# Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice

Irena Budínová

Masarykova univerzita
Brno 2018

MUNI
PRESS

Tuto knihu věnuji své matce, RNDr. Růženě Blažkové, CSc.,
která mě již po mnoho let inspiruje svými rozsáhlými znalostmi
a zkušenostmi na poli didaktiky matematiky a svým entuziasmem
pro tento obor.

# PŘÍSTUPY NADANÝCH ŽÁKŮ 1. A 2. STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

## K ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH TYPŮ ÚLOH V MATEMATICE

Irena Budínová

Masarykova univerzita
Brno 2018

Edice: Matematika a didaktika matematiky
Svazek 4

Recenzovaly:
doc. PhDr. Šárka Portešová, Ph.D.
doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.



ISBN 978-80-210-9216-7
ISBN 978-80-210-9215-0 (brož. vaz.)

https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9216-2018

# OBSAH

**Předmluva** 7

**Úvod** 9

**Teoretický rámec**

**– 1 – Nadání a nadaný žák** 11
– 1 – 1 Nadání a talent 11
– 1 – 2 Nadané děti 12
– 1 – 3 Inteligence 13
– 1 – 4 Inteligenční kvocient 14
– 1 – 5 Novější pohledy na teorii inteligence a nadání 17
– 1 – 6 Různé typy nadaných žáků 19
– 1 – 6 – 1 Podvýkonní nadaní žáci 20
– 1 – 6 – 2 Žáci s dvojí výjimečností 20
– 1 – 7 Matematické nadání 23
– 1 – 8 Identifikace nadaných žáků 25
– 1 – 9 Nálepkování nadaných žáků 26
– 1 – 10 Žáci nadaní na matematiku a výuka matematiky 28
– 1 – 11 Řešitelské strategie u nadaných žáků 29

**– 2 – Úlohy rovnicového charakteru** 31
– 2 – 1 Vymezení pojmů 31
– 2 – 2 Historický vývoj řešení algebraických úloh 33
– 2 – 3 Propedeutika algebraického myšlení 35
– 2 – 4 Úlohy rovnicového charakteru v RVP, Standardech a vybraných učebnicích 41
– 2 – 4 – 1 Kroky vedoucí k pochopení řešení rovnic a jejich zastoupení v učebnicích pro 1. a 2. stupeň ZŠ 42
– 2 – 5 Matematická úloha a její řešení 47
– 2 – 6 Úlohy rovnicového charakteru a způsoby jejich řešení 48
– 2 – 6 – 1 Slovní úlohy 49
– 2 – 6 – 2 Aritmetické úlohy 55
– 2 – 6 – 3 Početní geometrické úlohy 56

**Výzkumná část**


**– 3 – Výzkumné šetření na 1. stupni základní školy 57**
– 3 – 1 Cíl a výzkumné otázky 58
– 3 – 2 Výzkumný vzorek 58
– 3 – 3 Výběr a charakteristika úloh 60
– 3 – 4 Analýza dat 63
– 3 – 5 Výsledky 64
– 3 – 6 Diskuse a závěry 74
– 3 – 7 Typy nadaných žáků a jejich přístupy k řešení úloh 77
– 3 – 7 – 1 Identifikace zástupců jednotlivých profilů 77
– 3 – 7 – 2 Mini-případové studie 77
– 3 – 8 Závěr a omezení výzkumu 93

**– 4 – Výzkum na 2. stupni základní školy 95**
– 4 – 1 Výzkumné otázky a hypotézy 96
– 4 – 2 Výzkumný vzorek 97
– 4 – 3 Předvýzkum 99
– 4 – 4 Test a a priori analýza úloh 104
– 4 – 5 Průběh výzkumu 109
– 4 – 6 Analýza dat 111
– 4 – 7 Kvantitativní analýza výsledků 112
– 4 – 7 – 1 Úspěšnost žáků v úlohách 112
– 4 – 7 – 2 Testování hypotéz 114
– 4 – 7 – 3 Provádění zkoušek správnosti 131
– 4 – 7 – 4 Shrnutí výsledků 132
– 4 – 8 Kvalitativní analýza výsledků 134
– 4 – 8 – 1 Postupy volené žáky u jednotlivých úloh 134
– 4 – 8 – 2 Vybrané skupiny žáků 163
– 4 – 9 Shrnutí a diskuse 167
– 4 – 10 Limity výzkumu 170

**– 5 – Dospělí nadaní a jejich vzpomínky na školu 173**
– 5 – 1 Výzkumná sonda – vzpomínky matematiků a fyziků na školu 174
– 5 – 2 Výsledky 175
– 5 – 3 Shrnutí 180

**Závěry 183**

**Diskuse 185**

**Doporučení do praxe 189**

**Literatura 191**

# PŘEDMLUVA

Před pěti lety mě kontaktovali nešťastní rodiče Lukáše. Lukáš nastoupil z Montessori mateřské školy do základní školy, kde si neporozuměl s paní učitelkou. Lukáš byl mírně instabilní, avšak rozumově předstihoval své spolužáky. Již při nástupu do 1. třídy uměl číst. Ve třídě však bylo pod jeho úroveň předčítat jako ostatní děti ve slabikáři „MÁ-MA". Paní učitelka usoudila, že neumí číst vůbec. Lukáše velmi zajímala matematika, ale nebavily ho úlohy, které řešili spolužáci, např. 2 + 3. Rád sčítal s přechodem přes základ deset, i víceciferná čísla (např. 122 + 15), odčítal i do záporných čísel (3 – 10 = –7), seznámil se s násobením. Paní učitelka ho však hodnotila spíše za úpravu než za počítání. Lukáš měl ale se psaním problémy, projevovaly se u něj projevy poruchy učení, dysgrafie. Měl rovněž potíže v oblasti pravolevé orientace, číslice 3, 6, 9 psal zrcadlově obráceně. Lukáš zažíval frustraci z toho, že v matematice nebyl známkován za postup, ale za psaní číslic. Začínal být proto demotivovaný, zaujal vůči paní učitelce obranný postoj.

Paní učitelka nevěřila, že Lukáš je rozumově nadaný, proto rodiče s Lukášem navštívili pedagogicko-psychologickou poradnu. Projevilo se nadání pro matematiku. Problém ale byl v tom, že Lukášovi stačilo, když něco pochopil. Pak už se jeho zájem stáčel k něčemu dalšímu, látku si dostatečně neprocvičil a nezapamatoval. Bylo potřeba najít činnosti nebo příklady, které by ho natolik zaujaly, že by si nevědomky osvojoval a procvičoval dovednosti. To se ale ve škole nedělo a Lukášova demotivace rostla.

Výrazně se projevil Lukášův problém s pravolevou orientací při psaní číslic. Učitelka slíbila, že Lukáše bude v matematice známkovat pouze za výpočty, nikoli za úpravu nebo psaní čísel. Lukáš však i nadále dostával horší známky, protože nedokázal správně zapsat číslice. Mnohdy se stalo, že všechny výpočty byly správně, avšak známka byla snížena za zrcadlově psané šestky nebo trojky.

Lukáše to ve škole přestávalo bavit. Neustále byl známkován za špatně napsaná čísla, učitelka nenašla efektivní způsob, jak Lukáše naučit číslice správně psát. Byla přesvědčena o tom, že když Lukáš bude každý den trénovat psaní čísel, zlepší se. Lukáše však nebavilo zbytečně přepisovat čísla nebo počítat lehké příklady. Bavilo ho ale, když mu táta zadával úlohy jako 10 000 000 000 – 1.

Ve třídě nebylo pro Lukáše příliš příznivé klima. Často se soutěžilo, úspěšné děti dostávaly sladkosti nebo razítko srdíčka, neúspěšné děti dostávaly razítko šklebící se hlavičky. Lukášovi soutěžení nevyhovovalo, rád se zahloubal do problému, rychlost pro něj nebyla důležitá. Lukáš byl situací ve třídě stresován, začal koktat.

Během druhého pololetí 1. ročníku se situace velmi vyhrotila. Lukáš plakal při plnění domácích úkolů, jeho koktání se zhoršovalo během týdne a zlepšovalo během víkendu. Přestávaly ho bavit běžné úkoly, které měl dříve rád. Do školy chodil nerad. Před realitou utíkal k tabletu, jeho matka říkala, že to už je jediná činnost, u které se dokáže uvolnit. Rodiče situaci vydrželi do konce školního roku, potom však vyjednali změnu školy. Nová škola a nová paní učitelka Lukášovi mnohem více vyhovovaly, situace se uklidnila.

