí na desetiny jako 7,409, číslo 248,26 zaokrouhlí na stovky jako 200,26.

## – 12 – 2 OPERACE S DESETINNÝMI ČÍSLY

Při vyvozování operací s desetinnými čísly využíváme vesměs postupů, které byly uplatňovány v oboru čísel přirozených. Přitom sledujeme, jak se při provádění pamětných operací s desetinnými čísly projevují problémy analogické problémům při počítání s čísly přirozenými:

a) děti sčítají nebo odčítají čísla nestejných řádů, např.

$0{,}2 + 0{,}03 = 0{,}5$ nebo $0{,}80 - 0{,}05 = 0{,}3$

b) nerespektují přechod mezi řády, např.

$2{,}6 + 4{,}9 = 6{,}15$ $\qquad 6{,}3 - 3{,}9 = 3{,}6$

c) zaměňují zápis čísla a operaci sčítání, např.:

$0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}33$ nebo $1{,}1 + 1{,}1 = 11{,}11$

d) nechápou podstatu poziční desítkové soustavy, např.

$0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}10$ nebo $0{,}02 + 0{,}08 = 0{,}010$

e) nepochopí podstatu násobení desetinných čísel, např.

$0{,}3 \,.\, 0{,}6 = 1{,}8$ nebo $0{,}2 \,.\, 0{,}3 = 0{,}6$

f) při písemných operacích neumí zapsat čísla správně pod sebe nebo čísla „sepisují“, např.

$$\begin{array}{l} 32{,}65 \\ +\ 8{,}\ 3 \\ \hline 110{,}68 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 81{,}3 \\ -\ 6{,}55 \\ \hline 1{,}58 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 86 \\ -\ 21{,}7 \\ \hline 65{,}7 \end{array} \quad \text{sedm sepíše}$$

g) nerespektují poziční desítkovou soustavu (např. pracují zvlášť s desetinnou částí a s celou částí čísla):

$$\begin{array}{r} 5{,}6 \\ \cdot\ 3{,}7 \\ \hline 15{,}42 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 20{,}4 \\ +\ 9{,}8 \\ \hline 29{,}12 \end{array}$$

h) odčítají „shora“ a uplatňují přechod i tam, kde není, např.:

$$\begin{array}{r} 6{,}8 \\ -\ 2{,}3 \\ \hline 3{,}5 \end{array} \quad \text{počítají } 8 - 3 = 5,\ 6 - 3 = 3$$

$$\begin{array}{r} 4{,}9 \\ \cdot\ 3{,}7 \\ \hline 97{,}73 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{počítají } 7 \cdot 9 = 63,\ 3 \text{ zapíší, } 6 + 7 = 13,\ 13 + 4 = 17,\ 7 \text{ zapíší} \\ 3 \cdot 9 = 27,\ 7 \text{ zapíší} \\ 2 + 3 = 5,\ 5 + 4 = 9 \\ \text{a dále oddělí desetinnou čárkou 2 desetinná místa.} \end{array}$$

Na několika příkladech byla ilustrována problematika provádění operací s desetinnými čísly. Další škála problémů vzniká při násobení a dělení desetinných čísel deseti, stem, tisícem a toto se pak projevuje zejména při převádění jednotek měr.

Pouhé uvedení pouček o posunu desetinné čárky nevytváří představu změny čísla (jeho zmenšení nebo zvětšení desetkrát, stokrát…). Problematika dělení desetinných čísel jak pamětného, tak písemného vyžaduje zvládnutí všech dříve probíraných operací a navíc pochopení složitějšího mechanismu než u čísel přirozených.

## – 12 – 3 REEDUKAČNÍ POSTUPY

Reedukační cvičení vyžadují stálé doplňování dříve nezvládnutého učiva a jeho aktivní uplatňování v oboru čísel desetinných:

- neustálé opakování pamětných operací s čísly přirozenými,
- posilování pochopení desetinných čísel a jejich praktického významu,
- využití grafického znázorňování,
- uplatňování zákonitostí písemných algoritmů,
- počítání s čísly nejprve v řádu desetin a setin,
- při provádění početních operací sčítání a odčítání je vhodné doplnit desetinná čísla tak, aby měla stejný počet desetinných míst,
- využívání aplikačních úloh, ve kterých pracujeme s desetinnými čísly, např. zápis sportovních výkonů žáků, zápis jejich výšky v metrech, ceny zboží aj. Pokud se přes veškerou snahu nedaří operace s desetinnými čísly zvládat, použijeme kompenzačních pomůcek, v tomto případě nejčastěji kalkulátoru. Potom je třeba dbát na správné zobrazení desetinného čísla na displeji kalkulátoru.

### Shrnutí

Desetinné číslo je jiný zápis desetinného zlomku. Desetinný zlomek je zlomek, v jehož jmenovateli je některá z mocnin čísla 10 (čísla 1, 10, 100, 1 000 atd.). S desetinnými čísly se děti setkávají velmi často v běžném životě a je třeba využít zkušeností dětí k zvládnutí učiva. K vyvození operací s desetinnými čísly se využívá operací s čísly přirozenými.

### Úkoly k samostatnému studiu

1. Sledujte, jak děti chápou pojem desetinné číslo.
2. Hledejte s dětmi co nejvíce reprezentací desetinných čísel v běžném životě.
3. Při provádění operací s desetinnými čísly vyhledávejte co nejvíce aplikačních úloh.
4. Pozorujte oblasti, ve kterých mají děti největší problémy při počítání s desetinnými čísly.

# – 13 – CELÁ ČÍSLA

*Marek je žák 8. ročníku základní školy. V pedagogicko-psychologické poradně mu byla diagnostikována dyskalkulie. Při diagnostice jeho matematických problémů bylo zjištěno, že vůbec nechápe podstatu operací s přirozenými čísly, nejsou mu jasné pojmy součet, rozdíl, součin, podíl. Nechápe čísla sudá, lichá, pojem mocniny. Nyní se má orientovat v oboru čísel celých a provádět operace s čísly celými. Největší problémy mu činila znaménka při odčítání celých čísel.*

Bylo třeba řešit základní otázky:

- Jaké postupy volit, aby byl Marek úspěšný při počítání s celými čísly, zejména s čísly zápornými.
- Jaký model záporného čísla poskytnout, aby mu porozuměl.
- Do jaké míry doplňovat učivo z nižších ročníků, které neovládá.
- Do jaké míry redukovat učivo 8. ročníku ZŠ.

## – 13 – 1 POJEM ZÁPORNÉ ČÍSLO

Se zápornými čísly se děti setkávají v běžném životě mnohem dříve, než se stanou matematickým učivem, a to např. při měření teploty, označení pater ve výtahu pod přízemím, vyznačení hladiny vody v řece apod. Východiskem ke správnému pochopení záporných čísel a jejich zařazení do systému celých čísel je vhodná motivace, která nemusí právě souviset s matematikou. Kromě zmíněné teploty a označení podzemních pater ve výtahu jde např. o historii, kdy uvádíme data před naším letopočtem, o geografii, kdy se uvádějí hloubky pod hladinou moře, dluhy ve financích aj. I když se tato čísla v praxi vyjadřují číslem přirozeným s dalším slovním vyjádřením, např. 560 let před naším letopočtem na číselné ose se znázorní jako číslo $-560$. Podobně dluh 500 Kč je znázorněn jako číslo $-500$. Také se žáci setkávají s úlohami, kdy mají odčítat větší číslo od menšího, např. $7 - 12$. Správná motivace a znázornění čísel na číselné ose může přispět k tomu, aby se žáci naučili správně chápat celá čísla a počítat s nimi. Zvládnutí učiva o celých číslech je předpokladem zvládnutí dalších matematických témat, např. algebraických výrazů, rovnic aj.

Zavedení záporných čísel je pro žáky jednou z nejnáročnějších myšlenkových činností a je třeba vyvarovat se jakéhokoliv formalismu, aby se práce se zápornými čísly neomezila jen na formální práci se znaménkem *minus*. Toto je důležité právě v souvislosti se žáky s poruchami učení. Problematice přístupů k výuce a pochopení celých čísel se věnuje např. Hejný (2004, s. 327–342).

Vhodná motivace, vhodné využití různých her a využití modelů, které žáka nejvíce osloví, přispěje k tomu, že se záporná čísla postupně zařadí do poznatkové struktury žáka. Přitom se postupně seznamuje s pojmy nezbytnými k práci s celými čísly.

V rámci numerace je potřeba, aby se žáci seznámili s pojmy: *číslo kladné*, *číslo záporné*, *číslo 0* a dále s pojmem *číslo opačné k danému číslu*. Znázorňují celá čísla na číselné ose, začnou chápat význam absolutní hodnoty celého čísla. Nejprve je třeba, aby žáci pochopili další významy znaménka „–“. Doposud pro žáky bylo znaménko „–“ jako symbol operace odčítání. Nyní se seznamují s významem znaménka „–“ k označení záporného čísla a s jeho dalším významem, kterým je označení čísla opačného k danému číslu. Zde je nejdůležitější, aby si žáci uvědomili, že opačné číslo k číslu kladnému je číslo záporné, např. opačné číslo k číslu 7 je číslo −7, opačné číslo k číslu zápornému je číslo kladné, tedy opačné číslo k číslu −7 je číslo − (−7), což je +7. Jedině v tomto případě platí mnemotechnická pomůcka, která říká, že „minus a minus je plus“, což lze interpretovat tak, že opačné číslo k číslu zápornému je číslo kladné. Vhodně se tato situace znázorňuje na číselné ose.

Z možných sémantických nebo strukturálních modelů záporných čísel respektujeme ty, kterým žák s poruchou učení rozumí. Ze sémantických modelů nabízíme záporné číslo ve významu adresy (např. teplota znázorněná na teploměru, označení podlaží pod přízemím ve výtahu, znázornění záporných čísel na číselné ose, ve významu veličiny (např. teplota, finanční model, dluhy), ve významu operátoru (např. odchylky od aritmetického průměru, operátor změny). Ze strukturálních modelů můžeme uvést výsledek odčítání většího čísla od čísla menšího.

Pro žáky s poruchami učení je vhodné jako názornou pomůcku využívat buď bílých a černých knoflíků k označení čísel kladných a čísel záporných, nebo zápisy čísel různými barvami, např. kladná čísla barvou červenou, záporná čísla barvou modrou, případně číselné osy, pokud s ní žák umí pracovat.

## – 13 – 2 POROVNÁVÁNÍ CELÝCH ČÍSEL

Porovnávání celých čísel vychází z porovnávání čísel přirozených a rozšiřuje se na čísla záporná. Zde velmi záleží na správném vyjadřování. Když se uvádí, že např. −10 °C je větší zima než −5 °C nebo 50 Kč dluhu je menší dluh než 100 Kč dluhu, pak uvedeme žáky do velkého zmatku. Porovnáváme totiž teplotu (nikoliv zimu), tedy −10 °C je menší teplota než −5 °C. Když mám dluh 50 Kč, tak mám větší aktiva, než když mám dluh 100 Kč, tedy −50 > −100. V některých případech se k porovnávání celých čísel používá číselná osa, eventuálně se využívá absolutní hodnoty celých čísel.

**Problémy**:

- žáci nemohou pochopit, že např. $-2 > -7$, $-8 < 1$,
- pokud porovnávají celá čísla na číselné ose, domnívají se, že větší číslo je znázorněno dál od nuly (počátku číselné osy), toto však neplatí v záporné části osy.

Nápravná cvičení vycházejí z porovnávání čísel přirozených, porovnávání čísel vzhledem k nule a teprve potom porovnávání kladných a záporných čísel:

| | | |
|---|---|---|
| $7 < 12$ | $24 > 15$ | $1 < 4$ |
| $0 < 8$ | $-5 < 0$ | |
| $6 > -2$ | $-7 < 7$ | |
| $-9 < -5$ | $-5 > -10$ | |

Závěr:

- Každé kladné číslo je větší než 0.
- Každé kladné číslo je větší než číslo záporné.
- Každé záporné číslo je menší než 0.
- Každé záporné číslo je menší než číslo kladné.

Pokud dětem vyhovuje znázornění čísel na číselné ose, potom je důležité respektovat, že ze dvou čísel znázorněných na číselné ose, je větší číslo znázorněno více vpravo. Při využití *absolutní hodnoty* k porovnávání záporných čísel platí, že ze dvou záporných čísel je větší to, které má menší absolutní hodnotu. Např. $-50 > -80$, $|-50| = 50$, $|-80| = 80$. Avšak pojem absolutní hodnota celého čísla je pro žáky s poruchami učení poměrně náročný.

## – 13 – 3 OPERACE S CELÝMI ČÍSLY

Problémy při provádění operací s celými čísly se jednak odvíjejí od problémů vyplývajících z operací s přirozenými čísly a navíc se připojují problémy se znaménkem minus. Proto hledáme vhodné modely, které usnadní žákům operace s přirozenými čísly. Jde např. o aktiva a dluhy ve financích, modely bílých a černých knoflíků, event. používání číselné osy.

### – 13 – 3 – 1 Sčítání celých čísel

Navazujeme na sčítání čísel přirozených a postupně volíme čísla záporná tak, aby oba sčítanci byli buď stejné parity, nebo různé.

Přitom využíváme tyto skutečnosti:

a) Součet čísla a čísla k němu opačného je roven nule:

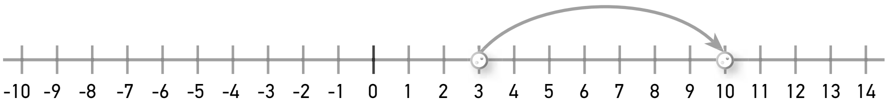
$1 + (-1) = 0$ $\quad$ $(-4) + 4 = 0$

Při znázornění pomocí knoflíků:

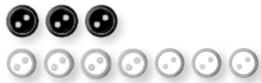
 (jeden bílý a jeden černý knoflík, který znázorňuje nulu – ruší se).

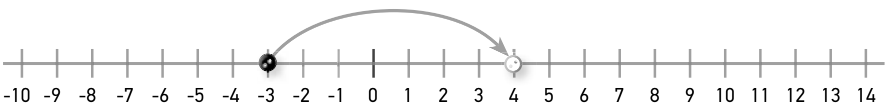
b) Při znázorňování sčítání na číselné ose se pohybujeme tak, že když přičítáme číslo kladné, pohybujeme se doprava, když přičítáme číslo záporné, pohybujeme se doleva.

$3 + 7 = 10$

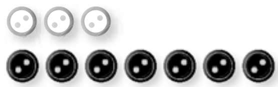


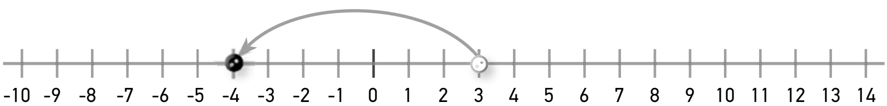

$(-3) + 7 = 4$






$3 + (-7) = -4$



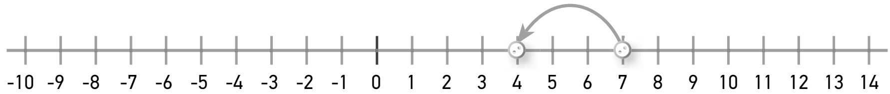



$(-3) + (-7) = -10$

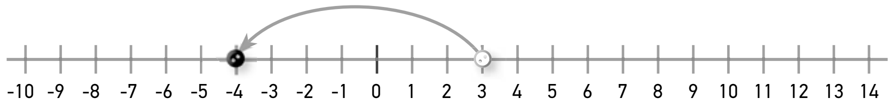

## – 13 – 3 – 2 Odčítání celých čísel

Opět vycházíme z odčítání čísel přirozených a postupujeme k číslům záporným, volíme všechny možnosti znamének menšence i menšitele. Některé příklady je možné znázornit pomocí knoflíků, některé jen na číselné ose. Při odčítání čísla kladného se na číselné ose pohybujeme zprava doleva, při odčítání čísla záporného zleva doprava.

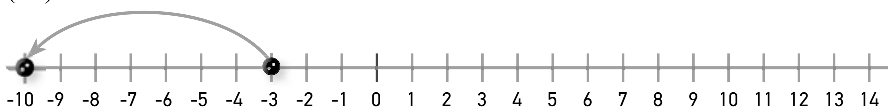
$7 - 3 = 4$



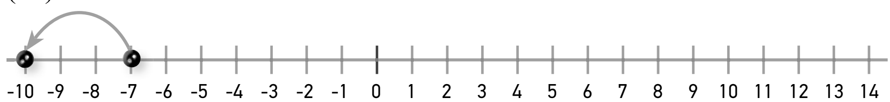

$3 - 7 = -4$



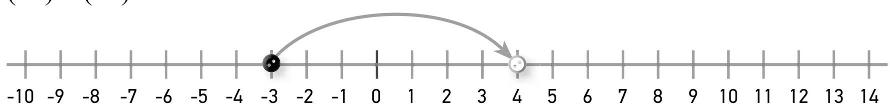

$(-3) - 7 = -10$



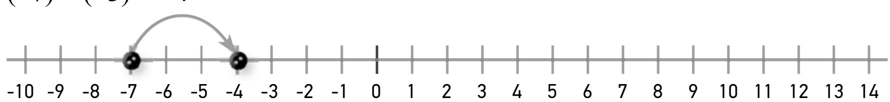

$(-7) - 3 = -10$




$(-3) - (-7) = 4$




$(-7) - (-3) = -4$




Je vhodné poukázat na souvislost sčítání a odčítání celých čísel a se žáky vyvodit, že odčítat celé číslo znamená přičítat číslo opačné, jak ukazují následující příklady:

| | | |
|---|---|---|
| $3 + 7 = 10$ | $3 - (-7) = 10$ | $7 - (-3) = 10$ |
| $3 + (-7) = -4$ | $3 - 7 = -4$ | |
| $(-7) + 3 = -4$ | $(-7) - (-3) = -4$ | |
| $(-3) + 7 = 4$ | $(-3) - (-7) = 4$ | $7 - 3 = 4$ |
| $(-3) + (-7) = -10$ | $(-3) - 7 = -10$ | |
| $(-7) + (-3) = -10$ | $(-7) - 3 = -10$ | |

## – 13 – 3 – 3 Násobení celých čísel

Vyvození násobení celých čísel je vhodné ilustrovat na konkrétních praktických příkladech, pokud to lze. Opět vycházíme z násobení čísel přirozených, dále volíme příklady, kdy je jeden činitel kladný a druhý záporný, a teprve nakonec příklad, kdy jsou oba činitelé záporní.

a) Každému z tří žáků dám 5 korun. Kolik korun budou mít dohromady?

   $3 \cdot 5 = 15$

b) Od každého ze tří žáků si vypůjčím 5 Kč. Kolik Kč budu dlužit?

   $3 \cdot (-5) = -15$

c) Vypůjčil jsem si tři koruny od pěti žáků. Jaký je můj dluh?