Od této chvíle jsem se setkávala s dalšími žáky, kteří měli nadprůměrně rozvinuté matematické myšlení, ale jejich školní hodnocení odpovídalo žákům průměrným či podprůměrným. Někteří z těchto žáků měli kromě nadání specifickou poruchu učení, někteří byli hyperaktivní, někteří byli emočně nestabilní. Jejich školní projevy neodpovídaly obrazu nadaného žáka, vždy připraveného a hlásícího se, komunikativního, ochotného pomáhat slabším spolužákům.

Začala jsem se zabývat otázkou, jaké jsou vlastně projevy nadaných žáků ve výuce matematiky, zda u nich existují převládající strategie řešení matematických úloh, jimiž by se lišili od běžných žáků, zda se vyznačují tím, že se při řešení dopouštějí méně numerických chyb než běžní žáci apod. Rovněž mě zajímalo, které úlohy jsou pro nadané žáky inspirující a posouvají je dál ve vývoji matematického myšlení.

V té době, v roce 2013, začínal dvouletý projekt Fakulty sociálních studií a Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity pod záštitou doc. Šárky Portešové, která se po mnoho let zabývá nadanými žáky, zejména žáky s dvojí výjimečností. Tento projekt mi přinesl mnoho cenných zkušeností a zejména zájem o tuto problematiku. Nadále jsem se zajímala o problémy nadaných žáků ve výuce matematiky.

Zkušenosti, které jsme získaly se žáky z projektu, a hlavně úlohy, které jsme jim zadávaly, jsme s kolegyněmi z Pedagogické fakulty využily pro vydání publikací *Matematika pro bystré a nadané žáky 1. stupně* a *Matematika pro bystré a nadané žáky 2. stupně* (Budínová et al., 2016; Blažková & Budínová, 2017).

Tuto publikaci jsem se rozhodla vypracovat jako mezník mé dosavadní pětileté práce, v němž uplatním nabyté poznatky a zkušenosti z práce s nadanými dětmi a který bude sloužit jako výchozí bod pro moji další práci tím, že si odpovím na některé otázky, které jsem si položila – zejména zda u nadaných žáků existují převládající strategie řešení matematických úloh.

# ÚVOD

Podnětem ke zpracování publikace byly otázky mnoha rodičů, jejichž děti vykazovaly v předškolním věku řadu výjimečných vlastností, ale ve škole nebyly spokojeny. Při přechodu do školní docházky nastaly problémy, děti se nerozvíjely a ztrácely zájem o školní vyučování. Položila jsem si otázku, jaké typy matematických úloh je vhodné nabízet nadaným žákům, aby byl plně využíván jejich potenciál, a jaké strategie řešení mohou učitelé od nadaných žáků očekávat. Jako nosné téma se mi v tomto ohledu jevil přechod od aritmetiky k algebře a úlohy rovnicového charakteru, které žákům nabízí širokou paletu řešitelských strategií.

Cílem publikace je vyhodnotit přístupy k řešení matematických úloh různými skupinami žáků vzhledem k nadání, a to během 1. i 2. stupně základní školy. Z výše uvedených důvodů byly pro testování vybrány úlohy rovnicového charakteru. Problematiku vzdělávání nadaných žáků jsem se však rozhodla pojmout v širším kontextu. Čtenář bude seznámen s aktuální koncepcí vzdělávání nadaných žáků i s historickým vývojem pohledu na nadané.

Publikace je členěna do 10 kapitol. První tři části jsou věnovány teoretickým východiskům, problematice nadaných dětí a jejich identifikace, problematice podvýkonnosti či dvojí výjimečnosti, problematice matematického nadání a jeho projevů. Čtenář se v této části může seznámit s různými pohledy na nadání a s různými typy nadání v závislosti na druzích inteligence. Jsou uvedeny případové studie několika žáků, se kterými jsem měla možnost během posledních pěti let pracovat. Na těchto ukázkách je možné sledovat, že nadaní žáci mají velmi rozdílné projevy. Jejich výkony jsou ovlivněny druhem inteligence, který u nich převládá, ale rovněž prostředím, ve kterém se vzdělávají. Pozornost je dále v rámci první části věnována vzdělávání nadaných žáků, vlivu rodiny a učitelů. Čtenář má dále možnost seznámit se s problematikou rozvoje algebraického myšlení a přechodem od aritmetiky k algebře, ke kterému by na základní škole mělo docházet.

Druhá část obsahuje výzkumná šetření, která byla prováděna postupně v letech 2013–2017 se žáky 1. a 2. stupně ZŠ. U žáků 1. stupně se jednalo o analýzu žákovských řešení úloh rovnicového typu, tj. slovních úloh, které vedou k řešení pomocí rovnice. Jsou ukázány různé přístupy k řešení a rovněž chyby, kterých se žáci dopouštějí. Pro žáky 2. stupně byl vytvořen test sestávající rovněž z úloh rovnicového charakteru. Byla provedena kvantitativní i kvalitativní analýza výsledků žáků, zaměřující se na různé metody řešení, které žáci volili, a na schopnost přistoupit k řešení úlohy, když nejsou seznámeni s postupem řešení úlohy v rámci školní výuky.

Poslední tři kapitoly jsou věnovány závěrům, diskusi a doporučení do praxe. Závěry mohou být podkladem pro výzkumníky, kteří se chtějí věnovat problematice vzdělávání nadaných žáků v matematice. Uvedené poznatky mohou rovněž sloužit studentům učitelství matematiky na ZŠ i učitelům pro rozšíření povědomí o problematice vzdělávání nadaných žáků a přechodu od aritmetiky k algebře, případně i pro další výzkum.

Ráda bych poděkovala RNDr. Marii Budíkové, která provedla kvantitativní analýzu výsledků testu a byla mi velmi ochotnou a trpělivou rádkyní při zpracování dat.

# TEORETICKÝ RÁMEC

# – 1 – NADÁNÍ A NADANÝ ŽÁK

## – 1 – 1 NADÁNÍ A TALENT

V odborné literatuře najdeme různé přístupy k vymezení pojmu nadání, které se od sebe mohou zásadně lišit. Různá pojetí tohoto pojmu se liší především tím, zda nadání souvisí s potenciálem jedince, či s jeho výkony. Některé přístupy proto chápou nadání jako **projev** vynikajícího, nadprůměrného výkonu, jiné jako **potenciál** podávat nadprůměrný výkon v jakékoli hodnotné oblasti, případně jako potenciál rozvíjet svou **kreativitu** (Havigerová, 2011). Hříbková (2009) uvádí, že nadání je často chápáno jako potenciál (potenciálem mohou být myšleny např. schopnosti, motivace, vlastnosti a rysy atd.) na straně osobnosti k určité činnosti podmiňující mimořádný výkon. Problém ale spatřuje v tom, že abychom mohli vyslovit určitý úsudek o potenciálu, musíme podaný výkon jedince porovnat (v dětském věku nejčastěji s výkony vrstevníků v téže oblasti, v dospělosti s výkony ostatních v daném oboru). Na potenciál tedy usuzujeme z výkonů, ty jsou ale ovlivněny celou řadou dalších faktorů.

Můžeme se setkat i s tzv. IQ definicí, která jako nadaného označuje každého, kdo má **nadprůměrnou hodnotu inteligenčního kvocientu**, obvykle IQ ≥ 130 (Havigerová, 2011). Tento přístup je výhodný z pohledu měřitelnosti a také srovnání výkonů nadaných jedinců.

Z různých vymezení pojmu nadání je mi nejbližší to, které nadání chápe jako potenciál pro podávání nadprůměrných výkonů v určité oblasti. To znamená, že jestliže se dítě nenachází v dostatečně stimulujícím prostředí, jeho nadání se nemusí projevit. Nadání proto budu chápat jako „dispozici k projevení nadprůměrných výkonů v jakékoli hodnotné oblasti lidského snažení" (Havigerová, Křováčová et al., 2011: s. 5). Slovní spojení „nadprůměrný výkon" však nelze zaměňovat se schopností plnit úkoly rychleji nebo bezchybně a podobně. Nadání v tomto směru není tak jednoznačně vymezitelné, jak se často očekává.

Pojmy **nadání** a **talent** chápe celá řada autorů synonymně (Hříbková, 2009; Portešová, 2011; aj.). Někteří autoři mezi těmito pojmy rozlišují. Například Gagné (2005) chápe „nadání“ jako vrozenou schopnost neboli vlohu, zatímco „talent“ definuje jako získanou dovednost, která se rozvíjí díky vlivu okolí. V práci budu tyto pojmy používat jako synonyma.