   $(-3) \cdot 5 = -15$

d) Formulovat praktický příklad násobení, kdy jsou oba činitelé záporní, je obtížné. I v historii bylo obtížné pochopit, že součin dvou záporných čísel je číslo kladné. Proto volíme matematický přístup. Z několika možných se pro žáky s poruchami učení osvědčilo využít funkčního myšlení. Jedná se o součiny, kdy postupně měníme jednoho činitele a sledujeme, jak se mění součin. Vycházíme ze známého příkladu:

| | |
|---|---|
| $(-3) . 5 = -15$ | |
| $(-3) . 4 = -12$ | součin je o 3 větší |
| $(-3) . 3 = -9$ | součin je o 3 větší |
| $(-3) . 2 = -6$ | součin je o 3 větší |
| $(-3) . 1 = -3$ | součin je o 3 větší |
| $(-3) . 0 = 0$ | součin je o 3 větší |
| $(-3) . (-1) = 3$ | součin je o 3 větší |
| $(-3) . (-2) = 6$ | součin je o 3 větší atd. |

Protože se první činitel nemění, druhý činitel se postupně po jedné zmenšuje, součin se stále zvětšuje o 3. Induktivní metodou dospějeme k poznatku, že při součinu dvou čísel, pokud mají oba činitelé stejné znaménko, součin je kladné číslo, pokud mají různá znaménka, součin je záporný. Tato zkušenost se zobecňuje pro součin více činitelů. Pokud je počet záporných činitelů sudý, součin je kladný, pokud je počet záporných činitelů lichý, součin je záporný. Další možnosti vyvození násobení celých čísel jsou uvedeny např. v Blažková (2006).

## – 13 – 3 – 4 Dělení celých čísel

Analogicky, jak vyvozujeme násobení celých čísel, přistupujeme i k vyvození dělení celých čísel. Můžeme volit konkrétní aplikační příklady, nebo využít souvislosti násobení a dělení.

a) Patnáct korun rozdělím mezi tři žáky. Kolik korun bude mít každý žák?

$15 : 3 = 5$

b) Dlužím celkem 15 Kč třem žákům. Kolik Kč dlužím každému z nich?

$(-15) : 3 = -5$

c) Dlužím celkem 15 Kč, vypůjčoval jsem si po třech korunách. Kolika žákům dlužím?

$(-15) : (-3) = 5$

d) Příklad $15 : (-3) = -5$ nemá vhodnou praktickou aplikaci, takže můžeme využít souvislosti násobení a dělení. Jestliže platí $(-3) \cdot (-5) = 15$, pak

$15 : (-3) = -5$ a $15 : (-5) = -3$

Pokud žáci zvládnou pamětné operace s celými čísly, je to první krok, neboť toto učivo budou aktivně uplatňovat při počítání s číselnými výrazy, s rovnicemi, při úpravách algebraických výrazů apod. Proto je třeba neomezovat se jen na pamětné uplatňování pouček (např. znaménková schémata), ale na pochopení učiva na základě solidního vyvození a uvědomělé provádění operací. Pouhé uplatňování pravidel při počítání s celými čísly žákům nestačí. Je třeba řádně vyvodit celá čísla, zejména záporná v jejich významu (pochopení bylo složité i v historii), poskytnout žákům dostatek modelů tak, aby nastal AHA efekt. Znovu připomínáme, že žáci s dyskalkulií mají inteligenci v pásmu průměru až nadprůměru, a proto vyvození vyžadují a pochopí. Proces výuky celých čísel je dlouhodobý a mělo by se neustále využívat každé situace, která přispívá k ukotvení tohoto náročného pojmu.

## – 13 – 4 REEDUKAČNÍ POSTUPY

Metody práce, kdy učitel podává informace a žák je má pouze reprodukovat, nevedou v tomto případě k cíli. Jediná cesta k úspěchu vede přes vlastní činnost žáka, kdy prostřednictvím řešení situací, které žáka osloví a kterým rozumí, postupně přichází k pojmu celého čísla a zejména čísla záporného. Osvědčuje se série her – např. počítání kladných a záporných bodů při hře, deskové hry jako lota, domina, pexeso, křížovka se samokontrolou, které jsou popsány v publikaci Blažková a kol. (2007).

### Shrnutí

Pochopení pojmu záporné číslo vyžaduje mnoho reprezentací, které dítě osloví. Vhodné je využívat mezipředmětových vztahů (dějepis, zeměpis, fyzika, biologie apod.), tj. oblastí, které mohou být centrem zájmu dětí. Správné pochopení operací s celými čísly usnadní dětem práci v dalším učivu, zejména při úpravách algebraických výrazů a řešení rovnic.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Kterých modelů pro motivaci k zavedení záporných čísel považujete za vhodné pro děti s dyskalkulií?
2. Sledujte problémy, které se projevují v chápání záporných čísel a jejich porovnávání.
3. Hledejte vhodné motivační úlohy k vyvození operací s celými čísly.

# – 14 – ZLOMKY

*Vojta dostal za úkol rozdělit kruh na tři stejné části. Neustále kreslil rovnoběžné úsečky, nemohl pomocí tohoto postupu tři stejné části kruhu určit a nebyl schopen se od jednoho modelu dělení odpoutat, zvolit jiný přístup k dělení kruhu. Čokoládu, která byla rozdělena na obdélníčky, rozdělit na tři stejné díly dokázal. Zlomek jako číslo nechápal. Při sčítání zlomků sčítal vždy čitatele s čitatelem a jmenovatele se jmenovatelem. Poměrně dlouhou dobu potřeboval „návodné“ příklady, počítal podle vzoru, reedukační cvičení obsahovala příklady s řešenými vzorovými úlohami, na kterých sledoval postup řešení. Po tomto delším nácviku pochopil princip operací se zlomky a jednou řekl: „Neříkejte mi, jak to je, chci na to přijít sám.“ Co víc si může učitel přát?*

Představy žáků o zlomcích se vytvářejí v poměrně dlouhém časovém úseku, vyžadují delší období než proces vytváření čísel přirozených. Jestliže pojem přirozené číslo se vytváří zhruba od dvou až tří roků do šesti roků, pojem zlomek je vytvářen asi od čtyř roků téměř do 15 roků. Rozložení budování pojmu zlomky do několika časových etap je z psychologického i didaktického hlediska nutné. Zpočátku souvisejí zlomky s dělením celku na části, tedy vytvářením pojmu zlomky jako části celku. Tato etapa probíhá v průběhu 1. stupně základní školy až do 6. ročníku (kolem 12. roku žáka). V 7. ročníku teprve probíhá systematický kurs výuky zlomků. Rozčlenění budování pojmu zlomek do etap by mělo být preferováno před postupem, kdy se žáci seznámí s jednorázovou definicí zlomku (kdy se žáci seznámí pouze formálně se zlomkem a základními pojmy čitatel, jmenovatel, zlomková čára, tedy formou zápisu zlomku) a poskytuje dostatečný čas k potřebné abstrakci, aby žáci chápali pojem zlomky jako racionální čísla. Se zlomky ve významu racionálních čísel pak žáci provádějí příslušné operace.

Pojem zlomek se tedy vytváří ve třech významech:

- zlomek jako část celku,
- zlomek jako reprezentant racionálního čísla,
- zlomek jako naznačené dělení.

Na prvním stupni se žáci dále mohou seznámit v souvislosti s výukou dělení přirozených čísel s významem zlomku jako operátorem, např. úlohu: „z 24 žáků jedna čtvrtina hraje házenou“ počítají 24 : 4 = 6. Podobně se pracuje s jednotkami měr, např. jedna desetina metru je 1 decimetr, jedna čtvrtina hodiny je 15 minut aj.

## – 14 – 1 ZAVEDENÍ POJMU ZLOMEK

Při budování pojmu zlomek jako části celku vycházíme vždy z praktických činností, překládání papíru, vybarvování, vystřihování, rozdělováním koláče, pizzy, čokolády apod. Modely pro práci žáků jsou nejčastěji obdélník, kruh, úsečka, event. trojúhelník a některé mnohoúhelníky. Na základě mnoha experimentálních zkušeností se žáci postupně seznamují s tím, že nezáleží na tom, jaký celek se rozděluje a jakou má velikost, ale na tom, na kolik stejných částí se celek dělí a kolik z nich uvažujeme. Výklad je názorný a každému žákovi bychom měli dopřát tolik času, kolik k pochopení pojmu zlomek potřebuje.

Na základě konkrétních činností žáci zjišťují, že každé přirozené číslo můžeme zapsat jako zlomek se jmenovatelem jedna, a že nula nemůže být ve jmenovateli zlomku. Pokud se zanedbá toto období, je velmi obtížné pokračovat v dalším učivu.

Činnosti k chápání zlomku a racionálního čísla jako třídy navzájem ekvivalentních zlomků spočívají např. v překládání papíru tvaru obdélníku nebo kruhu. Žáci řeší zadání: Přeložte papír (obdélník, čtverec, kruh) na dvě stejné části. Jednu část vybarvěte a dále překládejte papír vždy na dvě stejné části. Postupně se seznamují s tím, že jedna polovina se může vyjádřit jako dvě čtvrtiny nebo čtyři osminy, atd.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32}$ ... atd. Podobně mohou zjistit: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{6}{18}$... atd.

Z této činnosti lze pak vyvodit krácení a rozšiřování zlomků. Rozšiřování zlomků je násobení čitatele i jmenovatele stejným číslem různým od nuly, krácení zlomků je dělení čitatele i jmenovatele stejným číslem, různým od nuly. Zde mohou mít žáci problémy s rozlišováním tří různých pojmů a operací:

1. Rozšiřování zlomků, např. $\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$
2. Násobení zlomku přirozeným číslem, např. $3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
3. Zápis smíšeného čísla pomocí nepravého zlomku, např. $3\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{11}{3}$

Poznamenejme, že nepravý zlomek je zlomek, jehož čitatel je větší než jmenovatel.

Protože mnoha žákům tyto různé pojmy splývají a nejsou schopni je rozlišit, je nutné každý poznatek důkladně vysvětlit a naučit žáky na názorných příkladech rozlišovat, o kterou z uvedených situací se jedná.

Krácení zlomků má význam při operacích se zlomky, zejména když je vysloven požadavek, aby výsledek operace byl vyjádřen zlomkem v základním tvaru. Zlomek v základním tvaru je zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou čísla nesoudělná.

## – 14 – 2 POROVNÁVÁNÍ ZLOMKŮ

Porovnávání zlomků je podstatně náročnější než porovnávání přirozených čísel. Opět se vychází ze znázornění na modelech, avšak je třeba v poměrně krátké době přejít k porovnávání zlomků jako čísel. Při práci se žáky s poruchami učení je vhodné pracovat systematicky v metodické řadě příkladů.

a) Porovnáváme zlomky se stejným jmenovatelem: $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$

b) Porovnáváme zlomky, u kterých je jeden jmenovatel násobkem druhého a využijeme rozšiřování zlomků, např.:

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{5}{8}$$

c) Porovnáváme zlomky, jejichž jmenovatelé jsou čísla nesoudělná, např.:

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{4}{7}$$

d) Porovnáváme zlomky, jejichž jmenovatelé mají společného dělitele, např.:

$$\frac{5}{8} \qquad \frac{7}{12}$$

V případech b) a c) hledáme nejmenší společný násobek čísel zapsaných ve jmenovatelích zlomků.

Podle specifických potřeb žáků můžeme nabídnout několik možností k porovnávání zlomků:

a) Zápis zlomků pomocí sobě rovných jmenovatelů, rozšířením nebo krácením zlomků (viz výše).

b) Použití šipkového pravidla. Platí $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ právě když je $ad > bc$. Šipkou se znázorní postup součinů – šipka se znázorní od $d$ k $a$ a od $b$ k $c$.

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{c}{d}$$

c) S využitím číselné osy. Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší to, jehož obraz je víc vpravo.

d) Zápis zlomků pomocí desetinných čísel, např. $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{3}{10} = 0{,}3$

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{10}$$

## – 14 – 3 OPERACE SE ZLOMKY

### – 14 – 3 – 1 Sčítání a odčítání zlomků

Sčítání a odčítání zlomků vyžaduje opět motivační úlohy a rozmyšlený postup, aby nedocházelo k formalismu a v jeho důsledku chybám žáků. Problémem bývá nalézt společný jmenovatel zlomků, které sčítáme nebo odčítáme, což je nejmenší společný násobek daných čísel. Pro žáka s poruchami učení je vhodné pracovat nejprve se zlomky kladnými. Proto je vhodný postup:

a) Sčítáme a odčítáme zlomky se stejným jmenovatelem, např.

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \qquad \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

b) Sčítáme a odčítáme zlomky, jeden jmenovatel je násobkem druhého, např.

$$\frac{7}{12} + \frac{4}{3} = \frac{7}{12} + \frac{16}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$$

c) Jmenovatelé zlomků jsou čísla nesoudělná, společný jmenovatel je součin čísel zapsaných ve jmenovatelích, např.

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$$

d) Jmenovatelé zlomků jsou čísla soudělná, společný jmenovatel je nejmenší společný násobek čísel zapsaných ve jmenovatelích zlomků, např.:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{9}{24} + \frac{10}{24} = \frac{19}{24}$$

Obecně: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$,

analogicky pro odčítání $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

### – 14 – 3 – 2 Násobení zlomků

Při vyvození násobení zlomků uvádíme v návaznosti na násobení přirozených čísel nejprve násobení zlomku přirozeným číslem: $3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

Při násobení zlomku přirozeným číslem násobíme tímto číslem čitatel zlomku.

Obecně: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$, $c \neq 0$

Následně vyvozujeme násobení zlomku zlomkem. Můžeme využít motivačních příkladů, např.:

Z tabule, která má obsah 1 m$^2$, vystřihneme obdélník, jehož délka je $\frac{2}{5}$ m a šířka $\frac{3}{4}$ m. Jaký bude obsah obdélníku?

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

Obecně: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

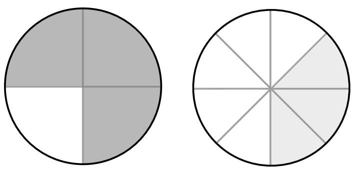
Zlomek násobíme zlomkem tak, že součin čitatelů lomíme součinem jmenovatelů daných zlomků. Přitom, pokud je to možné, využíváme vhodného krácení zlomků.

### – 14 – 3 – 3 Dělení zlomků

Pro pochopení dělení zlomků bez formálního uvedení poučky je třeba postup výuky rozdělit do několika etap. Nejprve dělíme zlomek číslem přirozeným, poté přirozené číslo zlomkem a teprve potom dělíme zlomek zlomkem. Využijeme souvislosti operací dělení a násobení.

a) Dělení zlomku číslem přirozeným můžeme ilustrovat na obrázcích, např. na obrázku kruhu.

$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$



Protože při násobení zlomků platí $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, můžeme usoudit, že $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$

Na základě induktivního postupu postupně poznatek zobecňujeme.

b) Pro dělení přirozeného čísla zlomkem využijeme např. motivačního příkladu:

Pět litrů moštu rozdělujeme do skleniček po jedné čtvrtině litru.
Kolik skleniček naplníme?

| Počet litrů | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Počet skleniček | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |

$5 : \frac{1}{4} = 20$ protože platí $5 \cdot \frac{4}{1} = 20$, usoudíme, že $5 : \frac{1}{4} = 5 \cdot \frac{4}{1}$

c) Dělení zlomku zlomkem

Láhev minerálky o objemu $\frac{3}{4}$ litru rozdělujeme do skleniček po jedné čtvrtině litru. Kolik skleniček naplníme?

Můžeme provést úvahu: jedna sklenička ...... jedna čtvrtina litru minerálky
dvě skleničky ......... dvě čtvrtiny litru
tři skleničky ........... tři čtvrtiny litru

tedy $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$, s využitím poznatků o násobení pak ilustrujeme postup při dělení zlomku zlomkem:

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = 3$$

Zlomek dělíme zlomkem tak, že první zlomek násobíme zlomkem převráceným. Převrácený zlomek k danému zlomku dostaneme tak, že ve zlomku zaměníme čitatele a jmenovatele.

Obecně: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

### Shrnutí

Pojem zlomku jako části celku je třeba dostatečně zvládnout a prostřednictvím manipulativních činností postupně přecházet k pochopení zlomku jako reprezentanta racionálního čísla, tj k pochopení např. čísla $\frac{1}{2}$. S dětmi s dyskalkulií pracujeme zpravidla s jednoduššími zlomky a operace provádíme většinou pouze se dvěma zlomky.

### Úkoly k samostatnému studiu

1. Sledujte, jak se u dětí postupně vytváří pojem zlomek.
2. V kterém období se dítě odpoutává od předmětných představ zlomku jako části celku a chápe zlomek jako číslo?
3. Vytipujte hlavní problémy, které se u konkrétního žáka vyskytují při provádění jednotlivých operací se zlomky.

## – 14 – 4 NAVAZUJÍCÍ TÉMATA

Znalost výše uvedeného učiva je předpokladem k úspěšnému zvládání dalšího učiva druhého stupně, zejména témat Dělitelnost v oboru přirozených čísel, Procenta, Poměr, Výpočty v geometrii a další. Tato témata vyžadují schopnost uplatnit získané poznatky z počítání s přirozenými čísly v jiných situacích.

Aby žák mohl pracovat s procenty, měl by mít zvládnuty operace s desetinnými čísly, operace se zlomky. Jedno procento se uvádí jako jedna setina daného základu – celku a může být vyjádřeno jak zlomkem, tak desetinným číslem. Výpočet procentové části, základu nebo počtu procent se provádí různými metodami (výpočtem přes jedno procento, pomocí trojčlenky, pomocí vzorců), k výpočtům se mohou využít buď čísla desetinná, nebo zlomky a každý žák má možnost využít těch metod a způsobů zápisů, kterým nejlépe rozumí.

Např. 28 % z 500 mohou počítat buď

$$500 \,.\, 0{,}28 \qquad \text{nebo} \qquad 500 \cdot \frac{28}{100} \qquad \text{nebo} \qquad 28 \cdot \frac{500}{100}$$

Nejčastější problémy mají žáci s tím, že nechápou, že procenta se vždy váží k nějakému základu a bez něj nemá tento údaj smysl. Z toho potom vyplývají chyby typu

$3\ \% \cdot 5\ \% = 15\ \%$ přitom správně je $0{,}03 \cdot 0{,}05 = 0{,}0015$

V návaznosti na počítání s procenty se žáci seznamují se základy finanční matematiky a prostřednictvím čísel se tak může rozvíjet jejich finanční gramotnost.

## – 14 – 5 FINANČNÍ GRAMOTNOST

V současné době se jako aktuální téma ve společnosti jeví požadavek zvyšování finanční gramotnosti obyvatelstva. Vzhledem k tomu, že osoby se specifickými vzdělávacími potřebami patří mezi nejvíce ohrožené na trhu financí, uvádíme možnosti, jak přispívat ke zvyšování finanční gramotnosti těchto osob. Přitom rozvíjení finanční gramotnosti není možné bez dobré úrovně gramotnosti čtenářské a matematické.

Nejprve prezentujeme několik problémů osob, které se na nás obrátily o pomoc v době svého středoškolského vzdělávání (SOU, SOŠ, gymnázium), kdy měly velké problémy s matematikou a u některých byla až v této době diagnostikována dyskalkulie. Jména jsou vymyšlená.