## – 1 – 2 NADANÉ DĚTI

Hříbková (2009) uvádí, že v osobnostněvývojovém přístupu ke studiu nadání bylo velké úsilí věnováno odhalení charakteristických znaků nadaného dítěte. I když je, jak píše, třeba brát v úvahu druh nadání, které modifikuje jednotlivé behaviorální projevy dítěte, přesto se ukazuje, že zejména tři znaky jsou určující. Podle Hříbkové lze tedy za **mimořádně nadané dítě** považovat dítě (2009: s. 45):

- „které velmi záhy ve svých projevech manifestuje vývojovou akceleraci a je těmito projevy nápadné ve srovnání s vrstevníky;
- které podává v určité oblasti (i nekognitivní) vynikající výkony, které jsou ve srovnání s vrstevníky z hlediska kvantity či kvality výjimečné;
- u kterého byl opakovaně zjištěn osobnostní potenciál pro podávání mimořádných výkonů, který se však dosud ve výkonech v daných oblastech běžně neprojevuje (např. intelektový, tvořivý, popř. silný zájem o určitou oblast nebo několik oblastí lidské činnosti projevující se např. vytrvalostí při řešení úkolů a neobvyklými znalostmi aj.).“

Ve školském zákoně je od roku 2004 vymezena skupina **mimořádně nadaných dětí, žáků a studentů**. Školský zákon současně pověřuje zjišťováním mimořádného nadání pedagogicko-psychologické poradny (PPP) a speciálně-pedagogická centra (SPC). Vzdělávání nadaných dětí, žáků a studentů je legislativně zakotveno Zákonem č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), v platném znění, § 16–19, a Vyhláškou č. 27/2016 Sb., o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a žáků nadaných, v platném znění. Za mimořádně nadaného žáka se pro účely této vyhlášky považuje „především žák, jehož rozložení schopností dosahuje mimořádné úrovně při vysoké tvořivosti v celém okruhu činností nebo v jednotlivých oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech“ (Standard komplexní diagnostiky mimořádného [intelektového] nadání, 2016).

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) je vymezena skupina nadaných žáků a skupina mimořádně nadaných žáků následovně: „Nadaným žákem se rozumí jedinec, který při adekvátní podpoře vykazuje ve srovnání s vrstevníky vysokou úroveň v jedné či více oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech. Za mimořádně nadaného žáka se v souladu s vyhláškou č. 27/2016 Sb. považuje žák, jehož rozložení schopností dosahuje mimořádné úrovně při vysoké tvořivosti v celém okruhu činností nebo v jednotlivých oblastech rozumových schopností" (s. 148). Z uvedeného vymezení se jeví, že nadaný žák dává najevo své schopnosti a využívá nadání k podávání nadprůměrných školních výkonů.

## – 1 – 3 INTELIGENCE

Rozumové nadání bývá velmi často spojováno s inteligencí. Solso (2001) uvádí, že není možné uvést jednoznačnou definici inteligence. K pojmu inteligence se vztahuje celá řada forem poznávání, jako jsou vytváření pojmů, zdůvodňování, řešení problémů, tvořivost nebo také paměť a percepce. Solso (2001) uvádí „pracovní" definici inteligence jako „schopnost získat, vybavit si a využít znalostí k porozumění konkrétních a abstraktních pojmů a vztahů mezi nimi a využít znalosti smysluplným způsobem" (Solso, 2001: s. 468). Jedním pohledem na inteligenci, využitelným zejména ve školním kontextu, je tedy schopnost učit se tak, aby byly naučené poznatky využitelné. V běžném životě však není schopnost učit se zdaleka jediným atributem inteligence. Sternberg a Williams (2002) uvádí, že v roce 1986 byly osloveny dvě skupiny expertů a ty definovaly inteligenci pomocí (1) **schopnosti učit se ze zkušenosti** a (2) **schopnosti adaptovat se okolnímu prostředí**. Později byla zdůrazňována také **metakognice** jakožto schopnost porozumět vlastním procesům myšlení a kontrolovat je.

Goleman (2011[1]) uvádí, že od padesátých let 20. století psychologie kladla přehnaný důraz na kognitivní prvky lidské inteligence, a to dokonce i v oblasti emocí. Na sklonku let šedesátých se s příchodem „kognitivní revoluce" psychologie zaměřila především na mechanismy, kterými mysl registruje a uchovává informace, a na podstatu inteligence. Emoce v tomto pojetí neměly v inteligenci místo. Přitom je to podle Golemana právě emoční složka inteligence, která předurčuje to, jak bude jedinec schopen využít svůj potenciál v životě, zda se bude správně rozhodovat, s kým vstoupit do manželství, jaké zaměstnání si vybrat atd.

Inteligence bezpochyby souvisí s pamětí. Podle délky doby, po kterou nabytý poznatek zůstává ve využitelné kognitivní struktuře, rozlišujeme paměť krátkodobou a dlouhodobou. **Krátkodobou paměť** lze vnímat jako mezistanici mezi novými poznatky a **dlouhodobou pamětí**. Mezi receptory a skladištěm našich vědomostí a poznatků (dlouhodobou pamětí) stojí krátkodobá paměť. Její kapacita je omezená, ale plní velice významnou roli. Solso (2001) uvádí, že podle výzkumů Donalda Hebba informace konvertují z krátkodobé do dlouhodobé paměti v případě, že pobyly v krátkodobé paměti dostatečně dlouho. Sám ověm upozorňuje,

[1] Původní vydání v anglickém originále z roku 1995.

že podle jiných výzkumů pouhé držení informací v krátkodobé paměti nezaručí jejich trvalost. Dalším důležitým faktorem je to, aby informace byla zkombinována s nějakým již existujícím, v paměti ukotveným poznatkem. Ve výuce matematiky je důležité, aby žáci uměli využívat jak krátkodobou, tak dlouhodobou paměť, neboť matematické poznatky na sebe navzájem navazují.

Inteligence je někdy spojována s rychlostí řešení úloh. To mnohdy nemusí platit, neboť inteligentní žáci mohou strávit více času, nežli začnou řešit úlohu. Rozhodují se, jak budou řešit úlohu jako celek. Sternberg (1981; cit. dle Sternberg & Williams, 2002) toto plánování nazývá jako „globální plánování", oproti „lokálnímu plánování", které využívají méně inteligentní žáci.

## – 1 – 4 INTELIGENČNÍ KVOCIENT

Na konci 19. století zavedli francouzští psychologové Alfred Binet a Théodor Simon pojem **mentální věk**, tedy něco jako duševní potenciál dítěte. V roce 1912 zavedl německý psycholog William Stern termín **inteligenční kvocient** a vyjádřil jej jako číselný poměr mentálního a skutečného (tzv. **chronologického**) věku, násobeno stem, tj.

$$IQ = 100 \cdot \frac{\text{mentální věk}}{\text{chronologický věk}}.$$

Průměrné IQ má hodnotu 100 a odpovídá lidem, u nichž mentální věk souhlasí s věkem chronologickým. Od této doby byl hodnotě IQ přisuzován značný význam a „nadání bylo definováno pouze jako vysoce nadprůměrný výkon dítěte v inteligenčním testu, nejčastěji chápané jako IQ = 140 a více, i když později posunula většina badatelů hranici na IQ = 130" (Portešová, 2011: s. 18).

Podle Portešové (2011) se význam IQ v 70. letech 20. století začal přehodnocovat. Začalo se projevovat, že IQ není jedinou stránkou, která ovlivňuje úspěch dítěte v pozdějším životě. Rovněž dle Golemana (2011) je IQ jen jednou a nikoli nejvýznamnější složkou předpokladu kvality života. Hledal klíč k pochopení, proč život jednoho člověka vzkvétá, zatímco druhý, stejně inteligentní člověk skončil ve slepé uličce: „Citové schopnosti jsou vyšším nadáním, jež rozhoduje o tom, jak dobře dokážeme použít ostatní naše schopnosti, včetně logického myšlení" (Goleman, 2011: s. 41). Kritizoval testování žáků jednostrannými zkouškami, které se zaměřovaly prakticky jen na dva typy školních dovedností, a to na verbální a matematicko-logické myšlení.

Přestože již dnes většina odborníků souhlasí s názorem, že inteligenční kvocient není dostatečným ukazatelem nadání, stanovení IQ má své nesporné výhody, díky nimž dodnes přetrvává měření IQ u žáků a poté jejich zařazování do určitých kategorií. Výhodami jsou snadná měřitelnost pomocí standardizovaných testů a snadné rozdělení žáků do jednotlivých intervalů podle IQ. Z těchto důvodů uvedu teorii stanovení stupně nadání podle IQ.

Podle výše inteligenčního kvocientu lze odvozovat různé **stupně nadání**. Inteligenční kvocient vyjadřuje hodnotu výkonu určitého jedince na stupnici, v níž číslo 100 znamená právě průměrný výkon. Čísla menší než 100 značí různé stupně podprůměrných výkonů a čísla větší než 100 značí různé stupně nadprůměrných výkonů (Havigerová, 2011). Výkon lze rozdělit do určitých intervalů. Ve výzkumech (např. Nordby, cit. dle Havigerová, 2011; Fořtík & Fořtíková, 2007) jsou standardně užívány tyto intervaly a označení (Tab. 1).

*Tab. 1 Jeden ze způsobů rozdělení výkonu v inteligenčním testu do intervalů*

| **IQ** | **Označení úrovně kognitivních schopností jedince** | **Výskyt v populaci** |
|---|---|---|
| 115–129 | Bystrý jedinec | 14,0 % |
| 130–144 | Nadprůměrně nadaný | 2,0 % |
| 145–159 | Vysoce nadaný | 0,1 % |

Podle Laznibatové (2001) jsou rozdíly v pásmech intelektu nad 140 velké a výrazné. „Nad hranicí 130 – a to každých 15 bodů, jde o jiný typ inteligence. (…) Výkony dětí s IQ 145 oproti dětem s IQ 130 jsou asi takové, jako když porovnáme výkon dětí s IQ 130 a 115“ (s. 32). Je-li IQ vyšší než 180, mluvíme obvykle o genialitě.

Zcela jiné intervaly pro míru intelektového nadání nacházíme u Gagného (2005: s. 109), a to následující:

*Tab. 2 Gagného metrický systém intervalů v populaci nadaných / talentovaných (Gagné, 2005)*

| **IQ** | **Označení** | **Výskyt v populaci** |
|---|---|---|
| 120–134 | Mírně nadaný | 1:10 |
| 135–144 | Středně nadaný | 1:100 |
| 145–154 | Vysoce nadaný | 1:1 000 |
| 155–164 | Mimořádně nadaný | 1:10 000 |
| 165 a více[2] | Extrémně nadaný | 1:100 000 |

Podle výše inteligenčního kvocientu lze rozlišovat mezi dětmi **nadanými** a **bystrými**. Jako hranice bystrosti bývá udávána hodnota IQ 115 a jako hranice nadání hodnota IQ 130. Rozdíly mezi dětmi bystrými a nadanými jsou ve výuce patrné.

2 V České republice neexistuje test, který by měřil intelektové nadání v takto vysokých pásmech.

Bystré děti jsou šikovné, dobře se učí a vyhovují jim běžně používané výukové postupy a formy učení. Rozumově nadané děti často nejsou uspokojovány běžnými postupy, vyžadují individuální přístup. Laznibatová (2001) upozorňuje, že v běžné výuce vznikají problémy v důsledku velkých rozdílů v tempu učení, schopnosti abstrakce, v kombinačních schopnostech, ve vyjadřování, v myšlení aj. u různých skupin žáků. Výrazné rozdíly lze sledovat rovněž mezi žáky bystrými (šikovnými, dobře se učícími) a intelektově nadanými. Poukazuje na to Cvetkovič-Lay (1995, cit. dle Laznibatová, 2001), viz Tab. 3.

*Tab. 3 Rozdíly mezi bystrým a nadaným dítětem (Laznibatová, 2001: s. 87)*

| **Bystré dítě** | **Mimořádně rozumově nadané dítě** |
|---|---|
| Zná odpovědi | Klade otázky |
| Zajímá se | Je až neodbytně zvědavé |
| Má dobré nápady | Má neobvyklé nápady |
| Odpovídá na otázky | Zajímá se o detaily, rozpracovává, dokončuje |
| Je vůdcem skupiny | Je samostatné, často pracuje samo |
| Se zájmem naslouchá | Projevuje silné emoce, přitom naslouchá |
| Lehce se učí | Všechno již ví |
| Je oblíbené u vrstevníků | Má raději společnost starších dětí a dospělých |
| Chápe významy | Samostatně vyvozuje závěry |
| Vymýšlí úlohy a úspěšně je řeší | Iniciuje projekty |
| Přijímá úkoly a poslušně je vykonává | Úkoly přijímá kriticky, dělá jen to, co ho baví |
| Přesně kopíruje algoritmy úloh | Vytváří nová řešení |
| Dobře se cítí ve škole | Dobře se cítí při učení |
| Přijímá informace, vstřebává je | Využívá informace, hledá nové aplikace |
| Dobře si pamatuje | Kvalitně usuzuje |
| Je vytrvalé při sledování | Velmi pozorně sleduje |
| Je spokojené se svým učením a výsledky | Je velmi sebekritické |

Již bylo zmíněno, že v současné době se nadání nehodnotí pouze na základě výše IQ. Je patrné, že není vhodné stanovit určitou hranici IQ, od níž budeme jedince považovat za nadané a pod níž se o ně nebudeme zajímat. IQ samo o sobě řekne sice o žákovi mnohé, ale určitě ne vše. Při vzdělávání žáků je třeba vědět, že již bystré děti mohou mít v matematice velmi dobré nápady, mohou mít zajímavé přístupy k řešení úloh, a hlavně si v budoucnu mohou vybrat povolání, v němž budou matematiku aktivně používat.

## – 1 – 5 NOVĚJŠÍ POHLEDY NA TEORII INTELIGENCE A NADÁNÍ

Psychologové si postupně uvědomovali, že nadání nelze ztotožňovat s celkovou inteligencí. Různí žáci mohou mít nadprůměrně rozvinuty některé složky inteligence, zatímco v jiných oblastech jsou slabší. Howard Gardner v roce 1983 vytvořil **teorii multiplikativní inteligence**, v níž rozlišil osm relativně nezávislých inteligencí (Gardner, 2006):

1. **Jazyková inteligence**, používaná při čtení textů, psaní (např. eseje nebo básně), souvislém mluvení a porozumění přednáškám.
2. **Logicko-matematická inteligence**, používaná při řešení matematických problémů, ať už slovních nebo početních, provádění matematických nebo logických důkazů.
3. **Prostorová inteligence**, používaná v každodenním životě při orientování se v prostoru.
4. **Muzikální inteligence**, používaná při hraní na hudební nástroj či zpívání, ale také při porozumění poslouchané hudbě.
5. **Tělesně-kinestetická inteligence**, používaná při sportování, pohybu.
6. **Interpersonální inteligence**, používaná pro porozumění, proč se druzí lidé chovají tak, jak se chovají, při rozhodování se, jak vhodně reagovat na komentáře druhých lidí.
7. **Intrapersonální inteligence**, používaná při porozumění sama sobě – proč přemýšlíme, cítíme a konáme určitým způsobem – a poznání našich silných stránek a limitů.
8. **Přírodní inteligence**, používaná při porozumění živé a neživé přírodě.

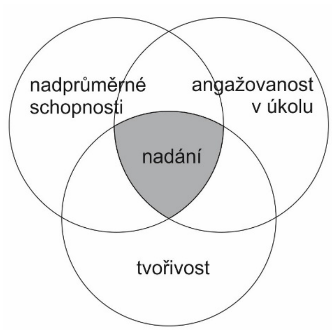
Každý člověk, nejen nadaný, má jednotlivé složky inteligence různě rozvinuté. Může se například stát, že jedinec má vysokou logicko-matematickou inteligenci, ale má méně rozvinutou interpersonální inteligenci. Někdo je vysoce nadaný na jazyky, ale logicko-matematická inteligence je u něj na nízké úrovni. A tak podobně.

Nabízí se otázka, zda je inteligence zcela neměnný atribut, daný pouze dědičností a geny. Alfred Binet, který jako první sestavil v roce 1905 test inteligence, byl přesvědčen, že inteligence se může rozvíjet po celý život (Campbell, 2001). Jeden z jeho žáků, Lewis Terman, byl naopak názoru, že IQ je po celý život neměnný a je dán geneticky. V Americe převažovalo Termanovo stanovisko po většinu 20. století. Ještě dnes někteří autoři zastávají převahu genetického podmínění IQ, např. Herrnstein a Murray (1994) argumentují tím, že individuální diference IQ se stabilizuje přibližně v šesti letech věku. Od této chvíle je tedy podle nich neměnná bez ohledu na způsoby vzdělávání a vychovávání dítěte.

Mnoho psychologů dnes věří, že inteligence může být modifikována (Sternberg & Williams, 2002). Byla přijata idea **genově-environmentální interakce**, v níž se kombinují genové vlivy a vlivy prostředí. Také Carol Dweck uvádí, že inteligence je sice vrozená kvalita každého jedince, ale vedle genů je stejně důležité prostředí, ve kterém se jedinec nachází. Aby geny mohly být úspěšně využity, je potřeba podnětného prostředí, umožňujícího správný vývoj (Dweck, 2006).