1. Jarmila se vyučila kadeřnicí, v odborném výcviku byla výborná, zúčastňovala se úspěšně kadeřnických soutěží. Na středním odborném učilišti potřebovala pomoc při studiu matematiky, na základní škole jí byla diagnostikována dyskalkulie. „Na zařízení provozovny kadeřnictví, kosmetiky, pedikúry jsem si vzala hypotéku. Zaskočilo mě, že příjmy vůbec nepokrývají náklady (nájemné, nákup prostředků) i neustálé zvyšování cen za energie, vodu, zvyšování daní. Když zvýším ceny za služby, asi se sníží počet zákaznic a zákazníků.“ Potřebná vyúčtování jí dělá manžel, k výpočtům daní využívá služeb daňového poradce. „Kdo mi poradí, jak se z této situace dostat, abych nemusela s podnikáním skončit?“

2. Jana studovala gymnázium s výborným prospěchem, až na matematiku. S matematikou měla značné problémy, ale díky její houževnatosti, nasazení a odborné pomoci se jí podařilo dostudovat. „ Zůstala jsem sama se třemi dětmi, bývalý manžel neplatí alimenty. Bydlíme v podnájmu, pokud budu mít zaměstnání, snad se nějak skromně uživíme. V případě, že bych práci ztratila, vůbec nevím, jak bych situaci řešila. Nezbývají mi finanční prostředky na vytvoření jakékoliv rezervy pro nenadálé případy.“

3. Jiří, který od základní školy řešil problémy s dyskalkulií, pracuje jako seřizovač strojů. „Chtěli jsme si po mnoha letech užít dovolenou u moře. Něco jsme měli ušetřeno, ale na zaplacení celého zájezdu pro 2 dospělé a 3 děti to nestačilo. Se žádostí o půjčku v bance jsme neuspěli, využili jsme tedy lákavou nabídku z novin od společnosti s honosným názvem. Dostali jsme nabídku půjčky 25 000 Kč se solidním úrokem s tím, že složím zálohu 5 000 Kč. Smlouvu jsem podepsal. Žádné peníze jsem nedostal, záloha propadla a navíc po mě společnost požadovala další sankce za údajné porušení smluvních podmínek, kdy využili nesmyslného důvodu. Z dovolené není nic, peníze nemám, společnost mi začala hrozit exekucí. Rozhodl jsem se podat trestní oznámení pro podvod. Ale smlouvu jsem podepsal.“

4. Jaroslav: „Při jízdě autobusem jsem neměl platnou jízdenku a byl jsem přistižen revizorem. Neměl jsem u sebe dostatek peněz na pokutu, takže jsem ji měl zaplatit do určitého data v dopravním podniku. Na celou situaci jsem zapomněl a za nějakou dobu mi přišlo oznámení, že dlužím mnohonásobně víc, než činila pokuta a že mi hrozí exekuce. Dopravní podnik přenechal dlužníky vymahačské firmě a ta nikoho neupozorní včas, že má zaplatit.“

5. Jan: „Hledal jsem práci a oslovila mě lákavá nabídka v novinách s telefonním číslem. Po zatelefonování jsem dostal běžné informace od spojovatelky s tím, že mi nabídla přepojení na odpovědnou osobu. Již neřekla, jaký tarif bude mít tento hovor. Práci jsem nezískal a vyúčtování poplatku za telefon v příštím měsíci bylo 12 690 Kč.“

6. Jitka: „Naletěla jsem nabídce prodeje mimořádného nádobí za mimořádné ceny (později jsem zjistila, že v běžných obchodech stojí podobné zboží desetinu jimi požadované částky). Prodejní akce byla spojena s prezentací, malým pohoštěním, slíbeným dárkem a výhrami. Avšak při výběru zboží byla sepsána smlouva s tím, že první tři měsíce nebudu platit nic a potom 600 Kč měsíčně. V místnosti bylo šero, smlouva měla mnoho stran, prezentace trvala dlouho, kdo podepsal, zboží sice dostal, ale pak je zaplatil několikanásobně více. Z podpisu na smlouvě, údajně o výhře, se stal podpis na kupní smlouvě, závazek zaplatit ihned 30 000 Kč nebo splácet 50 000 Kč po dobu 5 let (údajně bez dalších poplatků). Zmíněná instituce má po právní stránce smlouvy tak dokonale zajištěné, že není možné je vypovědět a oklamaný občan musí platit.“

7. Julie: „Od školních let jsem měla problémy s počítáním a před pěti lety jsem ušetřila 50 000 Kč. Na radu finančního poradce jsem je investovala do podílových fondů, avšak, jak jsem až dnes zjistila, tak fondů nezajištěných. Po pěti letech jsem chtěla peníze zpět, ale bylo mi řečeno, že dostanu jen 24 000 Kč. Nyní vidím, že rada finančního poradce o výnosech nebyla právě nejlepší.“

8. Jonáš: „Pracoval jsem ve stavební firmě a vydělával poměrně dost peněz. Rozhodl jsem se stavět dům, ale musel jsem si vzít hypotéku. Jako člověk s dyskalkulií jsem si včas nespočítal veškeré náklady. Netušil jsem, jaké splátky a poplatky budu muset měsíčně splácet, kromě úroku. Nyní jsem ztratil zaměstnání a dostal jsem se do problému. S dluhy se musí umět žít.“

## – 14 – 5 – 1 Problematika chování osob se specifickými poruchami učení na finančním trhu

Jaké informace by měl občan se specifickou poruchou učení (ale i ostatní občané) znát a s kterými pojmy by se měl seznámit, aby se na finančním trhu nedostával do problémů?

V současné době se téměř každý člověk zamýšlí nad tím, jak nakládat s finančními prostředky, které má k dispozici. Zda mu stačí na pokrytí životních nákladů, nebo může vytvářet rezervy. Zpravidla se seznamuje s nabídkami peněžních ústavů (spořitelen, bank, pojišťoven) a buď své prostředky ukládá, nebo si peníze půjčuje. V každém případě je třeba velmi podrobně zvažovat všechna úskalí, která jsou s jednotlivými nabídkami a transakcemi spojena. Za posledních patnáct roků se podstatně snížily úrokové sazby, které poskytují finanční domy, v některých případech jsou úroky z uložených peněz velmi nízké, avšak úroky z úvěrů jsou mnohem vyšší a poplatky v peněžních ústavech za prováděné transakce jsou poměrně vysoké. Je třeba vést občany k tomu, aby se řádně seznamovali s nabídkami, zejména v případě půjček, a byli schopni předem zjistit všechny podmínky, za kterých je půjčka poskytována (velmi dobře číst smlouvy, než je podepíší). V oblasti finanční gramotnosti se řeší ještě mnoho dalších situací.

V rámci celoživotního vzdělávání je třeba zvyšovat povědomí občanů o situaci na finančním trhu a o chování spotřebitelů a jejich právech a povinnostech, zvyšovat úroveň práce s informacemi, učit občany třídit informace, kriticky je posuzovat, poukázat na nebezpečí, které hrozí občanům s nízkou finanční gramotností. Občané by se měli orientovat na finančním trhu jak v případě, že finanční prostředky mají, tak v případě, že jich nemají dostatek. Přitom mohou mít problémy i osoby bez specifických poruch učení, avšak tím spíše osoby, které trpí dyslexií nebo dyskalkulií.

Při výchově žáků i občanů by bylo třeba zamyslet se nad výchovou k **pozitivní finanční gramotnosti,** která souvisí také s morálním aspektem. Pozitivně gramotný člověk se chová tak, že ostatní občany vědomě nepoškodí, neošidí, nepodvede.

Neposkytuje neúplné nebo částečné informace, či dokonce nepravdivé informace i za cenu, že transakcí sám nevydělá mnoho peněz.

Několik zásad pro chování v oblasti financí formuloval Prouza (2011):

- Ve financích neexistuje výnos bez rizika.
- Finančně negramotní budou vždy platit zbytečně a hodně.
- Zodpovědné plánování financí je vždy o ochotě stanovit si priority a odvaze přiznat si, že může být hůře.
- Je třeba učit se vyjednávat, ptát se a nestydět se zpochybnit zdánlivou autoritu finanční instituce.
- Ostré lokty snad vydělají peníze, ale připraví vás o dobré lidi okolo sebe.

V úvahu je nutné vzít i matematickou podstatu celé situace. Aby byl občan finančně gramotný, předpokládá to, že je také gramotný v oblasti čtenářské a matematické. Občan by měl mít dostatečně rozvinutou *čtenářskou gramotnost*, tj. umět číst s porozuměním texty, zejména ty, ve kterých se vyskytují číselné údaje, a v případě nepochopení textu by měl být schopen dotázat se. Měl by mít rozvinutou *matematickou gramotnost*. Aby byl finančně gramotný, měl by umět mimo jiné počítat s procenty. Aby uměl počítat s procenty, musí umět počítat se zlomky a desetinnými čísly. Aby uměl počítat s racionálními čísly, musí umět počítat s čísly přirozenými. Přitom výpočty by měly být správné a přesné. Navíc by měl mít schopnost provádět odhady, mít představu o vztazích mezi čísly, provádět jednoduché úpravy algebraických výrazů, chápat rostoucí a klesající funkce a posloupnosti apod. Tyto dovednosti by měl rozvíjet neustále v rámci svého celoživotního vzdělávání. Pokud sám nezvládá situace související s finančními transakcemi, měl by mít ve svém okolí důvěryhodného člověka, který mu poradí. V každém případě by se měl poučit z předchozích nepříznivých událostí.

Jaké nebezpečí hrozí lidem, u kterých byly diagnostikovány specifické poruchy učení:

- Podepisují smlouvy, aniž by si je řádně přečetli a porozuměli jim v plném rozsahu. Nejsou seznámeni se sankcemi při předčasném vypovězení smlouvy.
- Jsou příliš důvěřiví, nechají se snadno ovlivnit příjemným chováním, podávané informace neověřují. Své peníze svěří podvodníkům.
- Nejsou schopni posoudit svoje příjmy a výdaje a nakládat s nimi tak, aby si vytvářeli, byť minimální, rezervy.
- Neberou v úvahu možnost změny životní situace (nemoc, ztráta zaměstnání) a potřebu finančního zajištění pro tyto případy.
- Neorientují se v pojmech finanční matematiky (např. RPSN), neumí pracovat s informacemi.
- Neberou v úvahu neustálý růst životních nákladů, zejména náklady na bydlení a energie, daně.

- Při ztrátě zaměstnání nemají finanční rezervu a octnou se ve finanční tísni.
- Uzavírají tzv. „výhodné půjčky“, většinou mimo peněžní ústavy, které slouží k pokrytí nenadálých životních nákladů nebo ke splnění snů o lepším životě.
- Nejsou seznámeni se sankcemi za nedodržení smluvních podmínek.
- Uzavírají hypotéky na podnikání, avšak výnosy z podnikání nepokrývají náklady.
- „Naletí“ anonymním nabídkám na rychlou půjčku nebo nabídkám půjček či zaměstnání po telefonu.
- Při uzavírání úvěrů nepočítají s dalšími poplatky finančních ústavů.
- Neorientují se v praxi exekutorů, vymahačů dluhů a jim podobných agentur a institucí.
- Podléhají spekulacím lichvářů, kterým nejde o splátky půjčených peněz, ale o majetek dlužníka.
- Nechápou princip směnek a způsobů nakládání s nimi.
- Neplatí zdravotní a sociální pojištění.
- Neznají práva a povinnosti spotřebitelů, nevědí o existenci poradny pro pomoc v dluhové pasti a seriózních institucí, které by jim v této oblasti pomohly.

### – 14 – 5 – 2 Složky finanční gramotnosti

**Finanční gramotnost** je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní a rodinný rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků. (*Národní strategie finančního vzdělávání*, 2010).

Finanční gramotnost obsahuje složky:

*Peněžní gramotnost* – zahrnuje kompetence pro správu hotovostních a bezhotovostních peněz a správu příslušných nástrojů (běžný účet aj.).

*Cenovou gramotnost* – obsahuje kompetence pro porozumění cenovým mechanismům a inflaci.

*Rozpočtovou gramotnost* – obsahuje kompetence pro správu osobního a rodinného rozpočtu a zvládání různých životních situací z finančního hlediska, kompetence pro správu finančních aktiv (např. vkladů, investic, pojištění) a správu finančních závazků (např. hypoték, úvěrů, leasingu apod.).

**Úrokování jednoduché**

Velmi potřebné je seznámit se s pojmy, které se v rámci nakládání s finančními prostředky vyskytují a souvisejí s procentovým počtem:

*Jistina* – částka, která byla vložena do peněžního ústavu nebo byla půjčena občanovi – značí se $J$ a odpovídá základu v procentovém počtu.

*Úroková míra* – udává výši úroku za určité období – značí se $p$ a odpovídá počtu procent.

*Úroková sazba* – je počet procent úrokové míry vyjádřený desetinným číslem nebo desetinným zlomkem, značí se $i$.

*Úrok* – je částka v korunách, kterou obdrží věřitel po uplynutí určité doby, značí se $u$ a odpovídá procentové části.

*Úrokovací doba* – je časový úsek, po který je jistina uložena v peněžním ústavu, značí se $t$. Může být vyjádřena počtem roků nebo počtem měsíců ($m$) nebo počtem dnů ($d$). Dle dohody má úrokovací měsíc 30 dnů, úrokovací rok 360 dnů.

*Úrokovací období* – je časový úsek, na který je vázána úroková míra. Je to doba, za kterou vzroste jistina o předem stanovený úrok. Úrokovací období může být roční (*p.a.*), pololetní (*p.s.*), čtvrtletní (*p.q.*) nebo měsíční (*p.m.*).

V současné době používají naše peněžní ústavy většinou roční úrokovací období.

Úrokovací doba a úrokovací období jsou dva různé pojmy, které nelze zaměňovat. Úrokovací doba může být 1 rok, ale i menší nebo větší než jeden rok. Pokud se částky vkládají nebo vybírají v průběhu roku, počítají se ze dvou význačných dnů, kterými jsou den vkladu a den výběru peněz, vždy jen den vložení peněz.

*Daň z úroků* – platí občané ve výši 15 % jejich hodnoty (od 1. 1. 1993), daně se zaokrouhlují na celé koruny vždy nahoru. Daně z úroků plynou do státního rozpočtu jako daně z příjmů.

*Poplatky za vedení účtu a za transakce* – stanoví peněžní ústavy podle svých podmínek. V některých peněžních ústavech se pojmy úroková míra a úroková sazba nerozlišují.

Při jednoduchém úrokování se úrok počítá v každém roce z vložené konstantní částky. Při výpočtech vystačíme se znalostmi procentového počtu.

$$u = J_0 \cdot i \cdot t$$

Kde $u$ je úrok, $J_0$ počáteční jistina, $i$ je úroková sazba, $t$ je úrokovací doba. Při jednoduchém úrokování se počítá $t = 1$.

**Složené úrokování**
Při složeném úrokování se na konci prvního úrokovacího období počítá úrok z vložené částky a na konci dalších úrokovacích období se úrok počítá z částky, která je součtem původního vkladu a již dříve připsaných úroků. Úrokovací doba je rovna alespoň dvěma celým úrokovacím obdobím. Jestliže vložíme do peněžního ústavu částku $J_0$, roční úroková míra je $p$ procent, její vyjádření desetinným číslem označujeme $i$. Pak v $n$-tém roce při 15% dani z úroků získáme jistinu $J_n = J_0 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i)^n$.

**Kombinované úrokování**
Kombinované úrokování počítá s tím, že úrokovací doba není celistvým násobkem úrokovacího období, tj. že vkladatelé ukládají a vybírají finanční prostředky kterýkoliv den v průběhu roku. Přitom se do úrokovací doby počítá den vkladu a nepočítá se den výběru peněz.

Úrokovací doba se počítá podle vztahu: $t = 30 \cdot (m_1 - m_2) + (d_1 - d_2)$ kde $m_1$ a $d_1$ je měsíc a den vkladu a $m_2$ a $d_2$ je den výběru finanční částky.

— — —

Při rozhodování o úvěrech informace o výši úroku jsou nepostačující. Celkové náklady úvěru závisí jednak na roční úrokové míře, jednak na dalších poplatcích souvisejících s poplatky za poskytnutí úvěru. Je proto nutné seznámit se s roční procentní sazbou nákladů – RPSN, která může být vysoká.

## Shrnutí

Rozvíjení finanční gramotnosti je dlouhodobý proces a mělo by prolínat výuku matematiky od prvního stupně základní školy. Žáci se postupně učí nakládat s penězi, sledovat provoz domácnosti, učí se nakupovat, porovnávat ceny zboží, různé „lákavé“ aktivity obchodů (slevy, nákupy 3 + 1 apod.). Také se učí posuzovat svá přání v kontextu s reálnými možnostmi, jaké mají představy a co je třeba k jejich uskutečnění. Se znalostmi vyššího matematického aparátu přibývají možnosti řešit úlohy s náměty finanční matematiky, zejména úlohy, ve kterých se vyskytují procenta a úrokování.

Tematika úloh by měla být volena tak, aby žáky prostřednictvím čísel upozorňovala na případné problematické situace.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Uveďte příklady situací, kterými je možné přispívat k rozvoji finanční gramotnosti žáků.
2. Vyberte několik ilustračních úloh k rozvíjení finanční gramotnosti žáků.

3. S jakými problémy bychom měli počítat při řešení úloh, ve kterých se vyskytují procenta?
4. Jak můžeme rozvíjet finanční gramotnost žáků, kteří mají problémy se zlomky a s desetinnými čísly?

## – 14 – 6 MATEMATICKÁ GRAMOTNOST

Jak bylo řečeno výše, rozvoj finanční gramotnosti není možný bez určité úrovně gramotnosti čtenářské a gramotnosti matematické.

Matematickou gramotnost lze rozvíjet od nejútlejšího věku dítěte, kdy se setkává s chápáním kvantity (předměty se vyskytují v určitém množství). Z jednotlivých zkušeností s konkrétními předměty se postupně vytváří pojem přirozené číslo a geometrický útvar, jejichž pochopení je nezbytným předpokladem pro rozvoj matematické gramotnosti. Pojmotvorný proces prochází několika etapami, z nichž jsou nejdůležitější: etapa synkretická (z množství zážitků se vyčleňuje skupina takových, které jsou asociovány s budoucím pojmem), etapa předmětných představ (pojem se diferencuje, avšak je vázán na konkrétní jevy), etapa intuitivně abstraktních představ (pojem se stává prvkem rodících se abstraktních představ), strukturální etapa (pojem se stává prvkem axiomatizované teorie) (viz např. Hejný, 1990; Piaget, 1997).

Již v předškolním věku dochází k integrovanému vzdělávání, jehož smyslem je podpora rozvoje a učení dětí. Matematické představy a jejich vytváření nejsou odděleny od ostatních každodenních činností dětí, které běžně provádějí, ale jsou s nimi úzce spojeny. Pro úspěšnost dětí v matematice je tato cesta nejoptimálnější.

Na prvním stupni ZŠ se v prvním období (1.–3. ročník ZŠ) vytvářejí základní pojmy v aritmetice i geometrii, automatizují se základní spoje jednotlivých operací s přirozenými čísly. Aplikační úlohy jsou jednoduché, vzhledem k možnostem matematického aparátu, který mají žáci k dispozici. Toto období je možné chápat jako elementární etapu rozvoje matematické gramotnosti. Ve druhém období prvního stupně (4. a 5. ročník ZŠ) se vzhledem k rozšiřování číselného oboru řeší složitější aplikační úlohy a problémy, žáci pracují s daty, sledují a vyhodnocují různé závislosti, získávají dovednosti v geometrických konstrukcích apod. Žáci mají možnost vidět účelné uplatnění matematiky v praxi. Získávají tak základní matematickou gramotnost. Avšak problémem je, že žáci často řeší úspěšně úlohy izolované, zaměřené na jednotlivé jevy. Jakmile však mají řešit úlohy komplexnějšího charakteru, které právě matematickou gramotnost vyžadují, úspěšní nejsou. Aby docházelo ke zlepšování situace v tomto směru, je potřeba změnit přístupy při řešení matematických i aplikačních úloh.

Volba tematiky zahrnuje úlohy se širokou škálou situací a kontextů, a to od úloh zaměřených čistě matematicky, až k úlohám, ve kterých není na první pohled matematický kontext patrný (tyto úlohy se využívají např. v testech mezinárodního srovnávání TIMSS). Čtení textu zadání úlohy vyžaduje čtení s porozuměním, tedy dobrou úroveň čtenářské gramotnosti. Větší pozornost je třeba věnovat analýze celého problému, při řešení preferovat metody analytické oproti metodám syntetickým. Dále je třeba vytvářet situace k tomu, aby žáci byli schopni provádět přepis jazyka českého do symbolického jazyka matematiky. Souvisí to s rozvojem komunikativních dovedností v širším smyslu (komunikace symbolická, verbálně symbolická, graficky symbolická, obrazově symbolická). Při řešení problémů je třeba sledovat matematický obsah, který je nutný k formulaci matematické podstaty problému. O řešení je třeba diskutovat, srovnat výsledek řešení matematické úlohy s realitou, co v praxi možné je a co není, i když to je výsledek matematické úlohy. Větší pozornost je třeba věnovat úlohám, ve kterých se uplatní odhady výsledků, tvorba hypotéz a jejich ověřování, řešení grafická, pomocí obrázků aj. Rozvoji matematické gramotnosti přispívá respekt učitele k žákovským řešením, i když nejsou optimální nebo zcela správná. Právě diskuse o myšlenkových postupech žáka a jejich korekce ve smyslu správných závěrů výrazně rozvíjí matematickou gramotnost.

Rozvoj matematické gramotnosti v širším kontextu zahrnuje:

- Schopnost chápat abstraktní matematické pojmy (matematické pojmy jsou abstrakcí reality). Absence správného pochopení každého pojmu počínaje číslem přirozeným neposkytuje předpoklad pro rozvoj matematické gramotnosti. Je tedy nezbytné vycházet z předčíselných představ, které umožňují pochopení určité společné charakteristické vlastnosti dané skupiny objektů a postupného přechodu od viditelných vlastností předmětů k jejich počtu (od „jaké mají vlastnosti“ k pochopení „kolik jich je“).
- Schopnost chápat vztahy mezi matematickými objekty, což je jedním z předpokladů správného pochopení vazeb mezi jednotlivými pojmy, operacemi, závislostmi, funkčními vztahy apod.
- Schopnost práce s matematickými objekty, která vyžaduje jednak pochopení (např. při vytváření čísla pět, že pět je pět kuliček bez těchto kuliček, tedy schopnost abstrakce), jednak práci se symbolickými zápisy, např. $3 + 2 = 5$, $2x + 4 = 20$.
- Schopnost matematizace reálné situace. Ta předpokládá vytvoření vhodného matematického modelu určité reálné situace. Přitom model může být prezentován grafickým vyjádřením, číselným výrazem, algebraickým výrazem apod.
- Schopnost využívání získaných matematických poznatků v jiných, nových situacích. Tato schopnost patří k jednomu z nejdůležitějších aspektů rozvoje matematické gramotnosti. To, že děti zvládnou např. základní spoje operací s přirozenými čísly, ještě nezaručuje, aby poznaly, kdy se určité operace používají k řešení určité třídy problémů. Jedná se zde o přenos znalostí a dovedností do nových situací.

- Aplikace matematických poznatků v praktických úlohách. Ta předpokládá jednak schopnost využít matematiku k řešení problémů z praxe, jednak schopnost vyhledávat a zpracovávat data, pracovat s různými prezentacemi (jízdní řády, diagramy, grafy aj.)
- Formulace a řešení problémů souvisí se schopností nalézt posloupnost kroků k řešení problému, schopnost provádět analýzu, kombinovat různé způsoby uvažování, propojovat jednotlivé vědomosti, zobecňovat aj. Přitom se učí hledat optimální strategie řešení problémů.

Matematicky gramotný žák využívá kreativity, vhledu, intuice, různých úrovní komunikace, funkčního myšlení, kombinačního myšlení a k rozvoji těchto schopností je třeba častých podnětů v průběhu celé školní docházky. Celá jeho činnost v matematice je provázena procesem neustálého přemýšlení a zkoumání, avšak při určité úrovni zvládnutí potřebných matematických vědomostí. Děti vedeme k formulování myšlenek svými vlastními slovy, přitom však respektujeme požadavky na přesnost matematického vyjadřování. Řešíme úlohy, ve kterých děti hledají určitá pravidla (řady, přiřazování), odvozují obecně platná pravidla, vyslovují hypotézy a ověřují je, využívají účelně určitých pomůcek, zejména prostředků výpočetní techniky.

— — —

Rozvoj matematické gramotnosti úzce souvisí s rozvojem čtenářské gramotnosti, neboť v matematice je nutné zvládnout čtení textu s porozuměním, čtení symbolického textu a jejich vzájemnou souvislost (přepis textu v jazyce českém do symbolického jazyka a naopak interpretování symbolického zápisu do jazyka českého). Mnoho problémů žáků vzniká tím, že nejsou schopni číst matematický text s porozuměním.

## Shrnutí

Dobrá úroveň matematické gramotnosti přispívá nejen k zvládnutí matematického učiva, ale také ke zvládání činností v běžném životě i profesi. Přispívá ke snadnějšímu rozhodování v určitých situacích a ke schopnosti vybírat z nabízených možností tu optimální. Matematická gramotnost předpokládá jednak dobrou úroveň zvládnutí matematiky v oblasti reprodukční (základní spoje operací) a zejména pak využití učiva při řešení problémových a aplikačních úloh.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Uveďte, co rozumíme pod pojmem matematická gramotnost.
2. Jakým způsobem je možné přispívat k rozvoji matematické gramotnosti žáků s SPU?
3. Jak může vztah žáka k matematice ovlivňovat úroveň jeho matematické gramotnosti?

# – 15 – ZÁVISLOSTI, VZTAHY, PRÁCE S DATY

Tematický celek *Závislosti, vztahy, práce s daty* zahrnuje, mimo jiné, rozvoj funkčního myšlení a chápání základních pojmů matematické statistiky. Poskytuje žákům možnosti realizace projektů, mezipředmětových vztahů, vyhledávání aplikací matematiky v praxi, popis situací, které souvisejí s jejich běžným životem. Dále je pro děti s poruchami učení příznivý svými možnostmi vyjádření – textem, symbolickým zápisem i graficky. Tím poskytuje těmto dětem takový zdroj komunikace, kterému nejlépe porozumí. Znázornění číselných údajů graficky, pomocí diagramů, je pro žáky více informativní než např. pouhé číselné údaje v tabulkách. Známou skutečností je, že obrázek podá o stejné situaci více informací než vyjádření pomocí slov nebo čísel.

Využívání kvantitativních údajů v nových situacích poskytuje dětem s poruchami učení příležitost využít učiva v aplikačních úlohách. Zvyšuje se tím možnost aktivní činnosti dětí podle jejich zájmu. Přitom se kromě uplatnění dříve probíraného učiva rozvíjí mnoho dalších kompetencí žáků. Především jde rozvíjení funkčního myšlení žáků.

Pod pojmem funkční myšlení rozumíme schopnost posuzovat jevy v jejich změnách, sledovat příčiny těchto změn a umět je popsat.

a) U početních operací sledovat změny výsledků operace na změnách veličin do operace vstupujících.

b) Při řešení konstrukčních úloh umět stanovit závislost výsledku konstrukce na změnách velikosti nebo polohy zadaných prvků.

c) Při sledování závislostí umět rozhodnout, zda mezi sledovanými jevy existuje vztah, který by bylo možné popsat kvantitativně.

d) Umět popsat funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem.

e) Správně chápat definiční obory a obory hodnot daných funkcí.

f) Umět vyjádřit vlastnosti daných funkcí.

g) Umět číst grafy s porozuměním.

h) Umět zobecňovat kvantitativní vztahy.

## – 15 – 1 ZÁVISLOSTI KOLEM NÁS

Předkládáme dětem různé situace, ve kterých závisí jedna veličina na druhé a přitom některé je možné vyjádřit matematickým zápisem (např. tabulkou nebo grafem), a které takto vyjádřit nelze. Uveďme některé z nich:

- závislost úspěchu ve škole na kvalitě přípravy,
- růst rostlin v závislosti na množství vody při zalévání,
- výše mzdy v závislosti na pracovním výkonu,
- cena nákupu zboží v závislosti na jeho množství,
- změna výšky a hmotnosti člověka v závislosti na jeho věku,
- změna délky dne v závislosti na ročním období,
- změna teploty ovzduší v závislosti na denním období,
- spotřeba energií v domácnosti (voda, plyn, elektrická energie) v průběhu roku,
- rozpočet domácnosti,
- závislost spotřebovaných potravin na počtu osob,
- změny kurzovních lístků,
- poštovní poplatky,
- poplatky za telefonní hovory u různých operátorů,
- závislost ujeté dráhy na době jízdy při stálé rychlosti,
- závislost doby jízdy na rychlosti při projetí určité dráhy,
- výhodnost nákupů v akcích, výhodnost množstevních slev,
- práce s jízdními řády apod.

Volíme taková témata, která jsou dětem blízká, která je osloví, o která mají zájem. Volíme častěji aplikační úlohy, které řeší žáci na několika úrovních:

- Pracují s konkrétními údaji, tabulkami, grafy, diagramy, učí se je číst a vytvářet, učí se vnímat závislosti veličin.
- Provádějí vlastní statistická řešení a postupně se prostřednictvím nich seznamují se základními pojmy matematické statistiky.
- Řeší praktické úlohy, ve kterých pracují s přímou a nepřímou úměrností, s lineární funkcí (např. řešení úloh o pohybu, úloh s dopravní tematikou).
- Řeší úlohy teoretické povahy.
- Zpracovávají projekty s tematikou závislostí v praxi.

Děti by se měly orientovat v závislostech a pochopit, kdy se jedná o přímou úměrnost (kolikrát se zvětší jedna veličina, tolikrát se zvětší druhá veličina) a kdy se jedná o nepřímou úměrnost (kolikrát se zvětší jedna veličina, tolikrát se zmenší druhá veličina).

Vzhledem k tomu, že tematika je velmi rozmanitá, že děti mohou volit to, co je zajímá, lze vhodnou organizací práce a vhodnou volbou forem práce zapojit všechny děti s poruchami učení. Můžeme se však přitom setkávat s některými problémy, např. děti obtížně rozlišují jednotlivé závislosti, pokud mají problémy s motorikou, pak mají potíže při rýsování grafů, někdy se projeví malá ochota dětí přemýšlet, některé děti často odbíhají od řešeného problému. Projevují se chyby, které mají děti při počítání s přirozenými čísly. Často z nepochopení situace čísla pouze sčítají.

> Např. v úloze: „Jeden kilogram jablek stojí 25 Kč. Zapište do tabulky, kolik Kč zaplatíte, když koupíte 2kg, 3kg, 5kg.“ Počítají 25 + 2, 25 + 3…

Objevují se problémy s jednotkami času, často děti uvádějí, že jedna polovina hodiny je 50 minut, chyby typu 5 + 40 = 90 apod. Předcházet těmto i podobným problémům ve výuce vyžaduje od učitele pečlivou a promyšlenou přípravu a neustálé opakování dříve pobraného učiva. Propedeutikou přímé úměrnosti může být využití násobilky.

> Např. Za jeden jogurt zaplatíme 8 Kč. Zapište, kolik Kč zaplatíme za 2, 3, 4, 5 stejných jogurtů.

Propedeutikou nepřímé úměrnosti může být např. využití úloh typu:

> V bedně je 60 rohlíků. Mají se rozdělit mezi 10 (15, 20, 30) dětí. Kolik rohlíků by dostalo každé dítě?

## Shrnutí

Závislosti, vztahy a práce s daty se v běžném životě vyskytují velmi často, proto je třeba dětem situace z běžného života předkládat a řešit je (i v souvislosti s jinými tématy, např. násobilkou, dělením). Proces pochopení závislostí je nezbytný k chápání pojmu funkce. Čtení údajů z grafů a diagramů je velmi důležitou znalostí využívanou v běžném životě.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Sledujte, jak děti s SPU chápou závislosti v běžném životě.
2. Uveďte několik příkladů přímé úměrnosti.
3. Uveďte několik příkladů nepřímé úměrnosti.
4. Sledujte problémy dětí se specifickými poruchami učení v oblasti chápání závislostí a vztahů mezi čísly.

# – 16 – ALGEBRA

*Sebastián je žákem 9. ročníku s diagnostikovanou dyskalkulií. Pro počítání s racionálními čísly často používá kalkulátor, a tudíž při provádění operací s racionálními čísly většinou problémy nemá. Největší problémy má při úpravách algebraických výrazů, kde mu kalkulátor příliš nepomůže. Protože měl sám velký zájem na tom, aby učivo zvládl, byly hledány cesty, aby učivo pochopil. Prvním problémem bylo pochopení písmene ve významu čísla. Dále se pro jednotlivé operace využívaly možnosti grafického znázornění, barevných vyznačení, šipek apod. Přitom se vždy zdůrazňovala a zdůvodňovala příslušná pravidla. Po individuální výuce se jeho problémy zmírnily, ale práce s obecnými čísly neustále vyžaduje od Sebastiána velké úsilí.*

## – 16 – 1 PÍSMENA VE VÝZNAMU ČÍSEL

Používání písmen ve významu čísel souvisí se schopností zobecňovat a abstrahovat. K této dovednosti přicházejí děti postupně, ne všechny ve stejném věku nebo ve stejném ročníku školní docházky. Zde se může projevit opožděný vývoj některých matematických schopností, avšak v dalším ročníku se může dohonit a děti pak zvládají učivo bez problémů. Algebraické výrazy umožňují efektivní, stručný a přesný zápis konkrétní situace, úsporné vyjadřování a ekonomizaci myšlení.

Při výuce je třeba respektovat, že pochopení písmen ve významu čísel je proces dlouhodobý a musí být učitelem promyšleně řízen. Dále je potřeba neustále zdůrazňovat, co jednotlivá písmena v zápisech výrazů znamenají, aby nedocházelo k mechanickému a formálnímu osvojování. Písmeno ve významu čísla se využívá v různých situacích (ve významu proměnné, konstanty, neznámé, speciálního označení určité veličiny aj.). Postup výuky má svá pravidla a je zpravidla uveden v učebnicích matematiky nebo didaktikách matematiky.

## – 16 – 2 PROBLÉMY PŘI PRÁCI S ALGBRAICKÝMI VÝRAZY

Motivace učiva algebry je jedním z hlavních problémů výuky algebry, neboť děti zpravidla nevidí jeho bezprostřední význam. Přitom při hlubším zamyšlení je možné zjistit, že téměř každá profese zobecňování využívá. Děti by vždy měly vědět, k čemu je dané učivo pro ně užitečné a prospěšné. Protože učitel může předpokládat určité problémy dětí, zaměřme se na některé z nich. Problémy dětí a jejich chyby při práci s algebraickými výrazy mají mnoho projevů, které můžeme rozdělit do několika skupin:

a) Chyby numerické, tj. chyby, které vyplývají z nesprávných operací s čísly přirozenými, zápornými i zlomky, např.

   $4x - 12x = 8x$ $\qquad$ $7x \cdot 8x = 54x$ $\qquad$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}$

b) Chyby vyplývající z nepochopení písmene ve významu čísla, např.:

   $a + 3b = 4$ $\qquad$ $3a - 2b = 1$

c) Chyby vyplývající z nepochopení počítání s algebraickými výrazy. Tyto chyby mohou být způsobeny:
   - formálním přístupem, kdy se děti naučí pravidla zpaměti, ale neumí je aplikovat v příkladech,
   - přenosem dyskalkulických problémů z oboru přirozených čísel do dalšího učiva, např. mocnin nebo do práce s koeficienty,
   - požíváním nesprávné strategie při řešení,
   - chybami velkých kroků, kdy provádějí současně několik úprav najednou.

   Uveďme některé konkrétní příklady chyb:

   **Počítání s mocninami**
   I když děti umí mechanicky vyjmenovat pravidla o počítání s mocninami, neumí je aktivně použít v příkladech:

   $x + x = 2x^2$

   $5x + 2x = 10x^2$

   $2x^2 + 3x^2 + x + 1 = 6x^5 + 1$

   $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^6$

   $x^6 : x^2 = x^3$

   **Operace s algebraickými výrazy**
   Děti nerozlišují např. operace sčítání a násobení:

   $a + b = a \cdot b$

   $5a + 2b = 7ab$

   $5a - 2a = 3$

   **Roznásobení dvojčlenů**
   Děti násobí první člen prvním a druhý druhým:

   $(a + b) . (c + d) = ac + bd$

   Z toho pak vyplývá chybné umocňování dvojčlenu:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - b^2$

**Lomené algebraické výrazy**
Chybné krácení ve zlomku:

$\frac{ax + b}{b} = ax$ $\frac{ax + by}{a + b} = x + y$

Chybné počítání se zlomky:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$ $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{bc}$

d) Chyby způsobené zápisem. Zápisy jsou nepřehledné, neúplné, chybí některé nedopsané znaky, nedbalý zápis cifer a písmen. Při zápisech mají velké problémy dysgrafikové.

e) Chyby vyplývající z psychiky dětí:
- malá koncentrace, roztržitost, překotná uspěchanost,
- vliv časové tísně při písemných zkouškách,
- bezradnost, tápání při řešení příkladů,
- špatný zápis dobře míněného postupu,
- bariéra „bílého papíru“, zejména při písemných pracích,
- nesprávné pochopení diktovaného zadání.

f) Chyby vyplývající z výuky, která není příznivá danému dítěti. Učitel zpravidla postupuje tak, že:
- Vyžaduje pouze svoji strategii – tato výuka vede k formalismu.
- Sděluje dětem hotové poznatky – výuka vede k verbalismu.
- Ale naopak – vyvozuje učivo za aktivní účasti dětí a objevování – výuka vede ke konstruktivismu.

Většina dětí vyžaduje spíše verbalistický přístup – „řekněte nám, jak to je a my se to naučíme“. Avšak pamětné učení, které není opřeno o pochopení, vede v tomto případě k tomu, že děti neumí použít učivo v jiných situacích. Stačí např. aby se místo písmen *a, b* použila písmena jiná, např. *x, y,* a již si neví rady. Navíc učivo brzy zapomenou.

## – 16 – 3 REEDUKAČNÍ POSTUPY

a) Využíváme postupného zobecňování, kdy se čísla postupně nahrazují písmeny, např.:

Koupím si 3 sešity po 15 Kč a 4 tužky po 7 Kč. Kolik korun celkem zaplatím?

$3 \cdot 15 + 4 \cdot 7$

Koupím si 3 sešity po $a$ Kč a 4 tužky po $b$ Kč. Kolik korun zaplatím?

$3a + 4b$

Koupím si $x$ sešitů po $a$ Kč a $y$ sešitů po $b$ Kč. Kolik korun zaplatím?

$xa + yb$

b) Doplňujeme tabulky, kdy dosazujeme za proměnnou čísla a počítáme hodnotu algebraického výrazu. Začínáme jednoduchými příklady s jednou proměnnou a později s více proměnnými, např.:

| $a$ | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $3a + 1$ | | | | | |

| $x$ | 1 | 2 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 7 | 8 | 10 |
| $2x + 4y$ | | | | | |

c) Využíváme geometrických interpretací algebraických výrazů, kdy součet $a + b$ můžeme modelovat pomocí úseček, součin $a.b$ pomocí obdélníku, součin $a \cdot b \cdot c$ pomocí kvádru a další modifikace jiných algebraických výrazů (Blažková, 2015).