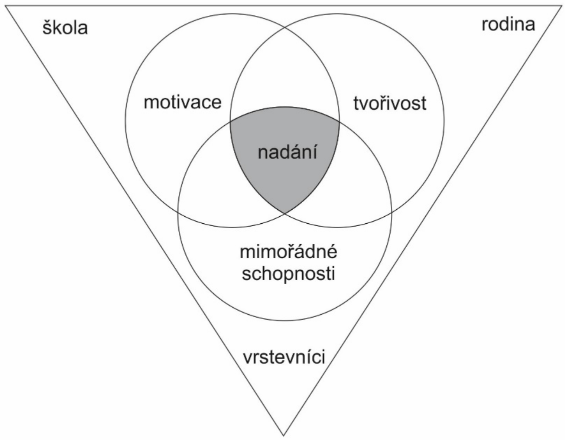
Joseph Renzulli rozlišuje mezi školním nadáním a **tvořivě-produktivním nadáním**. Tvořivě-produktivní nadání mají lidé, kteří tvoří literární díla, divadelní díla, provádí vědecký výzkum nebo vytvářejí jiné hodnoty, které jsou ohodnoceny ve světě mimo školu (Renzulli, 1978). Podle něj nemusí být lidé, kteří jsou nadaní v oblastech souvisejících se školním vzděláváním, tvořivě-produktivně nadaní a také naopak. Renzulli (2005) uvádí, že ze sedmi druhů inteligence, které formuloval Gardner, jsou ve škole ohodnoceny dva druhy inteligence – jazyková a logicko-matematická.

Renzulli (1978) se zabýval výzkumem **tvořivě-produktivních lidí**, kteří dosáhli v určité oblasti jedinečných výsledků a pro něž nebylo možné najít kritérium, které by určilo jejich nadání. Tito lidé se však vyznačovali interakcí tří vlastností, a to nadprůměrnými schopnostmi (nemuselo jít o mimořádné schopnosti), tvořivostí a angažovaností v úkolu. Z nich vytvořil v roce 1978 tzv. **tříkruhový model nadání**, viz Obr. 1.




*Obr. 1 Grafická reprezentace Renzulliho tříkruhové koncepce nadání (Renzulli, 1978: s. 3)*

V roce 1986 upravil Mönks Renzulliho tříkruhový model na **multifaktorový model** (Obr. 2), který zahrnuje i komponenty prostředí. Mönks tedy chápe nadání jako potenciál jedince pro mimořádné či význačné výkony v jedné nebo více oblastech (Mönks, 1987), avšak upozorňuje, že aby mohl být potenciál jakožto charakteristika jedince, daná jeho motivací, kreativitou a mimořádnými schopnostmi, smysluplně využit, musí mít jedinec podnětné sociální prostředí, tvořené zejména školou, rodinou a vrstevníky.




*Obr. 2 Mönksův multifaktorový model nadání (Mönks, 1987: s. 216)*

## – 1 – 6 RŮZNÉ TYPY NADANÝCH ŽÁKŮ

George Betts a Maureen Neihart (1988; 2017) zavedli **šest profilů nadaných dětí**, které jsou uznávané americkou Národní asociací pro nadané děti[3]:

1. **Úspěšné děti**, které jsou oblíbené u učitelů, obdivované spolužáky i rodiči; mají excelentní výsledky ve škole a jsou často vytipovány učiteli; tyto děti, jakož i děti z dalších profilů, se ve škole snadno začnou nudit.
2. **Autonomní děti**, které jsou obdivované pro své schopnosti, jsou vnímány jako ti, kteří uspějí; mají dobré sebevědomí, vysokou vnitřní motivaci; mívají dobré známky.
3. **Skrývači nadání** („underground gifted“), kteří působí tiše a ostýchavě, jako málo odolní a přecitlivělí, jsou vnímáni jako úspěšní průměrní; nejsou si jisti sami sebou, mají nízké sebevědomí; ve škole nebývají identifikováni.
4. **Defenzivní odpadlíci**, kteří jsou vnímáni jako neposlušní, nepřijímají je dospělí ani vrstevníci; jsou stále v opozici, mají na vše vztek; objevuje se u nich nesoulad mezi inteligencí a školními výsledky, jsou vynikající v mimoškolních aktivitách. Tato skupina také bývá u nás označována jako **podvýkonní žáci**.
5. **Provokatéři (kreativní rebelové)**, kteří mívají problémy s disciplínou, působí jako iritující; ve škole se rychle začnou nudit, jsou netrpěliví, často v opozici, mají nízké sebevědomí; ve škole nebývají identifikováni.

[3] National Association for Gifted Children, Washington: https://www.nagc.org/

6. **Děti s dvojí výjimečností (nadané děti s fyzickým hendikepem či s poruchou učení)**, které bývají vnímány jako divné a hloupé, ostatní děti se jim vyhýbají; nedokážou reagovat na požadavky učitele, jsou frustrované, mají nízké sebevědomí, nechápou příčiny svých těžkostí; potřebují velkou podporu.

Mezi uvedenými profily nadaných žáků jsou pro učitele komplikované zejména profily podvýkonných nadaných žáků a dětí s dvojí výjimečností. U těchto skupin žáků se projevuje nesoulad mezi nadáním (často i identifikovaným v PPP) a školními výkony. Z tohoto důvodu se nyní těmito dvěma skupinami nadaných žáků budu zabývat podrobněji.

### – 1 – 6 – 1 Podvýkonní nadaní žáci

**Podvýkonnými dětmi** rozumíme děti, které dlouhodobě školsky neprospívají a potřebují speciální péči, nebo prospívají (mohou mít dokonce samé jedničky), ale nenaplňují svůj potenciál (Siegle, 2012). Podvýkonnost může mít různé příčiny: nepřiměřený tlak okolí na dítě (ať už malý nebo naopak velký), touha zařadit se mezi vrstevníky, nízké sebevědomí aj.

Podvýkonné nadané děti mají společné znaky, které se projevují v oblasti učení i chování. V oblasti učení se jedná zejména o tyto znaky: žák z nějakého důvodu zatajuje své vysoké schopnosti (např. se snaží o přízeň vrstevníků); má chabé pracovní návyky, malou výdrž, nedokončuje práci; obecně má malou schopnost pozornosti, ale dokáže se koncentrovat u činností, které jej baví; je frustrován nečinností a nedostatkem podnětů; často o všem diskutuje, ale má malou schopnost naslouchat atd. (Thomson, 2006). V oblasti chování se jedná nejčastěji o tyto znaky: nedodržuje pravidla kolektivu, je konfrontační; neudrží pozornost; ignoruje potřeby druhých; vyrušuje spolužáky; může se jevit znuděný, frustrovaný, tvrdohlavý a nespolupracující; může se zdát, že zabíjí čas a je duchem nepřítomný; nemá trpělivost se spolužáky, kteří přemýšlejí pomaleji; nekomunikuje dostatečně se spolužáky či učitelem; preferuje samostatnou práci a věnuje se vlastním zájmům; cítí se omezený restrikcemi, pracuje vlastním způsobem a tempem atd. (Thomson, 2006). Snad každý učitel se setkal se žákem, který se projevoval právě takto. Je-li nekonformní chování žáka způsobeno podvýkonností, žák potřebuje ze strany učitele pomoc a trpělivé vedení, aby se postupně začal uplatňovat a rozvíjet jeho talent.

### – 1 – 6 – 2 Žáci s dvojí výjimečností

**Dvojí výjimečnost** je kombinace nadání a určitého postižení či specifických potíží, které mohou ovlivnit učení. Nejčastěji se jedná o dyslexii, dysgrafii, dysortografii, dyspraxii, Aspergerův syndrom, ADHD apod. Děti s dvojí výjimečností vyžadují individuální přístup a velkou trpělivost od učitele.

**Nadané děti s poruchami učení**, nejčastěji s **dyslexií**, tvoří největší část skupiny nadaných s handicapem. Zároveň jde o jedinou skupinu nadaných s postižením, u níž nemusí být jejich handicap zjevný a nápadný (Portešová, 2011).

Definic dyslexie existuje mnoho a často jsou nejednotné. Portešová (2009: s. 20) uvádí nejčastější vymezení dyslexie jako „neočekávané obtíže ve čtení, jež existují u jedinců, kteří mají normální nebo nadprůměrnou inteligenci, motivaci a odpovídající vzdělávací podmínky k dosažení plynulého čtení. Obtíže ve čtení vznikají na základě určitého handicapu, deficitu.“ Jedná se tedy o deficitní vymezení dyslexie. Toto pojetí chápe dyslexii jako problém, který je možné v některých případech kompenzací zmírnit.

Někteří autoři vymezují pozitivní pojetí dyslexie (např. West, 2009), které předpokládá, že jedinci s dyslexií jsou velmi často nadaní, a to zejména ve vizuálně-prostorové oblasti a tvořivosti. Podle těchto autorů není vhodné hodnotit dyslexii jako deficit nebo dokonce zdravotní postižení. Adekvátnější je podle nich vymezit dyslexii jako odlišný způsob zpracování informací, jako **vzdělávací odlišnost** (Portešová, 2009). West (2009) zmiňuje, že řada dyslektiků disponuje určitými schopnostmi, zejména vizuálně-prostorovými schopnostmi, které by byly zcela opomíjeny, pokud by byla pozornost upřena pouze na jejich deficity a handicapy a na reedukaci těchto deficitů. V tomto pojetí jsou dyslexie a nadání dva aspekty téže věci.

Rovněž americký neurolog Geschwind (1982) zastává hypotézu jednoty deficitu a nadání, v níž dyslexie a nadání jsou dva aspekty téhož. Jak je ohodnotíme, záleží pouze na situaci a kontextu.

Čtení není jedinou oblastí, v níž mohou mít žáci s dyslexií problémy. Růžička (2014) upozorňuje na častou koincidenci dyslexie a řečových vad. Děti s dyslexií mívají opožděný vývoj řeči, špatnou výslovnost některých hlásek, mluví rychle a ledabyle, neartikulují.

Portešová (2011) dále upozorňuje, že dle některých autorů (např. Dixon, 1983) lidé s dyslexií upřednostňují neverbální způsob myšlení, a to je mnohem rychlejší než myšlení verbální. Z toho důvodu mohou mít nadaní s dyslexií problém plynule vyjadřovat své myšlenky.

Nadané děti s dyslexií potřebují od učitele matematiky podporu a pomoc v oblasti čtení a psaní matematických zápisů, aby se eliminovaly numerické chyby, aby dokázaly číst s porozuměním jak texty slovních úloh, tak symbolický zápis. Mívají problémy s udržením pozornosti. Učitel by měl být připraven (odborně i morálně) na to, že žáci s dyslexií potřebují více času na plnění úkolů.

Náročná je pro učitele **kombinace nadání a Aspergerova syndromu**, jedné z poruch autistického spektra.

Porucha autistického spektra (PAS) je celoživotní neurovývojová porucha, která má vliv na sociální a komunikační schopnosti jedince, tzn. ovlivňuje to, jak se dotyčný chová k ostatním a jak s nimi komunikuje. Důsledkem poruchy je, že dítě špatně vyhodnocuje informace, které k němu přicházejí (nerozumí dobře tomu, co vidí, slyší a prožívá) – z toho plyne narušení v oblasti komunikace, sociálního chování a představivosti (Thorová, 2016). Mezi nejčastější zástupce PAS patří dětský autismus, atypický autismus a Aspergerův syndrom (též nazýván jako „sociální dyslexie“) (Thorová, 2016).

**Autismus** je neurovývojová porucha, jejíž projevy souvisí s vyzráváním mozku. Jde o poruchu vrozenou. Z hlediska neuropsychologického problémy dítěte vyvěrají z potíží s vnímáním (příjmem) informací, zpracováním informací (problémy v oblasti emocí a myšlení) a integrací informací (oblast metakognice a exekutivních funkcí) (Thorová, 2016). Autisté běžně mívají průměrnou až podprůměrnou inteligenci. Zhruba v jednom z deseti případů se však vyskytuje kombinace autismu a určitých vysokých schopností (Přikryl, 1999). Tito lidé projevují pouze malé či žádné schopnosti logiky, originality a kreativity, mají však fenomenální paměť. Sami neumí své schopnosti využít a většinou jim ani nerozumí a neumí popsat postup, jakým dosáhli výsledku (Přikryl, 1999).

Děti s **Aspergerovým syndromem** mívají obdobné problémy jako děti s autismem. Intelektově jsou dobře vybavené, avšak celkový profil schopností v inteligenčních testech bývá u těchto dětí dosti nevyvážený (Attwood, 2012). Mívají fenomenální paměť. Dítě s Aspergerovým syndromem si sice obdivuhodně vybaví nejrůznější informace, umí vysvětlit význam nejrůznějších slov, ale řešení problémů nebývá jeho silnou stránkou (Attwood, 2012). Jedinci s Aspergerovým syndromem mívají potíže s pružností myšlení, neboli mají přesně nalinkovaný způsob uvažování, který se obtížně mění; vyznačují se rigidním myšlením, nedokážou se přizpůsobit změnám, neumějí přiznat selhání (Attwood, 2012).

Lidé s Aspergerovým syndromem mohou být nadaní téměř ve všech oblastech (v oblasti literární, v psaní poezie, v paměťových dovednostech); jsou mezi nimi rychločtenáři, lidé s vynikajícím matematickým a logickým uvažováním, šachisté, malíři (Thorová, 2016). Mnoho žáků s Aspergerovým syndromem má zájem o matematiku. Tito lidé vysokou rychlostí provádí aritmetické operace. Mají jiný způsob myšlení; postupy, které nám leckdy připadají podivné, jsou pro ně mnohem srozumitelnější a snadnější než ty, jež označujeme za klasické (Attwood, 2012).

Jedinci s Aspergerovým syndromem zdánlivě nemají zájem o komunikaci s druhými, přitom většina z nich touží po kontaktu s druhými lidmi. Problémem je to, že neví, jak v daných situacích reagovat. Mnohdy proto reagují nevhodným způsobem (zahlcují druhé lidi svým tématem, křičí apod.) (Bělohlávková, 2013). Jestliže se jim kontakt s druhými opakovaně nezdaří, cíleně ho již nevyhledávají. Jsou spíše individualisté než týmoví hráči; skupinové aktivity pro ně totiž představují zdroj stresu (Attwood, 2012). Dětem je potřeba pomoci nácvikem sociálních dovedností, zejména v oblastech emocí, neverbální komunikace, komunikace a vztahů s druhými lidmi.

U dětí s Aspergerovým syndromem je nevyhnutelná spolupráce učitele s rodiči. Rodič je pro učitele důležitým zdrojem informací. Rodič učiteli popíše zátěžové situace, vysvětlí, co u dítěte spouští negativní prožívání, a může nabídnout návod na to, jak zátěžovým situacím předcházet a jak je řešit. Učitel může upravovat vzdělávací proces podle potřeb dítěte a svým postojem a chováním vůči dítěti s Aspergerovým syndromem vést kolektiv jeho spolužáků k pochopení odlišností těchto lidí (Mišovcová, 2014).

**Kombinace nadání a ADHD** (poruchy pozornosti s hyperaktivitou) vyžaduje od učitele trpělivost, neboť tito žáci mají tendenci opakovaně vyrušovat, zabývají se jinými činnostmi, než jsou zadány učitelem, mají potřebu pohybové aktivity během hodiny. Efektivní metodou je zaměstnávat jejich mentální aktivitu kvalitativně náročnějšími činnostmi.

## – 1 – 7 MATEMATICKÉ NADÁNÍ

Pro výkony v matematice je určující typ inteligence. Všeobecná inteligence nemusí zcela korespondovat s matematickými schopnostmi žáka. Z Gardnerových (2006) sedmi druhů inteligence, které byly uvedeny výše, mohou ovlivňovat matematické schopnosti **verbální inteligence** (řečové schopnosti, díky nim žáci mohou dobře analyzovat slovní úlohy), **logicko-matematická inteligence** (schopnost rozpoznat, v čem spočívá problém, a vyřešit jej) a **prostorová inteligence** (uplatňující se nejvíce v geometrii).

Pro pochopení matematického nadání je důležité uvědomit si, čím se vlastně liší matematicky nadané děti od ostatních skupin dětí. Psychologové se v této souvislosti zabývali fenoménem zobecňování a pokoušeli se propojit schopnost zobecňovat s hladinou inteligence (Sternberg & Detterman, 1979) a s komplexní schopností řešit problémy (Frensch & Sternberg, 1992). Greenes (1981, cit. dle Sriraman, 2008) tvrdí, že matematicky nadané děti se liší od ostatních skupin dětí schopností spontánně formulovat problémy a pružně organizovat data, dále schopností abstrakce a zobecňování. Matematicky nadaní žáci se odlišují od svých nenadaných vrstevníků výjimečnou schopností usuzování (House, 1987; Johnson, 1983). Tito žáci mohou projevovat mimořádnou paměť, schopnost řešit problémové úlohy neočekávanými způsoby, schopnost odhalovat vzorce a vztahy, radost ze zadávání originálních problémů, preferování řešení problémů na abstraktní úrovni, rychlé učení, dlouhý interval soustředění při provádění činností, které je zajímají, radost z matematických her (House, 1987).