## Shrnutí

Pochopení písmene ve významu čísla je pro žáky s SPU velmi náročné a vyžaduje delší čas a mnoho různých interpretací. Je třeba, aby u žáka nastal AHA efekt, tj. aby sám pochopil význam písmen a obecná vyjádření vztahů. Při počítání s algebraickými výrazy je třeba znovu opakovat operace s čísly přirozenými, zápornými, zlomky a při práci s koeficienty se varovat chyb, které se v této oblasti vyskytovaly v minulosti.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Uveďte, jaké motivační úlohy můžeme volit k tomu, aby děti chápaly význam písmen v algebře.
2. Jak můžeme usnadnit dětem cestu k postupnému zobecňování?
3. Jaké aplikační úlohy je možné poskytnout dětem k snadnějšímu chápání algebraických výrazů?

# – 16 – 4 ROVNICE

## – 16 – 4 – 1 Teoretická východiska

S úlohami, které se v budoucnu řeší s využitím rovnic, se děti setkávají daleko dříve než na druhém stupni ZŠ. Např. formulace úlohy „které číslo musím přičíst k číslu 20, abych dostal 100?“ se již na prvním stupni ZŠ řeší buď experimentem (postupným dosazováním), nebo pomocí inverzní operace. Tato úloha se pomocí rovnice zapíše $20 + x = 100$.

Postup řešení rovnic má svá přesná pravidla a určení řešení rovnice (kořene rovnice) probíhá na základě provádění ekvivalentních úprav (tj. úprav, při kterých rovnice zadaná a rovnice upravená mají stejnou množinu řešení). K ekvivalentním úpravám řadíme:

- Výměnu obou stran rovnice.
- Přičtení (odečtení) stejného čísla nebo stejného výrazu k oběma stranám rovnice.
- Násobení (dělení) obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným nenulovým výrazem.

Na základní škole se děti většinou setkávají s úpravami ekvivalentními, na střední škole také s úpravami důsledkovými. Při provádění úprav rovnic se zpravidla pracuje se závorkami, operacemi s čísly celými, se zlomky a při tom se mohou projevit chyby, které se u dětí s poruchami učení projevovaly při provádění běžných operací s čísly. Jde např. o sčítání a odčítání s přechodem přes základ deset, nezvládnutí základních spojů násobení a dělení přirozených čísel, problémy s počítáním s nulou, s čísly zápornými, zlomky aj. K tomu přistupují problémy s pravolevou orientací (např. při zápisu víceciferných čísel) i vliv dysgrafie při zápisech rovnic. Dále se vyskytují potíže při rozlišování algebraických výrazů a práci s nimi, znaménko „minus“ před závorkou, chyby vzniklé z nepozornosti, zapomínání při provádění některých úkonů a mnoho dalších problémů vyplývajících z individuality každého dítěte. Je proto vhodné řešit úpravy rovnic v metodických řadách, ve kterých je v každém příkladu jen jeden nový krok.

## – 16 – 4 – 2 Problémy dětí při řešení rovnic

a) Děti nevynásobí oba členy dvojčlenu:

Např. rovnici $2(x + 6) = x – 30$ upraví na tvar $2x + 6 = x – 30$

b) Chybně zapíší znaménko součinu záporných činitelů:

Např. rovnici $16 – 3(5 – 2x) = 13$ upraví $16 – 15 – 6x = 13$

c) Chybně roznásobí dvojčlen:

Např. rovnici $(x – 3) \cdot (x– 2) = x^2 + 20$ upraví $x^2 – 6 = x^2 + 20$

d) Nerespektují pořadí provádění operací:

Např. rovnici $4x + 6x : 2 = 35$ upraví do tvaru $10x : 2 = 35$.

e) Nerozlišují rovnice

Např. $\frac{1}{2} + (x + 2) = 10$ $\frac{1}{2} \cdot (x + 2) = 10$

obě upravují stejně do tvaru $1 + 2x + 4 = 20$, eventuálně $2x + 4 = 20$, $x + 2 = 10$

f) Chybně násobí výrazy

Např. rovnici $\frac{3}{4} \cdot (x - 5) = \frac{2}{3} \cdot (x + 4)$

upraví na tvar $3 \cdot 3 \cdot 3(x - 5) = 2 \cdot 4 \cdot 4(x + 4)$

g) Chybně pracují se zlomky, např:

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{x}{2} = 6$ | $\frac{5}{x} = 5$ | $\frac{4}{3}x = x - 7 = 5$ |
| vypočítají $x = 3$ | vypočítají $x = 25$ | upraví $4x - 21 = 5$ |

V některých případech se může stát, že po chybném výpočtu získají děti zdánlivě správný výsledek, dokonce jim vyjde zkouška správnosti, avšak nezískají všechna řešení dané rovnice. Např. v rovnicích krátí určitým výrazem, nerespektují definiční obor, což ilustrují následující dva příklady:

a) $(x + 1) \cdot (x - 3) = x + 1$ krátí výrazem $x + 1$

$$x - 3 = 1$$
$$x = 4$$

přitom tato rovnice má dva kořeny, $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.

Nebo počítají: $x - 3 = 0$

$$x = 3$$

b) $2x - 14 = x - 7$ tento příklad dokonce počítají takto:

$2(x - 7) = x - 7$ krátí výrazem $x - 7$

$2 = 1$ (v horším případě $2 = 0$) tedy rovnice nemá řešení.

## Shrnutí

Zvládnutí problematiky řešení rovnic patří k základním znalostem pro mnoho dalších matematických témat. Žáci by měli přistupovat k jednotlivým úpravám rovnic s porozuměním, výuka by měla být zbavena jakéhokoliv formalismu bez pochopení. Při řešení rovnic se objeví všechny problémy, které mají žáci při počítání s čísly přirozenými, desetinnými, zlomky. Numerická chyba může být jedinou příčinou neúspěchu při jinak správně řešené rovnici, takže je vždy nutné sledovat celé řešení rovnice a upozornit žáka na příčinu nesprávného výsledku rovnice.

I když by se při ekvivalentních úpravách rovnice nemusela provádět zkouška správnosti, v případě žáků se specifickými poruchami učení provádíme zkoušku správnosti řešení rovnice vždy.

### Úkoly k samostatnému studiu

1. Sledujte postupy dětí, kterými na prvním stupni přistupují k řešení úloh, které se v budoucnu řeší rovnicemi.
2. Vyhledejte typické chyby dětí při řešení lineárních rovnic a soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

## – 16 – 5 SLOVNÍ ÚLOHY

Slovními úlohami rozumíme úlohy, ve kterých jsou souvislosti mezi zadanými a hledanými údaji vyjádřeny slovní formulací. Vhodnými úvahami zjišťujeme, jaké operace je třeba provést se zadanými údaji, aby bylo možné nalézt údaje hledané. Proces řešení slovních úloh často bývá pro žáky s poruchami učení úkolem stěží řešitelným.

Schopnost řešit slovní úlohy připravuje žáky k řešení úloh aplikačních a zejména pak úloh, které předkládají běžné životní situace. Potřeba zvládat běžné problémy související s placením a hospodařením s financemi patří k nejzákladnějším potřebám každého člověka. Další aplikace slovních matematických úloh souvisejí s výkonem téměř každé profese.

**Jaký je vztah dětí k řešení slovních úloh**

- Řeší děti rády slovní úlohy?
- Jak přistupují k řešení slovních úloh?
- Mají potřebu řešit slovní úlohy? Vidí důvod, proč je řešit?
- Jaké náměty slovních úloh děti osloví? Jsou schopni najít aplikační úlohy z praktického života?

S jakými přístupy dětí se setkáváme:

- Pokud děti nepochopí slovní úlohu nebo nemají důvěru ve své schopnosti, zpravidla rezignují a úlohu se vůbec nesnaží řešit. Uvádějí, že „tomu nerozumí“, avšak čemu nerozumí, nedokáží formulovat.
- Některé děti vyžadují instruktivní návody pro řešení slovních úloh – mechanické postupy, které formálně uplatňují bez vlastní myšlenkové činnosti. Dokáží-li zařadit úlohu do určité skupiny podobných úloh, úlohu řeší.
- Děti náhodně vyberou některé údaje (nebo všechny údaje) ze zadání a zkouší, které operace s nimi mohou provádět, aby úlohu vyřešili.

- Některé děti hledají složitá řešení jednoduchých situací vyjádřených ve slovních úlohách.
- Po chybném řešení je uveden správný výsledek – získaný např. nápovědou od spolužáka nebo opsáním.
- U dětí se mohou projevovat psychické bariéry – obavy ze slovních úloh, obavy, že jimi navržené řešení nebude správné.
- Děti řeší jednoduché slovní úlohy, ve kterých využívají sčítání, odčítání, násobení, event. dělení, problémy jim činí slovní úlohy na porovnávání pomocí vztahů „o několik více – méně“, „několikrát více – méně“.
- Řešení složených slovních úloh je problematické, neboť vyjádření a matematizace vztahů ve složené slovní úloze vyžaduje důkladný a správný rozbor, analýzu vztahů a důsledné sledování otázky po celou dobu řešení úlohy.

**Co může být příčinou problémů při řešení slovních úloh?**

a) **Pochopení či nepochopení textu zadání slovní úlohy**
Slovní úloha je zpravidla zadána textem, který je pro děti více či méně srozumitelný jako česká věta. Nejprve se děti setkají se zadáním slovní úlohy, nejčastěji prostřednictvím textu, který by měly přečíst s porozuměním. Zde hraje roli:

*Délka textu*, neboť příliš dlouhý text znesnadňuje pochopení (než přečtou závěr zadání, nepamatují si, co bylo na počátku).

*Volba použitých termínů* – některým použitým pojmům děti nemusí rozumět.

*Tematika slovní úlohy* – zda je pro děti přitažlivá a srozumitelná.

*Způsob zadání číselných údajů* – zda jsou uvedeny prostřednictvím čísel zapsaných číslicemi (např. 6 dětí), nebo prostřednictvím číslovek (šest dětí). V prvním případě číselný údaj vnímají, ve druhém ne. Některé číselné údaje mohou být nadbytečné a žáci se snaží je za každou cenu uplatnit – např. „Babička má 4 vnuky, třem dala po dvou buchtách a jednomu dala tři buchty. Kolik buchet babička rozdělila?“ – některé děti řeší příkladem 4 + 2 + 3.

*Vliv dalších poruch učení*, zejména dyslexie (čtení textu bez porozumění).

*Schopnost koncentrace na daný text*, čtení s porozuměním je dalším důležitým aspektem pro správné pochopení zadání slovní úlohy. Pro děti, u kterých je diagnostikována dyslexie, je nutné tuto poruchu u slovních úloh zohlednit.

Ze zadaného textu děti zpravidla provádějí stručný zápis úlohy. Jde o to, aby si ujasnily, které údaje jsou zadány a který údaj je neznámý. Provádění stručného zápisu je problematické pro dysgrafiky i pro děti tzv. dvojí výjimečnosti – děti s nadáním pro matematiku se souběžnou poruchou učení (dyslexií, dysgrafií). Tyto děti považují zápis za zbytečný.

**b) Zvládnutí rozboru slovní úloh**

Jednou z nejdůležitějších částí řešení slovní úlohy je její rozbor, který spočívá v ujasnění si vztahů mezi hledanými a zadanými údaji. To vyžaduje určité přemýšlení a některým dětem právě toto dělá problémy. Proto často od problému utíkají a rezignují. Zde se může projevit pedagogické mistrovství učitelů či rodičů, kteří dítěti pomohou najít cestu k řešení tohoto problému. Z účelně provedeného rozboru pak vyplyne volba početních operací, které vedou k vyřešení slovní úlohy. Přepis slovního zadání do matematického jazyka se nazývá matematizace reálné situace. Součástí rozboru je také grafické znázornění vztahů ve slovní úloze (pomocí obdélníků, úseček apod.). Grafické znázornění mnoha dětem usnadní řešení slovní úlohy a následný zápis příslušného příkladu, ev. rovnice či soustavy rovnic („obrázek je za tisíc slov").

Pokud děti nezvládnou pochopit vztahy mezi hledanými a zadanými údaji a z rozboru nevyplyne správná volba operace, zpravidla náhodně volí číselné údaje ze zadání a náhodně volí operace, které s nimi provádějí. Výsledek je pak často naprosto nesmyslný. Nejčastěji vyberou číselné údaje zapsané čísly (někdy jen některé) a zpravidla je sečtou.

**c) Zápis příkladu**, **rovnice nebo soustavy rovnic** k dané slovní úloze. V této části se projeví, zda děti pochopily podstatu operací – kdy kterou operaci použijí, jak vztahy mezi údaji zapíší pomocí rovnice.

**d) Řešení příkladu**

Pokud je sestaven příklad, následuje jeho vyřešení. Zde se projeví nedostatky vyplývající z problémů dyskalkuliků v oblasti provádění operací s přirozenými, ev. racionálními čísly. Na úspěšnost řešení má vliv stupeň zvládnutí pamětných operací v těchto oborech i zvládnutí písemných algoritmů. Rovněž provádění odhadu výsledku (alespoň řádově) může přispět k přiblížení se ke správnému výsledku.

**e) Odpověď**

Po výpočtu následuje odpověď – některé děti mají problémy odpovídat na otázku slovní úlohy, protože již např. zapomněly, jaká otázka byla formulována. Poté by měla následovat zkouška správnosti řešení slovní úlohy. Tu, bohužel, málokdo provádí.

**f) Provedení zkoušek správnosti**

K důkladnému pochopení slovní úlohy může přispět i provedení zkoušky správnosti slovní úlohy. Je třeba odlišit zkoušku správnosti prováděných operací a zkoušku správnosti řešení slovní úlohy (v některých úlohách, zejména složených, je tedy třeba provést zkoušky dvě). Ukazuje se, že některé dětí si řešení úlohy ujasní až při provádění zkoušky správnosti. Pokud se slovní úloha řeší pomocí rovnice, zkouška správnosti se nikdy neprovádí dosazením do rovnice (rovnice může být špatně sestavena a zkouška dosazením do rovnice vyjde správně).

Při nácviku řešení slovních úloh jsou nejprve řešeny slovní úlohy jednoduché, při kterých je třeba k řešení pouze jedné operace, a následně slovní úlohy složené, pro jejichž vyřešení je třeba více než jedna operace. Většinu slovních úloh řešíme v oboru čísel přirozených a teprve po jejich zvládnutí řešíme slovní úlohy v oboru čísel racionálních. Pokud mají děti se specifickými poruchami učení problémy s řešením složených slovních úloh, je možné rozčlenit složenou úlohu na úlohy jednoduché.

Uvádíme příklad řešení složené slovní úlohy a problémy, které mohou mít děti s poruchou učení:

> *V prodejně měli 410 kusů pánských svetrů a 530 kusů dámských svetrů. V jednom týdnu prodali 260 pánských svetrů a 350 dámských svetrů. Kolik svetrů jim zůstalo?*

1. Chyby způsobené zápisem čísel:

   Dítě řeší úlohu správně, vypočítá správně rozdíl 530 – 350 = 180, osmičku napíše nedbale a dále počítá s číslem 160 a uvede chybný výsledek 310. Kdyby tato úloha byla zařazena do testů s nabízenou odpovědí, dítě by obdrželo nula bodů za správně vyřešenou úlohu s malou chybou.

2. Chyby numerické typu 150 + 180 = 230 (nezvládá přechod), jinak je celá úloha řešena správně.

3. První část úlohy vypočítá dítě správně:

   p = 410 – 260     d = 530 – 350
   p = 150     d = 180

   ale potom uvede zápis $x$ = (150 + 180) – (410 + 530), nad výrazy si zapsal správné součty 330 a 940 a vypočítal $x$ = 610, což svědčí o nepochopení problematiky úlohy.

4. Úloha je řešena s naprostým nepochopením:

   d = 530 – 410     p = 410 + 530
   d = 120     p = 940

   $x$ = 940 + 120 = 1 020

5. Dítě vybere všechna čísla z textu a sečte je:

   410 + 530 + 260 + 350 = 1 550

Z řešení dětí vyplývá, že při řešení slovních úloh se objevují chyby numerické, které děti se specifickými poruchami učení zpravidla provázejí po celou dobu vzdělávání. Pokud děti nejsou zvyklé provádět rozbor úlohy, volba operací s čísly je naprosto náhodná. Nejsou zvyklé porovnat výsledek úlohy s realitou – zda je takový výsledek vůbec možný. Zkouška správnosti není prováděna v žádném případě, avšak odpověď, často s nesmyslným výsledkem, je zapsána téměř vždy.

**Jaké reedukační přístupy můžeme uplatňovat při řešení slovních úloh?**

a) Neustále učit děti číst s porozuměním běžný text – snadný a pro děti zajímavý – tím, že vyprávějí, co četli. Jestliže dítě nezvládá dovednost číst s porozuměním běžný text, není možné vyžadovat, aby s porozuměním četl text matematický. Čtení matematického textu je pro některé děti velmi obtížné, avšak nikdy není beznadějné, vždy existuje nějaká cesta, jak čtení s porozuměním navodit. Je třeba vynaložit určité úsilí při formulování vhodné řady úloh od jednoduchého vyjádření ke složitějšímu a hlavně projevit velkou dávku trpělivosti. Pro dyslektiky zvážit alternativní způsoby zadání slovní úlohy (obrázkem, dramatizací apod.). Vhodné je diskutování o textu slovní úlohy, vyprávění, přeformulování textu dětmi jejich jazykem aj.

   Volba slovních úloh by měla být pro děti tak přitažlivá, aby pociťovaly potřebu slovní úlohy řešit a aby je řešily se zájmem. Velmi vhodné je řešení komplexu úloh k jedné tematice – např. prostřednictvím projektů.

   Dále je třeba vzít v úvahu, v jakém číselném oboru se děti orientují. Nejprve je vhodné volit údaje v oboru přirozených čísel (do sta, do tisíce). Pokud děti řeší slovní úlohy s menšími čísly spolehlivě, není nezbytně nutné, aby řešily slovní úlohy s čísly v oboru do milionu, kdy jim velká čísla mohou činit problémy (je možné to vyřešit v rámci individuálního vzdělávacího plánu). Teprve po zvládnutí úloh s čísly přirozenými volíme čísla desetinná a ještě později zlomky.

b) Při přepisu slovní úlohy do matematického jazyka, tzv. matematizaci reálné situace respektujeme tento postup:

| | | |
|---|---|---|
| *SLOVNÍ ÚLOHA* | *matematizace reálné sitace* → | *MATEMATICKÁ ÚLOHA* |
| *VÝSLEDEK SLOVNÍ ÚLOHY* | *interpretace do reality* ← | *VÝSLEDEK MATEMATICKÉ ÚLOHY* |

Slovní úlohu přepíšeme do matematického jazyka (příkladu, rovnice, nerovnice, soustavy rovnic) a řešíme tuto matematickou úlohu. Získáme výsledek matematické úlohy, který pak interpretujeme zpět do reality a získáme tak výsledek slovní úlohy.

Dále věnujeme pozornost procvičování zápisu slovního vyjádření matematickým výrazem, např.:

- dané číslo zvětši o 4,
- zapiš dvojnásobek daného čísla,
- zapiš součet dvou čísel 7 a 9,
- mám 5 Kč, ty máš o 10 Kč více než já,
- mám 20 Kč a to je o 8 Kč více, než máš ty, apod.

Naopak snažíme se naučit žáky číst matematický zápis, tj. vyjádřit slovní formulací číselný (později algebraický) výraz, např.:

Zápis 3 + 4 = 7 může žák chápat a vyjádřit v mnoha významech, např:

- když ke třem přidám čtyři, dostanu 7,
- když tři zvětším o čtyři, dostanu 7,
- 7 je o 4 větší než tři,
- 7 je o 3 větší než 4, atd.

Velký význam má využití různého grafického znázornění vztahů ve slovních úlohách, od obrázků k abstraktnějšímu znázornění pomocí obdélníků, úseček apod. To napomáhá žákům k pochopení vztahů mezi údaji i ke snadnějšímu určení potřebné operace.

c) Ke správné volbě početních operací přispívá jejich správné vyvození – tak, aby žákům byl naprosto jasný význam té které operace. Vhodné je využívat velmi jemné metodické řady úloh s rostoucí náročností, kdy se řešením jedné úlohy žák učí řešit úlohy další. Rovněž tvoření slovních úloh k zadaným příkladům může napomoci lepšímu pochopení.

d) Promyšlené a systematické opakování těch příkladů, které se využívají při řešení slovních úloh, vede k jejich snadnějšímu používání. Odhady výsledků a konfrontace s realitou – zda je možný zjištěný výsledek – přispívají k zvládnutí řešení slovních úloh.

e) Vytvoření návyku zkoušky správnosti přispívá jednak k odpovědnosti za výsledky práce a jednak může přispět k objasnění vztahů ve slovní úloze. V každé slovní úloze bychom měli vždy provádět dvě zkoušky správnosti – jednu na správnost prováděných operací, druhou na správnost řešení vlastní slovní úlohy.

# – 17 – VYTVÁŘENÍ GEOMETRICKÝCH PŘEDSTAV

Geometrie je specifickou oblastí matematiky, která může být pro děti, které mají poruchy v oblasti numerace a operací s přirozenými čísly, záchranou.

Metody práce v geometrii, možnost pracovat s konkrétními objekty usnadňuje dětem pochopení učiva. M. Kupčáková (2016) uvádí:

> „Na základní školu žák přichází s geometrickými představami, které většinou získal právě v konkrétním reálném světě. Během vzdělávání na základní škole by pak měl získat další základní geometrické znalosti, dovednosti a návyky. Manipulativní činnosti, úzce spojené právě s reálným světem, mají za cíl přivést žáka k objevování vlastností objektů geometrického světa a vztahů mezi nimi."

Učitel sleduje postoj dítěte ke geometrickému učivu, jeho schopnosti chápat geometrické pojmy a pracovat s nimi. Geometrické učivo základní školy obsahuje pochopení základních pojmů v duchu jejich správných definic (i když se žádné definice žákům nepředkládají), modelování a rýsování geometrických útvarů, vnímání některých vlastnosti geometrických útvarů a některé úlohy početní geometrie (např. určování obvodu a obsahu čtverce a obdélníku).

Úspěšnost dětí v geometrii, vytváření vědomostí, zdokonalování dovedností dětí i rozvíjení jejich schopností úzce souvisí s vytvářením postojů dětí k vyučování geometrii, s volbou metod a forem práce, při kterých dochází k vytváření geometrických pojmů. Základní geometrické pojmy jsou abstraktní (nikdy není možné ilustrovat např. přímku nebo rovinu), avšak je potřebné u dětí vytvořit jejich správné představy. Postupy by se měly opírat o vlastní aktivitu dětí, o získávání poznatků prostřednictvím manipulativních činností, her, postupné vytváření hypotéz s akcentem na jejich samostatnou práci.

Vyučování geometrie založené na pouhém předávání instrukcí a hotových poznatků nerespektuje v plné šíři individualitu dítěte a jeho přístupy k získávání poznatků. Děti se liší svými zkušenostmi, zájmy, schopností učit se, postoji, stylem učení, rychlostí, vytrvalostí apod. a také typem vnímání. Často si nezapamatují proces získávání poznatků, ale určitě si pamatují to, co je osloví citově, určitě si pamatují zážitky. Matematické pojmy budované na pouhém zapamatování si určitých vět vedou k formálním vědomostem. Poznatky získané na základě manipulativních činností, modelování, vytváření staveb apod. usnadňují pochopení, umožňují vidět souvislosti a napomáhají vytváření systému. Činnost rukou podněcuje činnost mozku. Výuka geometrie je založena na umění dívat se, umění experimentovat, umění vyvozovat závěry.

## – 17 – 1 ZÁKLADNÍ GEOMETRICKÉ POJMY A GEOMETRICKÉ ÚTVARY

Diferenciace geometrických úvarů probíhá u dětí postupně. Již od období předškolního věku rozlišují, co je kulaté, hranaté, špičaté, později rozlišují geometrické útvary rovinné a prostorové a na základní škole pak již útvary specifikují. Konkrétními modely jsou např. míč, kostky ze stavebnice, desky různých tvarů apod. Na tělesech se pak mohou ilustrovat základní pojmy, jako jsou bod (vrcholy těles) a úsečka (hrany těles), a teprve potom složitým procesem abstrakce se vytvářejí pojmy přímka, polopřímka, rovina, polorovina.

K procvičení základních geometrických pojmů a k opakování učiva jsou vhodné činnosti související s hraním, kreslením, sestavováním obrázků, sestavováním koláží aj. Vhodné jsou různé skládačky, např. tangram.

Pomocí črtání a kreslení různých obrázků s geometrickým obsahem (křivé čáry, rovné čáry, lomené čáry) se uvolňuje dítěti ruka a postupně se vytvářejí předpoklady k rýsování. To je činnost náročná a děti by měly mít dostatek prostoru k tomu, aby se rýsování geometrických útvarů měly kde naučit. Práce s trojúhelníkem a s kružítkem vyžaduje dostatečný a dlouhodobý nácvik.

Pro rozvoj prostorové představivosti se využívá staveb z krychlí. Nejprve si děti hrají se stavebnicemi, ve kterých využívají kostek různých tvarů a zpravidla staví stavby podle vlastní fantazie. Stavby z krychlí se realizují v několika fázích. Nejprve staví podle vlastní fantazie, potom stavby, ve kterých dodržují určité pravidlo, potom stavby podle tzv. kótovaného půdorysu, dále podle plánu, který je nakreslen ve volném rovnoběžném promítání a nakonec podle pohledů zepředu, shora a zprava (podle půdorysu, nárysu a bokorysu). Vše probíhá formou hry.

Na prvním stupni se děti také seznamují se základy měření – nejprve určují délku úsečky, seznamují se s jednotkami délky a později i s obvody a obsahy geometrických útvarů. Systematičtější výuka geometrie pak pokračuje na druhém stupni základní školy, kdy se žáci seznamují s geometrickými útvary v rovině i v prostoru, jejich vlastnostmi, řeší konstrukční úlohy a úlohy početní geometrie.

## – 17 – 2 PROBLÉMY DĚTÍ V GEOMETRII

Problémy v geometrii mají mnoho příčin, které mohou souviset s vnímáním zrakovým, vnímáním prostoru, orientací v prostoru, pravolevou orientací, vnímáním symetrií, rozvojem grafomotoriky, jemné motoriky, ale také správným chápáním geometrického útvaru a jeho velikosti. Mnoho geometrických dovedností a představ souvisí s modelováním a kreslením. Vzhledem k tomu, že geometrie nebývá rozhodující v matematických vědomostech dětí, není jí věnována patřičná pozornost.

Vyskytují se např. problémy:

- nesprávné držení tužky,
- spojení dvou různých bodů čarou,
- narýsování části přímky pomocí pravítka,
- načrtnutí či narýsování trojúhelníku,
- rozlišení obdélníku a čtverce,
- nepochopení zadání geometrické úlohy,
- neschopnost číst s pochopením geometrické obrázky,
- nepochopení vztahů pro výpočty obvodů a obsahů geometrických útvarů,
- nezvládnutí procesu měření,
- nepochopení jednotek délky, obsahu, objemu.

### Shrnutí

Využíváme různých metod a forem práce, aby děti poznávaly a rozlišovaly geometrické útvary rovinné i prostorové a uměly nacházet jejich reprezentace v běžném životě. Důležité je zvládnutí orientace v rovině a v prostoru (chápání vztahů dole, nahoře, vpravo, vlevo, vně, uvnitř apod.). Děti se postupně učí geometrické útvary pojmenovávat a později i rýsovat. Při rýsování je třeba respektovat další problémy dětí, jako je schopnost zrakového rozlišování, schopnost práce ruky při používání potřebných pomůcek k rýsování. Učíme děti měřit délku úsečky a později určovat obvod geometrického útvaru. Prostřednictvím manipulativních činností děti poznávají shodnosti a podobnosti geometrických útvarů a seznamují se se symetrií. Určují obsah čtverce a obdélníku, nejprve je vhodné využít čtvercové sítě, později vztahů pro výpočet obsahu geometrických útvarů.

### Úkoly k samostatnému studiu

1. Vymyslete několik manipulativních činností, při kterých děti vytvářejí některé z geometrických útvarů.
2. Jak využijeme dětskou kresbu k chápání rovinných geometrických útvarů.
3. Uveďte úlohy, které mohou být propedeutikou k chápání obsahu geometrického útvaru a objemu tělesa.

# – 18 – JEDNOTKY MĚR

V rámci mnoha činností s dětmi s poruchami učení v matematice se jako jeden ze závažných problémů objevilo počítání s jednotkami měr. Chápání jednotek měr – tj. jednotek délky, obsahu, objemu, hmotnosti, času a měny i vztahů mezi nimi je pro ně svízelné. Úkolem je najít komunikační cestu, která děti osloví, a volit takové metody práce, které dětem usnadní pochopení tohoto učiva. Úspěšné zvládnutí základních jednotek je předpokladem pro to, aby děti mohly dále pracovat s jednotkami složenými, jako jsou např. jednotky rychlosti, hustoty, síly, astronomické jednotky a další, a úspěšně je používaly v ostatních výukových předmětech.

— — —

Počítání s fyzikálními veličinami a s pojmenovanými čísly přináší dětem řadu potíží. Nejčastěji zjišťujeme, že:

- děti nemají správnou představu o veličině ani o jednotce;
- neumí odhadnout alespoň přibližně velikost míry určité veličiny;
- mají problémy s převody jednotek příslušných veličin;
- nechápou souvislost mezi násobením mocninami deseti – chápou násobení ve smyslu 5 m . 10 = 50 m, když se úsečka zvětší desetkrát, ale již ne ve smyslu 5 m = (5 . 10) dm, kdy se jedná o tutéž délku úsečky vyjádřenou jinou jednotkou;
- nepochopí souvislost převodů jednotek měr a násobení a dělení přirozených nebo desetinných čísel čísly 10, 100, 1 000 atd.;
- obtížně chápou, že „menších“ jednotek je „více“, a naopak – např. 5 dm = 50 cm, 500 cm = 5 m;
- neumí samostatně využít poznatků z reálného života.

Pro práci s dětmi při postupném seznamování se s jednotkami měr je důležitý vhodný metodický postup. Některé kroky tohoto postupu jsou:

1. **Vytváření správné představy o jednotce příslušné veličiny:**
   Tuto představu si děti vytvářejí jednak pomocí konkrétních předmětů, které používají, prostřednictvím částí svého těla, pomocí měřidel (různých typů měřidel pro měření délky, různých typů vah k určování hmotnosti aj.)
   - Kolik cm měříš – jaká je tvoje výška? Vyjádři svoji výšku v decimetrech, v metrech.

- V jaké výšce svého těla os země nebo od podložky, na které stojíš, můžeš ukázat 1 metr?
- Kolik cm naměříš, když rozpažíš?
- Ukaž pomocí rozpažení jeden metr.
- Jakou šířku má tvoje dlaň?
- Jakou délku má tvoje chodidlo? Má stejnou délku jako tvoje předloktí?
- Jakou jednotku může představovat šířka tvého ukazováčku?
- Dokážeš pomocí prstů ukázat 1 decimetr?
- Jakou máš hmotnost v kilogramech?
- Představ si množství písku, papíru, peří, železa – každé o hmotnosti 1 kg. Čím se tato množství od sebe liší?
- Kolik minut trvá tvoje cesta do školy?
- Kolik litrů tekutin denně vypiješ? Do jaké nádoby by se toto množství vešlo?
- Kolik decilitrů polévky se vejde do hlubokého talíře?

2. **Měření předmětů**
Dříve než začneme učit děti převody jednotek, je třeba provádět konkrétní měření předmětů a vyjadřování v různých jednotkách – alespoň ve dvou různých (např. metrech a decimetrech), pokud je možné i ve třech různých jednotkách téže veličiny. Měříme rozměry třídy, učebnic, školních sešitů, stolu, chodby, hřiště, určujeme rozměry hřišť pro různé sporty (např. kopaná, volejbal, košíková, házená, hokej, tenis), rozměry bazénu. Určujeme hmotnost učebnic, školní aktovky s pomůckami, předmětů denní potřeby, nákupu aj. Vytyčujeme různé útvary daných rozměrů (úsečky, obdélníky, čtverce) – např. běžeckou dráhu délky 60 m, 100 m, čtverec o délce strany 10 metrů (1 ar), hřiště pro vybíjenou apod.

3. **Procvičování odhadů**
K upevnění učiva o jednotkách má nezastupitelnou úlohu procvičování odhadů velikostí předmětů a následně porovnání se skutečnými rozměry:
- Jakou délku má asi cesta od domu ke škole?
- Jaká je vzdálenost do nejbližšího města, vesnice?
- Jakou rozlohu má rybník, les, park atd.?
- Jakou výšku má naše škola?
- V jaké výšce mohou létat letadla?
- Jakou hmotnost má nákup, který nesete domů?
- Uneseš milion hřebíčků, z nichž každý má hmotnost jeden gram?
- Kolik litrů vody se vejde do vany, ve které se koupeš?
- Kolik hektolitrů vody se vejde do bazénu?

- Kolik litrů vody denně spotřebuje vaše rodina?
- Domníváš se, že žiješ milion hodin?
- Umíš odhadnout, jak dlouhá doba (v hodinách či minutách) je milion sekund?
- Domníváš se, že od začátku počítání letopočtu uplynulo milion dní?
- Kolik metrů ujdeš, když ujdeš milion milimetrů?
- Jak velký balíček může být vytvořený z tisíce tisícikorun?

4. **Další činnosti**
   - sestavování časového snímku dne (školního rozvrhu, činnosti o prázdninách aj.),
   - hra na prodávání v obchodě,
   - práce s jízdními řády (vlaků, autobusů, s letovými řády aj.),
   - práce s kurzovním lístkem různých měn,
   - využívání historických jednotek, jednotek používaných v různých zemích,
   - sestavení projektu – jak se dříve měřilo.

5. **Převody jednotek**
   Pro správné pochopení si by měl učitel uvědomit úskalí, která provázejí tyto činnosti, a měl by dětem sestavovat systém cvičení, která pomohou učivo zvládnout. Jedná se zejména o:
   - násobení a dělení čísel přirozených i desetinných čísly 10, 100, 1 000…,
   - sledování možností dětí při převodech jednotek měr, neboť některé děti raději pracují s čísly (aritmetický typ), pamatují si vztahy mezi jednotkami a dokáží je uplatnit; další skupina dětí chápe spíše algebraicky a pamatuje si tabulky přímé úměrnosti sestavené pro jednotlivé jednotky; pro děti, které potřebují neustálé činnosti, jsou připraveny takzvané mřížky pro převody jednotek měr, které velmi usnadňují práci s převody (viz dále).

***Jednotky délky***

Jednotky délky ilustrujeme na nejrůznějších měřidlech běžně v praktickém životě používaných (např. metr dřevěný, krejčovský, skládací, pásmo, laserové měřidlo) a na nich vhodně upozorňujeme na menší jednotky na nich vyznačené.

1. Využití převodních vztahů:

   1 m = 10 dm
   1 dm = 10 cm
   1 cm = 10 mm
   1 km = 1 000 m

Dále pak

$1\,\mathrm{dm} = \frac{1}{10}\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $1\,\mathrm{cm} = \frac{1}{100}\,\mathrm{m} = 0{,}01\,\mathrm{m}$, $1\,\mathrm{mm} = \frac{1}{1\,000}\,\mathrm{m} = 0{,}001\,\mathrm{m}$, atd.

2. Využití funkčních závislostí, např.

| m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cm | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1 000 |

3. Mřížka k převodu jednotek délky:

| km | | | **m** | dm | cm | mm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Mřížku z tvrdšího papíru má každý žák, rozměry čtverců v mřížce jsou 3 cm krát 3 cm. Doplníme ji čtverci stejných rozměrů s čísly, která pokládáme do dolní části mřížky. Můžeme také přidat desetinnou čárku.

| km | | | **m** | dm | cm | mm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |

Z obrázku je patrný převod: 6 m = 60 dm, 6 m = 600 cm, 6 m = 6 000 mm, 6 m = 0,006 km

Typy úloh:
a) jednoduché převody větší jednotky na menší, např. 7,5 dm = 750 mm
b) jednoduché převody menší jednotky na větší, např. 1 250 mm = 1,250 m
c) složitější převody, např. 7 m 2 cm = 702 cm = 7,02 m

***Jednotky obsahu***

Názornou představu jednotek obsahu vytvoříme např. tak, že vytýčíme např. čtverec, který má stranu délky 1m a obsah 1 $m^2$ (přitom obsah 1 $m^2$ může mít rovinný útvar jakéhokoliv tvaru). Čtverec je možné vhodně rozdělit na 100 $dm^2$.

Model 1 $dm^2$ a 1 $cm^2$ mohou mít žáci vystřižené z papíru, 1 $mm^2$ je vhodné ilustrovat na milimetrovém papíře. Představu 1 aru můžeme ilustrovat pomocí čtverce o straně 10 m. Obsah 1 hektaru mají přibližně dvě fotbalová hřiště.

1. Převodní vztahy:

$1\ m^2 = 100\ dm^2$

$1\ dm^2 = 100\ cm^2$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

$1\ km^2 = 100$ ha

1 ha = 100 a

$1\ a = 100\ m^2$

Podobně: 1 dm² = $\frac{1}{100}$ m² = 0,01 m², 1 cm² = $\frac{1}{10\,000}$ m² = 0,0001 m²

2. Využití funkčních závislostí

| m² | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dm² | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1 000 |

3. mřížka k převodu jednotek obsahu:

| km² | | ha | | a | | **m²** | | dm² | | cm² | | mm² | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| km² | | ha | | a | | **m²** | | dm² | | cm² | | mm² | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

25 m² = 2 500 dm² = 250 000 cm²
25 m² = 0,25 a = 0,0025 ha

***Jednotky objemu***

1. Využití převodních vztahů

1 m³ = 1 000 dm³
1 dm³ = 1 000 cm³
1 cm³ = 1 000 mm³

1 dm³ = 1 *l*
1 *l* = 10 *dl*
1 *dl* = 10 *cl*
1 *cl* = 10 *ml*

1 m³ = 1 000 *l*
1 m³ = 10 *hl*
1 *hl* = 100 *l*

1 dm³ = $\frac{1}{1\,000}$ m³ = 0,001m³     1 *l* = $\frac{1}{100}$ *hl* = 0,01 *hl*

2. Využití funkčních závislostí

| m³ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dm³ | 1 000 | 2 000 | 3 000 | 4 000 | 5 000 | 6 000 | 7 000 | 8 000 | 9 000 | 10 000 |

3. Mřížka k převodu jednotek objemu

| m³ | | | dm³ | | | cm³ | | | mm³ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | hl | | l | dl | cl | ml | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

***Jednotky hmotnosti***

Jednotky hmotnosti ilustrujeme pomocí vážení, kdy děti určují hmotnosti nejrůznějších předmětů. Využíváme štítků o hmotnosti potravin z digitálních vah z obchodů, eventuálně baleného zboží s vyznačenou hmotností. V *Mezinárodní soustavě jednotek měr System international* jsou povolené jednotky hmotnosti: kilogram, gram, tuna.