Matematicky nadaní žáci mají obvykle jiný způsob uvažování než ostatní žáci, jejich myšlení je komplexnější, jsou schopni přemýšlet v širokých souvislostech (Sternberg & Williams, 2002). S tím ale nemusí korespondovat schopnost zapsat své myšlenky tak, aby jim někdo další rozuměl. Pro žáka s vysokou matematickou inteligencí může být vyřešení problému tak triviální, že vůbec neví, jak by sdělil či zapsal svůj postup. Proto mnohdy zápis matematicky nadaného žáka spočívá v zapsání výsledku. Jindy zase matematicky nadaný žák postup uvede, avšak symbolice a způsobu uvažování nerozumí nikdo jiný než on sám. Dovednost vyjadřovat své myšlenky a zapisovat postup řešení je možné u matematicky nadaných žáků rozvíjet.

Matematické nadání lze zejména u mladších dětí zaměnit se schopností počítat. Schopnost počítat je jistě sama o sobě nadáním a nelze ji ignorovat, ale pro matematické nadání nemusí být nepostradatelná. Straker (1980) uvádí, že mnozí úspěšní matematici o sobě říkají, že nejsou moc dobří v aritmetice. Nesoulad mezi aritmetickými schopnostmi a schopností logického uvažování může matematicky nadaného žáka zpomalovat při řešení matematických úloh a na učitele to může působit dojmem, že žák je v matematice pomalý, a tudíž nemůže být nadaný.

Matematicky nadané žáky může v řešení úloh dále zpomalovat způsob myšlení, který Sternberg označil jako globální plánování (Sternberg, 1981). Žák při tomto způsobu uvažování úlohu analyzuje předtím, než přistoupí k řešení, což jej může zpomalit.

Matematické nadání je úzce spjato s matematickou tvořivostí. Ervynck (1991: s. 42–43) vytvořil třístupňový model matematické kreativity:

1. **Stupeň 0** se vztahuje k **přípravné technické fázi**, která sestává z určitého druhu technické nebo praktické aplikace matematických pravidel a procedur, aniž by měl řešitel povědomí o teoretickém základu.
2. **Stupeň 1** sestává z **algoritmické aktivity**, která primárně spočívá ve vytváření matematických technik, jako je opakované aplikování algoritmu.
3. **Stupeň 2** se vztahuje ke **kreativní (konceptuální, konstruktivní) aktivitě**. Tato fáze se zakládá na využívání nealgoritmických rozhodnutí a postupů. Rozhodnutí jsou široce divergentní povahy, zahrnují možnosti volby.

Matematicky nadaní žáci tvoří specifickou skupinu v rámci nadaných žáků. Jejich způsob uvažování bývá velmi komplexní, jak již bylo zmíněno, a také divergentní (Ervynck, 1991). Komplexnost jejich myšlení je může zdržovat při plnění úkolů a matematicky nadaní žáci proto mohou selhávat při řešení úloh na rychlost. Z těchto důvodů je poměrně nespolehlivé identifikovat matematicky nadané žáky pomocí didaktického testu. Matematické nadání lze spíše posuzovat dlouhodobým pozorováním žáka, jeho schopnosti chápat nové pojmy, učit se nové postupy, pracovat s chybou a učit se z ní. Pod pojmem **matematicky nadaný žák** proto budu nadále rozumět *žáka, který dlouhodobě vykazuje znaky logicko-matematické inteligence*, která podle mého názoru úzce souvisí se schopností zobecňovat a řešit problémy s lehkostí a vhledem.

Ve výzkumu budu sledovat odlišnosti ve způsobu řešení úloh rovnicového charakteru u matematicky nadaných žáků v porovnání s ostatními žáky.

## – 1 – 8 IDENTIFIKACE NADANÝCH ŽÁKŮ

Nadané děti bývají velmi často vnímány jako děti, které své nadání dávají jednoznačně najevo. Proto se očekává, že se budou projevovat jako elita a budou dosahovat výjimečných výkonů.

Identifikace nadaných žáků je komplexní a dlouhodobá záležitost, na které se podílejí rodiče, učitel, pedagogicko-psychologická poradna a dítě. Problém je někdy v tom, že učitelé za nadané žáky často považují ty, kteří dělají věci jednodušeji, rychleji a lépe ve srovnání s vrstevníky. Nadaní žáci se obvykle projevují jinak nežli spolužáci, avšak ne vždy v pozitivním slova smyslu.

Učitel obvykle provádí prvotní identifikaci a doporučí návštěvu odborného pracoviště, které provede přesnou identifikaci. Komplexní psychologická diagnostika mimořádného nadání by dle Standardu komplexní diagnostiky mimořádného (intelektového) nadání (kolektiv autorů, 2016: s. 35) měla zahrnovat:

- Analýzu dat z rodinné a osobní anamnézy.
- Administraci standardizovaného komplexního individuálního testu rozumových schopností.
- Posouzení tvořivosti.
- Zjištění osobnostních charakteristik a vlastností (včetně sociálních a komunikačních dovedností).
- Analýzu výsledků pedagogické diagnostiky učitelů zaměřené na různé charakteristiky osobnosti dítěte/žáka a na jejich projevy v jeho chování.
- Zjištění specifik práce s učivem a strategií myšlení (učební a kognitivní styly včetně metakognitivních strategií).
- Posouzení pracovních charakteristik a volních vlastností (včetně seberegulace a sebeřízení ve vztahu k učení).
- Analýzu motivace a zájmové činnosti, případně dle potřeby též profesní orientace.

Výrazná akcelerace rozumových schopností se prokazuje splněním jednoho z kritérií A, B (Standard komplexní diagnostiky mimořádného [intelektového] nadání, 2016):

**Kritérium A**: V komplexním testu inteligence je vážené skóre testovaného po zohlednění možné chyby měření alespoň v jedné ze složek rozumových schopností nebo v jednom z indexových skóre minimálně dvě směrodatné odchylky nad průměrem pro danou věkovou skupinu.

**Kritérium B**: Vážená skóre minimálně dvě směrodatné odchylky nad průměrem pro danou věkovou skupinu byly dosaženy v dílčích subtestech, které jsou při zohlednění celého profilu rozumových schopností nebo výjimečně i samostatně dobrými prediktory matematického, technického, přírodovědného, jazykového nebo humanitního nadání.

U matematicky nadaných žáků může být problém s prvotní identifikací nadání. Jako projev nadání bývá vnímána vyšší rychlost řešení problémů. Jenže právě nadaní žáci mohou být naopak při řešení úloh pomalejší, protože se k řešení staví komplexně. Rychlé řešení problémů a memorování symbolů, čísel a formulí nemohou být považovány za indikátor nadání (Wieczerkovski, Cropley & Prado, 2000). Z toho důvodu nemusí matematicky nadaní žáci prokázat své vysoké schopnosti při písemném testování. Někteří matematicky nadaní žáci nejsou u testování schopni podat výkon, který by jejich nadání odhalil (Sternberg & Williams, 2002). Žák může mít různé důvody k tomu, proč v testování neuspěje. Sternberg a Williams (2002) uvádějí, že nejčastěji se jedná o neschopnost řešit problémy rychle nebo nechuť řešit úlohy v okamžiku, kdy probíhá testování. Někdy žáky také nezaujme typ úloh, které se v testu objevují. Matematicky nadaní žáci mohou také narážet na svůj složitý způsob myšlení, kvůli němuž mohou vybrat komplikovanější způsob řešení, ve kterém se dopustí numerických chyb. Navíc, jak již bylo uvedeno, někteří matematicky nadaní žáci mohou být slabí v aritmetice. Z uvedených důvodů vyplývá, že písemné testování nemusí být pro matematicky nadané žáky vhodné a vysoké schopnosti žáků se při něm nemusí projevit.

## – 1 – 9 NÁLEPKOVÁNÍ NADANÝCH ŽÁKŮ

Školní identifikace nadaných žáků může být poznamenána tím, jak učitelé nahlížejí na žáky. Probíhá-li kategorizování lidí podle určitých vlastností, dochází velmi často k vytváření opozitních dvojic, stavění pojmů do protikladů (Vybíral, 2006). Dichotomie lidské myšlení vymezují, ohraničují a polarizují. Stavějí promýšlené „objekty" proti sobě. Někdy vybízejí k identifikaci s jednou nebo s druhou stranou, polarizují výběr. Stanou-li se z objektů lidé nebo jejich vlastnosti, má taková příchylnost k *buď/anebo* za následek zjednodušený závěr (Vybíral, 2006). Toto riziko hrozí i při kategorizaci žáků podle nadání.