Převodní vztahy: $1\,\text{kg} = 1\,000\,\text{g}$  $1\,\text{g} = \frac{1}{1\,000}\,\text{kg} = 0{,}001\,\text{kg}$

$1\,\text{t} = 1\,000\,\text{kg}$  $1\,\text{kg} = \frac{1}{1\,000}\,\text{t} = 0{,}001\,\text{t}$

Další jednotky, užívané v praxi, nikoliv však v obchodním styku, jsou dekagram a metrický cent.

1 q = 100 kg
1 kg = 100 dkg

***Jednotky času***

Problémy s jednotkami času vyplývají jednak z používání šedesátkové soustavy při některých převodech, jednak obtížnějšího znázornění času na kruhovém ciferníku i z digitálního záznamu času.

1 den = 24 h
1 h = 60 min  1 h = 3 600 s
1 min = 60 s

Dále se sekundy dělí na desetiny, setiny, tisíciny atd.

Žáci se obtížně vyrovnávají se sdělením a zápisem typu:

Čtvrt na pět 4:15 nebo 16:15

Problémy činí převody části hodiny na minuty a na následný zápis pomocí desetinného čísla, např:

$\frac{1}{4}$ h = 15 min = 0,25 h  $\frac{1}{5}$ h = 12 min = 0,2 h

Pro využívání jízdních řádů, vyhledávání času na CD apod. je třeba, aby žáci zvládli sčítání a odčítání časových údajů a využívali potřebných převodů.

Sčítání:
Sčítáme zvlášť minuty (ev. sekundy) a zvlášť hodiny. Pokud počet minut (sekund) je větší než 60, převedeme minuty na hodiny (ev. sekundy na minuty). Např.:

2 h  45 min
5 h  38 min
7 h  83 min = 8 h  23 min

Odčítání:
Při odčítání opět odčítáme zvlášť minuty (ev. sekundy) a zvlášť hodiny. Pokud je počet minut menšence větší než počet minut menšitele, je odčítání bez problémů, pokud je tomu naopak, pak menšence upravíme tak, aby v menšenci byl větší počet minut než v menšiteli, jednu hodinu převedeme na minuty. Např.:

$$\begin{array}{rrr} & 12\text{ h} & 48\text{ min} \\ - & 8\text{ h} & 23\text{ min} \\ \hline & 4\text{ h} & 25\text{ min} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} & 12\text{ h} & 23\text{ min} \\ - & 8\text{ h} & 45\text{ min} \\ \hline \end{array} \qquad \text{upravíme} \qquad \begin{array}{rrr} & 11\text{ h} & 83\text{ min} \\ - & 8\text{ h} & 45\text{ min} \\ \hline & 3\text{ h} & 38\text{ min} \end{array}$$

***Jednotky měny***

I když se v současném platebním styku haléře příliš nepoužívají, platí převod:

1 Kč = 100 hal.

Vzhledem k tomu, že v řadě států Evropy se platí eury, je vhodné seznamovat děti s touto peněžní jednotkou a jejím převodem na koruny.

K převodům mezi různými měnami se používají aktuální kurzovní lístky. Přepočet měn je potřebný zejména při cestování do jiných zemí.

## Shrnutí

Jednotky měr a jejich převody jsou jednou z nejobtížnějších částí učiva matematiky na základní škole. Příčin je mnoho a pouze vhodným přístupem k výuce a angažováním žáka na přístupu k chápání jednotlivých jednotek měr můžeme zvládnutí tohoto tématu napomoci. Jakýkoliv formalistický přístup k převodům jednotek měr situaci nezlepší. Postupně děti seznamujeme se základními principy měření a vyjadřování délky úsečky v různých jednotkách. Později se zaměříme na určování obsahu geometrického útvaru ve čtvercové síti a seznamujeme děti s jednotkami obsahu. Ke správnému pochopení jednotek času využíváme běžných činností dětí během dne.

## Úkoly k samostatnému studiu

1. Vyhledávejte činnosti, při kterých dětem můžete přiblížit jednotky měr.
2. Sledujte, které přístupy k převodům jednotek měr jsou pro děti přijatelné a snadněji pochopitelné.
3. Nacvičujte s dětmi odhady velikostí předmětů v jejich okolí (např. výšek, délek, hmotnosti apod.).

# – 19 – HODNOCENÍ DĚTÍ SE SPECIFICKÝMI PORUCHAMI UČENÍ

Hodnocením rozumíme každé vyjádření učitele k osobě dítěte, ať už verbální, nebo nonverbální. Každé dítě s poruchou učení očekává vyjádření učitele k jeho práci, protože ta vykonána byla, bez ohledu na výsledek. Proto hodnotíme děti samotné, jejich posun a nemůžeme je zpravidla srovnávat s ostatními dětmi ve třídě. Děti, u kterých se projeví specifická vývojová porucha učení, často mají průměrnou až nadprůměrnou inteligenci, a proto nelze nezaměňovat problémy vyplývající z poruchy učení s neschopností nebo lajdáctvím. Hodnocením je třeba poskytnout dětem radost z dílčího úspěchu, povzbuzovat je do další činnosti pozitivním vyjádřením (pochvalou, úsměvem, uznáním apod.).

Při hodnocení dětí s dyskalkulií hodnotíme především to, co zvládají a umí, ne to, co neumí. Z možností rozmanitých forem práce, které mohou sloužit pro hodnocení a následně pro klasifikaci, vybíráme ty, které jsou pro dítě příznivé:

- z ústní nebo písemné formy vybereme tu, při níž se dítě snadněji a lépe vyjadřuje,
- v písemných pracích kontrolujeme podrobně celý postup řešení, myšlenkové pochody dítěte, nikoliv jen výsledek úlohy,
- stanovíme přiměřený rozsah práce (obsahově i časově) vzhledem k možnostem dítěte,
- vhodně připravíme zadání práce vzhledem k poruchám (dyslexie, dysgrafie) – např. předtištěné na pracovních listech, pomocí obrázků apod., v případě potřeby poradíme, s kterou úlohou má dítě začínat (samo si zpravidla nedovede vybrat, protože podle zadání neodhadne obtížnost úloh),
- hodnotíme kvalitu práce co do myšlenkových procesů, snahy a námahy dítěte, nikoliv kvantitu,
- zařazujeme několik úloh, o kterých víme, že jsou při jejich řešení děti úspěšné, a na jejich základě je naučíme postupovat při řešení úloh dalších,
- ke každé práci zajistíme žákům optimální prostředí – klid, pohodu,
- každou práci dítěte využijeme ke zpětné vazbě jak pro ně samotné, tak pro učitele – s dítětem jeho chyby analyzujeme a korigujeme, učitel provede analýzu vzhledem k pochopení žákových myšlenkových postupů a k dalšímu metodickému vedení dětí,
- připravíme vhodná cvičení s možností autoevaluace, kdy si dítě může samo zhodnotit svůj výkon.

Klasifikaci dětí s poruchami učení upravují předpisy Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy (Vyhláška MŠMT č. 48/2005) a je možné hodnotit slovně nebo pomocí stupnice známek. Vzhledem k budoucnosti dítěte se ukazuje vhodným využití obou způsobů současně – hodnocení známkou doplnit slovním komentářem. K příznivému sociálnímu klimatu ve třídě přispívá, když učitel zdůvodní ostatním dětem ve třídě, proč je dítě s poruchou učení hodnoceno právě tímto způsobem. Děti s poruchou učení musí zpravidla vykonat mnohem více práce než ostatní děti. Zároveň by si dítě s poruchou učení mělo být vědomo svých reálných možností v matematice. Zejména při volbě studia na střední škole by se matematice nemělo vyhýbat vzhledem k možnosti úspěšně složit maturitu z matematiky.

# – 20 – INDIVIDUÁLNÍ VZDĚLÁVACÍ PLÁN

Individuální vzdělávací plán pro dítě s dyskalkulií vzniká na základě spolupráce třídního učitele, učitele matematiky, psychologa nebo speciálního pedagoga z pedagogicko-psychologické poradny, vedení školy a rodičů. Je závazným materiálem pro dítě, rodiče i školu, avšak není dogmatem. V případě potřeby je možné jej upravit pro skutečné momentální potřeby dítěte. Jeho zpracování je náročné, neboť je třeba brát v úvahu:

- výsledek vyšetření v PPP – jaké problémy byly diagnostikovány, jaký typ dyskalkulie se u dítěte projevuje,
- úroveň jeho matematických vědomostí,
- zařazení do ročníku školní docházky,
- učivo matematiky v ročníku, který dítě navštěvuje,
- jeho skutečnou individualitu, neboť každé dítě potřebuje svůj vlastní plán,
- to, že je výsledkem cílevědomé práce na základě provedené analýzy a slouží jako východisko práce s dítětem,
- jeho konkrétnost a použitelnost ve výuce, měl by být zbaven jakéhokoliv formálního přístupu.

**Význam IVP pro dítě**

- má motivační hodnotu, neboť může dát dítěti jistotu, že je snaha mu pomoci,
- dává dítěti pocit, že je subjektem vzdělávání, nikoliv jeho pasivním objektem – neboť IVP posiluje aktivitu dítěte, jeho zájem i odpovědnost,
- umožní dítěti pracovat podle jeho momentálních schopností, individuálním tempem, bez ohledu na obsah výuky matematiky příslušného ročníku a bez ohledu na srovnávání s ostatními spolužáky,
- nesnižuje výkon dítěte tím, že by vyhledával úlevy pro dítě, ale stanovuje optimální podmínky a úroveň, při kterých může dítě pracovat,
- je zpracován podle individuálních potřeb konkrétního dítěte.

**Význam IVP pro učitele**

- pracuje s dítětem na úrovni, které je schopno dosáhnout,
- umožňuje realizaci individuální nebo individualizované výuky,
- dostává konkrétní zpětnou vazbu o úrovni matematických vědomostí dítěte,

- usnadňuje učiteli hodnocení dítěte,
- dává učiteli možnost upravovat plán výuky matematiky podle dosažených výsledků dítěte.

**Význam IVP pro rodiče**

- mají možnost zapojit se do přípravy IVP,
- mají možnost spolupodílet se s dítětem na jeho plnění,
- mohou dítě i jeho problémy pochopit s fundovanou účastí,
- jsou spoluodpovědni za práci i výsledky dítěte,
- s odpovědností, založenou na znalostech problému, přistupují k dalším perspektivám dítěte.

Při tvorbě individuálního vzdělávacího plánu se zaměřujeme na plnění určitých cílů:

**Cíle krátkodobé**

Stanovíme, které učivo matematiky by dítě mohlo zvládnout v nejbližší době a jaké výsledky asi můžeme očekávat. Jde také o aktivizaci dítěte a získání jeho zájmu o matematiku. Zaměříme se na rozvoj kompetencí, zejména na schopnost samostatně pracovat, vyhledávat informace, nebát se řešení problémů, schopnost pracovat s chybou jak z hlediska jejího vyhledávání, tak z hlediska její nápravy. Hledáme vhodné metody práce v matematice i vhodné postupy řešení úloh, které dítě osloví a které mu napomohou učivo zvládnout.

Např. v 5. ročníku ZŠ dítě nezvládá základní spoje násobení a dělení. Vhodně volenými hrami, na kterých se podílí samo dítě a vhodně zvoleným časovým rozvržením učiva (po malých krocích) se dítě postupně učí jednotlivé násobilky. Pokud se však přes veškerou snahu dítěte i učitele nepodaří některé spoje zvládnout, využijeme kompenzačních pomůcek.

**Cíle dlouhodobé**

Řešíme problém, které učivo se má dítě naučit v ročníku, který právě navštěvuje, a zároveň, jak se vyrovnává s nezvládnutým učivem matematiky z předchozích ročníků. Je třeba rozhodnout, které učivo má dítě zvládnout v plném rozsahu (vhledem k jeho potřebnosti v dalším učivu matematiky), s kterým učivem se může seznámit jen orientačně a které učivo je možné vynechat. V tomto smyslu se upraví vzdělávací program pro dítě se specifickou poruchou učení. Např. v tématu Písemné dělení jednociferným dělitelem děti řeší hlavně jednodušší aplikační úlohy (k ilustraci potřebnosti a užitečnosti matematiky v praktickém životě) a omezují se příklady s víceciferným dělencem bez návaznosti na praktické využití.

**Cíle vzdálené**:

Promýšlí se další zařazení dítěte po absolvování příslušného stupně školy – přechod z prvního stupně ZŠ na druhý stupeň, přechod ze základní školy na střední školu, eventuálně ze střední školy na vysokou školu a další zařazení v životě. Zde je třeba brát v úvahu:

- do jaké míry jsou vědomosti dítěte v rozporu s profilem absolventa příslušného stupně školy,
- zda a jak byly problémy v matematice kompenzovány,
- že dyskalkulie nemusí omezit dítě v jeho dalším profesním životě.

Např. pokud má dítě problémy v oblasti operací s čísly na 1. stupni ZŠ, tak na vyšších stupních školní docházky je možné kompenzovat je s využitím kalkulátoru a dítě může být i v matematice úspěšné, neboť může mít rozumové schopnosti na vysoké úrovni, a tedy může v matematice dosahovat výborných výsledků. Zde je však nutné rozlišovat dítě, které má dyskalkulické problémy a jinak vysokou úroveň rozumových schopností, a dítě, u kterého jsou výsledky v matematice ovlivněny sníženou úrovní rozumových schopností (jeho výsledky jsou slabé ve všech vyučovacích předmětech).

Plán se zpracuje pro konkrétní dítě v konkrétním ročníku a jeho realizace je již v kompetenci učitele matematiky.

Ve výuce matematiky se dětem zpracovávají pracovní listy s úlohami v jemných metodických řadách tak, aby děti měly pocit, že učivo zvládají a přitom se v každé úloze naučily jeden nový jev.

Děti zpravidla potřebují okamžitou pomoc v případě, že si neví rady, jak dál. Je možné tuto situaci řešit buď realizací skupinové práce, nebo osobním asistentem, kterým může být jak učitel, tak spolužák.

K upevňování a opakování učiva se využívá nejrůznějších metod a forem práce (konstruktivistické přístupy při vyvozování učiva, didaktické hry, kreslení, práce se stavebnicemi apod.).

Ověřování výsledků práce dítěte by mělo být spojeno s pozitivním hodnocením i v případě, že dítě chybuje – vždy nějakou práci vykonalo. Vhodné je zařazování autotestů, ve kterých má dítě možnost zjistit úspěšnost své práce bez ohledu na hodnocení učitelem. Má také možnost zjistit chybu i správné řešení. Pokud se hodnocení spojí se zábavnou a humornou formou, je pro dítě atraktivnější a bez stresů.

Vždy je třeba zohlednit určité charakteristiky dítěte, které souvisejí s jeho pomalým tempem při práci, jeho rychlým zapomínáním již naučeného učiva, jeho citlivostí, obav z předmětu, z neúspěchu apod. (Zelinková, 2001).

# – 21 – PŘÍSTUPY K NÁPRAVNÝM OPATŘENÍM

V oblasti pedagogické a speciálně pedagogické péče se zaměřujeme na rozvoj celé osobnosti dítěte a poskytujeme pomoc jak při rozvoji dílčích funkcí matematických schopností, jeho osobnostních vlastností, tak při zvládání učiva matematiky. Pokud má dítě problémy např. se zrakovou diferenciací, je potřeba přispívat k rozvíjení této funkce, neboť bez ní nezvládá rozlišovat např. matematické symboly.

Reedukace využívá metod, které rozvíjejí funkce nevyvinuté, nebo napravují porušené funkce a činnosti určitých analyzátorů. Kompenzace spočívá ve vypracovávání náhradních mechanismů namísto mechanismů narušených. Děti s dyskalkulií jsou často schopny si vlastní, náhradní mechanismy vypracovat, avšak ty by jim měly být učiteli a rodiči ponechány a neměly by se jim nabízet postupy, které znají dospělí.

Obecné postupy se dají uvést v tzv. „desateru“, avšak je nutné mít na zřeteli, že každé dítě je výrazná individualita a potřebuje svůj vlastní postup. To, co se osvědčí u jednoho dítěte, nemusí být přínosné u dítěte jiného.

1. *Stanovení diagnózy* – formulování hlavních problémů dítěte v matematice, v které části učiva má dítě problémy, jaké jsou jejich příčiny, jaký má dítě vztah k matematice.
2. *Respektování logické výstavby matematiky a její specifičnosti* – v matematice je pochopení a zvládnutí každého prvku nižší úrovně nezbytným předpokladem zvládnutí prvků vyšší úrovně. Reedukační cvičení musí proto začínat u toho učiva, které dítě přestalo chápat a zvládat. Postupy musí respektovat matematické zákonitosti a musí být použitelné i v dalším učivu.
3. *Pochopení základních pojmů a operací* – veškeré základní pojmy je třeba generovat na konkrétních modelech a všechny pojmy i operace s čísly je třeba vyvozovat na základě vlastní manipulativní a myšlenkové činnosti dítěte. Přitom je třeba využívat nejrozmanitějších forem práce a stále nových situací.
4. *Navození AHA efektu* – kdy dítě samo objeví poznatek „já už vím“ a přijme jej za svůj. Je nutné mít neustále na zřeteli, že poznatky jsou nepřenosné, že přenosné jsou pouze informace.

5. *Využití všech smyslů* – zapojení všech smyslů, kterých je možno pro získávání matematických poznatků – zraku, hmatu, sluchu, pohybu, tak aby to bylo dítěti příjemné a přispělo to k postupnému odbourávání problémů. Velký význam má využití vhodných her.
6. *Diskuse s dítětem* – „co vidíš?“ – zda dítě vidí v dané situaci to, co jeho učitel. Každé dítě má svoje komunikační cesty, kterými se dobírá poznatků a ty je třeba diskusí s ním objevit. Neexistuje matematická slepota a každý se k matematice nějakým způsobem může dostat, jestliže sám chce. Dyskalkulie neopravňuje žáka k nečinnosti a k rezignaci.
7. *Pamětné zvládnutí učiva* – v jaké míře je dítě schopno, avšak matematické učivo nemůže být opřeno o pouhou paměť bez porozumění a správného vyvození. Je třeba hledat vyváženost mezi vyvozováním a tzv. „drilem“.
8. *Zvyšování nároků na samostatnost a aktivitu dítěte* – tvorba vlastních materiálů, příkladů a pomůcek samotným dítětem, nebo alespoň podíl na tvorbě – dítě si může uvědomovat nedostatky a podílet se aktivně na jejich nápravě zajímavou formou. Vhodné je využívání projektového vyučování.
9. *Neustálá potřeba úspěchu* – dítě potřebuje pozitivní zážitky, pohodu, pochvalu, veselou, legrační atmosféru při nápravných cvičeních, terapii hrou, nepřetěžování, ale neustálé mírné zatěžování. Vhodná je pochvala při každém sebemenším úspěchu.
10. *Práce podle individuálního plánu* – sestaveného pro konkrétní potřeby každého dítěte. Individuální výuka, individualizovaná výuka v integrované třídě. Postupy jsou výrazně individuální, nelze stanovit obecně platná pravidla, která by vyhovovala všem dětem.

Což by se schematicky mohlo zapsat:

D – diagnostika – jednak v PPP, jednak úrovně matematických znalostí
Y – připomíná rozcestí – potřebuji okamžitou pomoc
S – specifičnost matematiky
K – konkrétní modely
A – AHA efekt
L – lepší paměť
K – komunikace
U – úspěch
L – líbivé pomůcky a postupy
I – individuální plán
E – energie a trpělivost pro všechny zúčastněné

# – 22 – KOMUNIKACE V MATEMATICE

*Děti řeší složené slovní úlohy. Ve třídě probíhá dialog:*
*Šimon: Já tomu nerozumím.*
*Paní učitelka: Čemu nerozumíš?*
*Šimon: Ničemu. Já vlastně ani nevím.*

Jednou z nejdůležitějších činností učitele a dětí je komunikace ve všech oblastech jejich činností. Pokud si dítě a učitel porozumí, najdou společnou řeč, může být velká část problémů ve výuce vyřešena.

Při vytváření matematických pojmů i při samotné výuce matematiky se jako jeden ze zásadních problémů jeví problém dorozumění se jak v rámci běžné komunikace, tak v oblasti matematiky a porozumění učivu v celé šíři matematického vyjadřování. V praxi se ukazuje, že devadesát procent problémů dětí v matematice je způsobeno problémy v komunikaci mezi dítětem a okolním světem. Přitom předpoklady pro komunikaci mohou být vrozené nebo získané, avšak u dětí s poruchami učení bývají zpravidla jejich specifické. Úkolem pedagoga pak je, aby odhalil komunikační specifika každého dítěte a pro výuku matematiky je maximálně využil.

Při výuce matematiky jde o tyto základní typy komunikace:

- komunikace v oblasti čtení matematického textu,
- komunikace verbální,
- komunikace verbálně symbolická,
- komunikace grafická,
- komunikace graficky symbolická,
- komunikace obrazově symbolická,
- komunikace obrazově názorná.

## – 22 – 1 KOMUNIKACE V OBLASTI ČTENÍ MATEMATICKÉHO TEXTU

Čtení zadání matematických a slovních úloh a přepis textu do matematického jazyka je pro mnoho dětí tvrdým oříškem. Zejména děti s dyslexií, ale i s dalšími poruchami mají problémy s přečtením celého textu, s porozuměním textu, se zvládnutím délky textu. Zpravidla nejsou schopny pochopit otázku úlohy v souvislosti se čteným zadáním a často odpovídají na otázku jinou, která nebyla v textu uvedena a třeba ani nesouvisí s řešením úlohy. Někteří žáci mají problémy s pochopením používaných výrazů v textu úlohy (např. čtvrtletí, tržba), jiní s vyjádřením vztahů pomocí předložek. Např. významu předložky „po“ nerozumí v úloze: Koupíme 8 jogurtů po osmi korunách. Největší problém pak činí přepis textu úlohy do matematického jazyka, tj. zápis příkladu, rovnice apod.

a) Problémy se čtením symbolického zápisu a vlastní vizí dítěte, např. číselný výraz $3 + 5 = 8$ děti vesměs chápou, ale výraz $5 – 3$ chápou již méně. Podobně výraz $3 + (5 \cdot 4)$ chápou více než výraz $3 + 5 \cdot 4$. Také jiné významy symbolů pro různé operce jsou pro děti problematické. Např. označení desetinné čárky v psaném textu je na kalkulačce znázorněno tečkou, různé jsou symboly pro násobení a dělení apod. Dítě se s těmito změnami vyrovnává podle svých schopností.
b) Diferenciace číslic a čtení čísel souvisí s pochopením principu vytváření poziční desítkové soustavy, kdy se také projevují problémy s pravolevou orientací. Děti mají problémy se čtením čísel např. 69, 96, se správným přečtením víceciferného čísla, čísla desetinného, později pak se čtením mocnin, odmocnin apod.

## – 22 – 2 KOMUNIKACE VERBÁLNÍ

Předpokladem pro to, aby se děti mohly v matematice správně vyjadřovat, je pochopení, tj. porozumění matematickým pojmům, termínům a vztahům. To však vyžaduje, že mají vytvořenou jasnou představu o každém pojmu v duchu jeho správné definice, i když se po dětech definice nevyžadují. Při verbálním vyjádření by bylo třeba, aby se učitel i děti zaměřili na podstatné jevy, na skutečnosti, které jsou pro daný pojem nebo dané učivo podstatné, omezili vlastnosti méně podstatné a charakterizovali daný pojem naprosto výstižně. Vyjádřit myšlenku svými vlastními slovy a přitom zachovat význam pojmu je velkým uměním.

V rámci verbální komunikace mají děti dešifrovat vyslovené pojmy a matematicky je zpracovat. Zde se setkáváme s problémy od nejranějšího věku, kdy děti např. vyslovují řadu slov: jedna, dvě, tři, čtyři…, kterou mají mechanicky naučenou jako básničku a nevidí za vysloveným slovem číslo ve významu počtu prvků. Dalším problémem je zápis vyslovených čísel, kdy např. při vyslovení čísla tři sta osm dítě píše 3008, nebo dva tisíce osm zapisuje 20008. Děti s poruchami učení, zejména s verbální dyskalkulií nemají šanci zvládnout např. diktované pětiminutovky.

Při rozvoji verbální komunikace bychom měli vnímat, zda:
- mají děti v matematice dostatek prostoru pro verbální vyjádření,
- rozumí slovnímu vyjádření učitele,
- rozumí otázkám učitele,
- nejsou odmítány při slovním vyjádření, které není právě správné nebo nejlépe formulované,

- vidí a vnímají to, co předpokládá jejich učitel,
- mají přiměřenou slovní zásobu a rozumí používaným pojmům.

## – 22 – 3 KOMUNIKACE VERBÁLNĚ SYMBOLICKÁ

Správná verbální interpretace matematických symbolů souvisí s pochopením významu jednotlivých znaků. Děti by měly zvládnout verbální vyjádření zápisů číslic (znaky 0, 1, 2, …, 9), zápisů čísel pomocí těchto číslic, znaků vyjadřujících rovnost (=) , nerovnost (<, >), znaků operací (+, −, · , :), závorek, dále pak zápis mocnin, odmocnin, množinové symboliky apod. Pro mnoho dětí je problémem číst správně a s porozuměním matematické symboly, dodržet pořadí provádění operací, použít symboliku ke správnému výpočtu. Překvapivě mnoho dětí má velké problémy právě se čtením symbolů pro porovnávání, kdy obtížně rozlišují a čtou znak pro „menší“ a „větší“ apod.

Pro rozvoj verbálně symbolické komunikace jsou vhodná různá přiblížení, prostřednictvím kterých se pochopení symbolu dětem usnadní.

## – 22 – 4 KOMUNIKACE GRAFICKÁ

Pěstování kultury grafického projevu je nejdůležitějším prostředkem grafické komunikace, neboť pokud jsou děti schopny zachytit myšlenku písemně, svědčí to o jejich dobré matematické úrovni.

Téměř všechny matematické zápisy, jako jsou např. zápisy číslic, zápisy čísel, zápisy algoritmů písemných operací, stručné zápisy zadání úloh, postupu jejich řešení i odpovědi, jsou pro děti zejména s dysgrafií, ale i s dalšími poruchami velmi náročné. Dítě s poruchou pravolevé orientace musí vynaložit velké úsilí, aby si vybavilo, jak se správně píší číslice, které mají jednostrannou orientaci, jako jsou např. 1, 3, 7. Problémy jim činí zápisy dvojciferných čísel, kdy nerozlišují zápis čísel např. 24, 42. Rovněž zápisy čísel s nulami jsou pro děti problematické, když např. číslo pět set šest zapisují buď jako 56 nebo 5006.

Také úprava písemného projevu, která je předpokladem správnosti výpočtu, je pro některé děti obtížně řešitelná. Děti mají problémy s dodržováním stejné velikosti číslic v zápisu čísla, s dodržováním lineatury, se správným zápisem čísel ve schématech algoritmů, v zápisu zlomků, zápisu algebraických výrazů aj.

U některých dětí napomáhají sešity s pomocnými linkami nebo čtverečky, pro mnoho dětí je motivační využití k zápisům počítač. Je však důležité uvědomit si, že upravený písemný projev dítěte není zárukou porozumění a zvládnutí matematického učiva. Často se stává, že zejména děti s poruchami učení opisují z tabule vzorně vedený učitelův zápis, ale vůbec nerozumí tomu, co píší.

## – 22 – 5 KOMUNIKACE GRAFICKY SYMBOLICKÁ

Analogické problémy, které se vyskytují v rámci komunikace grafické, se objevují i při zápisu symbolickém. Vztah číslice, číslo – zápis čísla je projevem pochopení pojmu a jeho grafického zpracování prostřednictvím symbolu. Zápis všech dalších znaků vyžaduje vždy především pochopení té operace nebo těch vztahů, které symbol vyjadřuje. Je pozoruhodné, že pro mnoho dyslektiků je právě symbolický matematický zápis čitelnější, než zápis textem, a tedy je pro ně záchranou. Je to srovnatelné s tím, když člověk čte cizojazyčný matematický text v jazyce, který nezná, ale jeho symbolickým matematickým zápisům rozumí.

## – 22 – 6 KOMUNIKACE OBRAZOVĚ SYMBOLICKÁ

Znázornění matematické situace prostřednictvím obrázku, např. symbolické znázornění slovní nebo konstrukční úlohy pomocí jednoduchého schematického obrázku slabým žákům řešení umožní, ale i šikovným žákům řešení usnadní. Důležité je, aby symbolické znázornění nebylo chybné a vyjadřovalo skutečnou situaci v úloze (např. znázornění slovní úlohy na sčítání a slovní úlohy na porovnávání pomocí vztahů „o několik více“). Dalším příkladem snadnější ilustrace vztahů mezi číselnými údaji jsou např. diagramy užívané ve statistice. Symbolické znázornění čísel v diagramech je mnohem čitelnější než zápis čísel např. v tabulkách.

## – 22 – 7 KOMUNIKACE OBRAZOVĚ NÁZORNÁ

Při komunikaci obrazově názorné děti využívají obrázků ke ztvárnění matematických pojmů a vztahů. Pomocí obrázků je možné dětem přiblížit zadání slovních úloh, nástin jejich řešení aj.

Při znázorňování geometrických útvarů obrázek častokrát usnadní řešení. Zvláštní pozornost vyžaduje grafické znázornění vztahu prostorové situace v rovině, např. ve volném rovnoběžném promítání. Pochopení grafického znázornění prostorové situace v rovině předpokládá jistou úroveň prostorové představivosti. V této souvislosti je možno připomenout požadavek na úroveň písemného a grafického projevu učitele na tabuli.

— — —

Komunikační bariéry v matematice překonáváme výběrem vhodných postupů a cvičení, při kterých se nejprve snažíme v rámci individuálního přístupu odhalit komunikativní cesty a možnosti každého dítěte a následně pak je využít pro jeho úspěšnou práci v matematice.

Pro většinu výše uvedených komunikačních bariér lze nalézt nápravná cvičení, která usnadní dětem jejich komunikační problémy. Avšak nápravná cvičení musí být opřena o vlastní manipulativní činnost dětí, o výuku prostřednictvím zážitků, nikoliv jen o pouhou paměť. Rovněž je nutné dbát na matematickou správnost a preciznost nabízených postupů, protože např. chybným znázorněním se zvyšuje nedůvěra dětí v matematiku a porucha v komunikaci se může ještě prohloubit.

Pozornost by zasluhovalo i zkoumání dalších typů komunikace, např. komunikace nonverbální, komunikace činem aj., které mají rovněž velký význam pro úspěšnost dítěte v matematice.

# Závěr

Výuka matematiky dětí se specifickými vzdělávacími potřebami, zejména s poruchami učení předpokládá, že jsou dostatečně známy příčiny jejich problémů. Příčiny problémů vyžadují provádění podrobné diagnostiky, a to jak z hlediska pedagogicko-psychologického, tak z hlediska možností rozvíjení matematicko-logických schopností. Analýza problémů usnadní postupy reedukace a kompenzace matematických dovedností dětí. V současnosti se ukazuje, že děti s problémy v matematice mohou být nadané, až mimořádně nadané a je třeba zajistit, aby v rámci školní výuky nebyly frustrovány. Předpokládá to pochopení a trvalou emoční podporu jak učitelů, tak rodičů. Nezanedbatelný je také pozitivní přístup samotného dítěte k činnostem a práci v matematice i jeho vnitřní motivace.

V textu je poukázáno na některé možnosti postupů v matematickém vyučování, ale protože problémy dětí jsou výrazně individuální, je potřeba najít vždy postup vhodný právě pro toto dítě. Spolu s výukou matematiky je však nutné zaměřit se na deficity poznávacích funkcí, vnímání, motoriky, paměti, myšlení, řeči, prostorové orientace apod.

Cílem výuky matematiky je taková výuka, která je zbavená formalismu. Děti by se měly učit matematice bez obav, s porozuměním a chápáním její užitečnosti, potřebnosti v běžném životě i její krásy.

# Summary

Teaching math for children with specific educational needs, especially with learning disorders, assumes that the causes of their problems are known. The causes of the problems require detailed diagnostics, both pedagogically and psychologically, and in terms of the possibilities of developing mathematical skills. Analysis of the problems will facilitate procedures for reeducation and compensation of mathematical skills of the children. It is now clear that children with math problems can be talented, even extremely talented, and it is necessary to ensure that they are not frustrated in schooling. It presupposes understanding and permanent emotional support from teachers and parents. Positive attitude of the child to the activities and work in math and to his/her internal motivation is also insignificant.

The text points to options in math teaching, but since the problems of the children are markedly individual, it is always necessary to find a procedure suitable for the specific child. Together with math teaching, however, it is also necessary to focus on the deficits in cognitive functions, perception, motor skills, memory, thinking, speech, spatial orientation, etc.

The objective of teaching math is teaching it without formalism. Children should learn mathematics without fear, with understanding of its usefulness, necessity in everyday life and of its beauty.

# LITERATURA


Balada, F. (1959). *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN.

Blažková, R. (2005a). Co, proč a jak ve školské matematice I. Číslo nula. *Matematika, fyzika, informatika, 14*(5), 257–262.

Blažková, R. (2005b). Co, proč a jak ve školské matematice II. Zlomky. Operace se zlomky – sčítání a odčítání. *Matematika, fyzika, informatika, 14*(5), 257–262.

Blažková, R. (2005c). Co, proč a jak ve školské matematice III. Operace se zlomky – sčítání a odčítání. *Matematika, fyzika, informatika, 14*(8), 263–269.

Blažková, R. (2005d). Co, proč a jak ve školské matematice IV. Operace se zlomky – násobení a dělení zlomků. *Matematika, fyzika, informatika, 15*(3), 136–142.

Blažková, R. (2006). Co, proč a jak ve školské matematice V. Celá čísla, zejména záporná. *Matematika, fyzika, informatika, 16*(4) 203–209.

Blažková, R. (2009). *Dyskalkulie a další poruchy specifické učení v matematice.* Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R. (2013). *Matematická cvičení pro dyskalkuliky*. Stařeč: Infra.

Blažková, R. (2014): *Matematická cvičení pro dyskalkuliky 2*. Stařeč: Infra.

Blažková, R. (2015a). *Zajímavá geometrie pro každého*. Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R. (2015b). *Geometrická interpretace algebraických výrazů*. Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., & Blažek, M. (2007). *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy.* Dotisk 1. vydání. Brno: Paido.

Coufalová, J. et al. (1997). *Metodická příručka k pracovním učebnicím matematiky v prvním ročníku základní školy.* Praha: Fortuna.

Divíšek, J. a kol. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Gamov, G. (2000). *Moje světočára.* Praha: Mladá fronta.

Hejný, M. et al. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. a 2. díl.* Praha: Univerzita Karlova.

Hejný, M. et al. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN.

Kaslová, M. (2010). *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání.* Praha: Raabe.

Košč, L. (1972). *Psychológia matematických schopností.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Krejčová, E. (2009). *Hry a matematika na 1. stupni základní školy.* Praha: SPN.

Kupčáková, M. (2016) *Geometrie v rovině a v prostoru.* In: Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání Matematika a její aplikace. Praha: NÚV.

Matějček, Z. (1987). *Dyslexie.* Praha: SPN.

*Mezinárodní klasifikace nemocí* (2013). 10. revize, část F 81.2. 3. vydání. Cit. 25. 7. 2016. Dostupné na www.mudr.org/web/mkn 10-treti- vydani-aktualizace 2013.

*Národní strategie finančního vzdělávání* (2010). Praha: Ministerstvo financí.

Novák, J. (2004). *Dyskalkulie.* Havlíčkův Brod: Tobiáš.

Pavlíčková, L. (2014). *Poruchy matematických schopností žáků s dyskalkulií a jejich vliv na řešení učebních úloh ve fyzice a v matematice* (Disertační práce). Brno: Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita.

Piaget, J. (1997). *Psychologie dítěte.* Praha: Portál.

Pokorná, V. (2010). *Vývojové poruchy učení v dětství a dospělosti*. Praha: Portál.

Prouza, T. (2011). Nesmíme se bát ptát se, vyjednávat o nepříjemných věcech a plánovat své finance na déle než dva roky. *Moderní vyučování, 16*(9–10), 11–13.

*Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání.* (2006). Praha: VÚP.

Simon, H. (2006). *Dyskalkulie.* Praha: Portál.

Zelinková, O. (2003). *Poruchy učení.* Praha: Portál.

Zelinková, O. (2001). *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací program*. Praha: Portál.

# REJSTŘÍK

# DIDAKTIKA MATEMATIKY

## SE ZAMĚŘENÍM NA SPECIFICKÉ PORUCHY UČENÍ

RNDr. Růžena Blažková, CSc.

Ediční řada: Matematika a didaktika matematiky
Svazek 2

Vydala Masarykova univerzita, Žerotínovo nám. 617/9, 601 77 Brno
Jazykové korektury Mgr. Simona Šebestová, Ph.D.
Grafický návrh Mgr. Jana Nedomová
1., elektronické vydání, 2017

ISBN 978-80-210-8674-6

Publikace je věnována některým didaktickým postupům při výuce matematiky žáků se specifickými vzdělávacími potřebami, zejména žáků se specifickými poruchami učení i žáků, kteří mají problémy v matematice způsobené jinými příčinami. Problematika specifických poruch učení je středem zájmu pedagogické i rodičovské veřejnosti. Text je věnován jednak specifickým poruchám učení a jejich vlivu na úspěšnost žáků v matematice, jednak některým postupům, které se při výuce žáků osvědčily. Pozornost je věnována analýze jednotlivých elementárních jevů a logické výstavbě učiva matematiky, která by měla být při výuce respektována. I když uvedené postupy vycházejí z dlouholetých zkušeností práce se žáky s problémy v matematice, je třeba respektovat výrazné individuální potřeby jednotlivých žáků a jejich přístup k chápání matematických pojmů. Volba metod práce závisí na kreativitě jednotlivých vyučujících. Publikace je zaměřena na učivo matematiky prvního i druhého stupně základní školy, zejména na problémy žáků v oboru přirozených čísel, desetinných čísel, celých čísel a zlomků. Je uvedena část týkající se rozvoje matematické gramotnosti a finanční gramotnosti. Tuto knihu mohou využít učitelé matematiky prvního i druhého stupně základní školy, speciální pedagogové a také rodiče i prarodiče, kteří chtějí svým dětem účelně pomoci při zvládání matematiky.

**Matematika
a didaktika matematiky**

muni
PRESS