Hříbková (2009) uvádí, že žák, který ve škole dosahuje mimořádných výkonů v určitém předmětu ve srovnání s výkony svých vrstevníků, bývá učiteli považován za nadaného. Tato představa o nadání v dětském věku je velmi rozšířená. Do této kategorie mohou patřit žáci nenadaní, kteří svými výkony převyšují spolužáky, nebo nadaní žáci, kteří své nadání dávají najevo (**manifestované nadání**). Děti, které mimořádné výkony v konkrétních oblastech ještě nepodávají, ale byl u nich psychologickým vyšetřením zjištěn osobnostní potenciál, který s vysokou pravděpodobností umožní podávání takových výkonů v budoucnosti, jsou potom označovány jako potenciálně nadané, v tomto případě se jedná o tzv. **latentní nadání** (Hříbková, 2009).

Hříbková (2009) vymezuje rizikové skupiny nadaných dětí, mezi něž patří:

- Nadané děti s extrémně vysokým IQ a vysokými speciálními schopnostmi.
- Nadaní s postižením, s handicapem nebo se specifickými poruchami učení.
- Nadané dívky.

O těchto dětech se šíří ještě dnes zkreslené představy. Žáci z uvedených skupin mají specifické projevy a díky nim je mnoho učitelů, vrstevníků a dalších lidí nepovažuje za nadané. Za jednu z rizikových skupin nadaných dětí se obvykle považují **nadané děti s extrémně vysokým IQ**, většinou nad IQ = 150 (Hříbková, 2009). Tyto děti mají velmi rozdílné individuální profily různých schopností. Mívají potíže s vrstevníky a často se ocitají v sociální izolaci. Leta Hollingworthová, která provedla případovou studii 12 žáků s IQ nad 180 (Hollingworth, 1942), spatřovala příčinu v tom, že tyto děti měly zájmy, znalosti i slovní vyjadřování odpovídající spíše dospělému nežli dítěti. U **nadaných dětí s handicapem** se můžeme setkat s představou, že nadaní reprezentují jeden konec Gaussovy křivky a handicapovaní konec opačný – nadání se proto s handicapem často nespojuje (Hříbková, 2009). **Nadanými dětmi s poruchou učení** se zabývá Šárka Portešová, která zjistila, že pro mnoho učitelů je nepřijatelná myšlenka, že žák může být současně nadaný (projev „chytrosti") a současně mít poruchu učení (projev „hlouposti") (Portešová, 2011). **Nadané dívky** jsou ohroženy očekáváním okolí, které má často k nadaným dívkám negativní postoj a přisuzuje nižší obecnou inteligenci dívkám než chlapcům, a konfliktem nadání a ženské role (žena jako matka) (Hříbková, 2009). Damarin (2000) považuje matematicky nadané dívky za dvakrát znevýhodněné, protože společnost vnímá zájem o matematiku jako méně akceptovatelný u dívek než u chlapců.

Diezmann a Waters (2002) upozorňují, že negativní postoje k nadaným se odrážejí posměšným označením těchto žáků buď jako „malých Einsteinů" nebo „nerdů". Zájmy a schopnosti matematicky nadaných žáků je izolují od ostatních žáků a identifikují je jako „poznamenanou" či „deviantní" populaci (Damarin, 2000).

Hříbková a Páchová (2013) se zabývaly tím, jak čeští učitelé 1. stupně a učitelé matematiky 2. stupně kategorizují žáky. Dle jejich zjištění (na základě analýzy výpovědí učitelů a učitelek) je kategorizování a typizování žáků velmi často dichotomické, jakoby vycházející ze zjednodušené představy o existenci vždy dvou skupin dětí (např. nadané – nenadané). Autorky uvádějí, že pro učitele jsou tyto kategorie důležité z důvodu komunikace mezi sebou, avšak hrozí rizikem nálepkování dětí.

Hříbková a Páchová (2013) dále zjistily, že podle učitelů je úspěšnost dítěte v matematice dána především vnitřními podmínkami, jako jsou inteligence, logika či zralost. Někteří učitelé uvádějí, že pokud žák není pro matematiku přirozeně nadán, nemůže v ní být úspěšný. Další problém shledávají v paměti žáků. Mnozí z učitelů uvádějí, že žáci používají výhradně krátkodobou paměť, rychle zapomínají učivo, které se učili dříve.

Z hlediska kognitivní dimenze rozdělují učitelé 1. stupně žáky v podstatě do tří kategorií: šikovný (bystrý) žák – „inteligentní, má lepší paměť, matematika ho baví a má ji rád, má sebedůvěru, protože zažil více chvil, kdy se mu něco podařilo, má víru v sebe, je rychlejší" (Hříbková & Páchová, 2013: s. 227); průměrný žák; slabý žák – „méně inteligentní, méně šikovný na matematiku, pomalý, neflexibilní, zapomene, co dělá, pracuje, jak je zrovna naladěn, nevěří si, je víc citlivý" (tamtéž: s. 227). V matematice často žáky dělí do skupin logický typ – mechanický typ.

Hříbková a Páchová identifikovaly ve výpovědích učitelů matematiky 2. stupně dvě kategorie kognitivní dimenze: „Dimenze ‚nadání' zahrnuje zmínky učitelů vztahující se k celkové kognitivní úrovni dítěte, či ke specifickému matematickému nadání, často apriorně danému. Dimenze ‚snaha' se pak týká rozdílů mezi dětmi, způsobených pílí, pečlivostí či objemem vynaloženého úsilí" (2013: s. 240). Jedna skupina učitelů je přesvědčena, že pokud chybí nadání, nedá se nic dělat. Jiná skupina učitelů soudí, že snížené nadání je možné částečně kompenzovat pílí či přístupem. Výjimečně učitelé uvažují o možnosti rozvoje nadání, mnohem častěji jde o prostou náhradu nadání za snahu. Autorky si všímají, že učitelé paradoxně hovoří o matematice jakožto předmětu, který rozvíjí logické myšlení, ale následně s ní operují jakožto s něčím, co je logickým myšlením podmíněno.

Ve výpovědích učitelů rozlišily Hříbková a Páchová (2013) čtyři skupiny žáků: **žák nadaný a snaživý** je žák školsky úspěšný, **žák nenadaný a nesnaživý** je žák školsky neúspěšný. Dále učitelé uvádějí kategorii „hloupé snaživky" – žák nenadaný snaživý (učitelé takto častěji vnímají dívky) a „chytrého flinka" – žák nadaný nesnaživý (takto vnímají častěji chlapce). Děvčata jsou často vnímána jako snaživá, pečlivá, s ochotou učit se postupy, ovšem s horšími genetickými předpoklady pro matematiku, neochotou přemýšlet. Chlapci jsou vnímáni jako nesnaživí, líní, neochotní učit se postupy, ovšem s lepšími genetickými předpoklady pro matematiku, ochotou přemýšlet, učit se s porozuměním (Hříbková & Páchová, 2013: s. 251). Havigerová (2011) vysvětluje, že rozdíly v rodových dispozicích jsou způsobeny rozdíly ve struktuře mozku. Ženy mají více bílé kůry mozkové, která souvisí s mnohaúrovňovými úlohami a jazykovým nadáním, zatímco muži mají více šedé kůry mozkové, která zodpovídá za nadání pro matematiku a prostorové úlohy. Genderové rozdíly však nemusí znamenat, že dívky jsou na matematiku méně šikovné.

## – 1 – 10 ŽÁCI NADANÍ NA MATEMATIKU A VÝUKA MATEMATIKY

Pokud by byli žáci správně identifikováni, jaký způsob vzdělávání by pro ně měl být připraven? Zásadním principem vzdělávání nadaných je dle Mönkse a Katzka (2005) **individualizace** a **diferenciace**. Pod pojmem **diferencovaná výuka** matematiky rozumím vytvoření vhodných podmínek pro vzdělávání žáků v matematice vhledem k jejich zvláštnostem a předpokladům. Ve školské praxi je realizována tzv. **diferenciace vnější** (podle typu škol, případně tříd – školy nebo třídy s rozšířenou výukou matematiky) a **diferenciace vnitřní** (výuka matematiky v rámci jedné třídy). Vnitřní diferenciace se uplatňuje tam, kdy v jedné třídě vzděláváme žáky s různými předpoklady, schopnostmi, s různým tempem práce, specifickými vzdělávacími potřebami aj. Vnitřní diferenciace se zpravidla realizuje tzv. individualizovanou výukou (Průcha et al., 1998). Pod pojmem **individualizovaná výuka** rozumím výuku žáka v běžné třídě, kdy se zaměřujeme na obsah učiva, styl výuky, metody práce a specifické zvláštnosti žáka. Celý proces výuky je přizpůsoben vzdělávacím potřebám konkrétního žáka. Zaměřujeme se na výběr vhodných metod práce, které podporují rozvoj tvořivých schopností žáka a zvyšování jeho samostatnosti při výuce matematiky (Průcha et al., 1998).

Rovněž Borland (2005) uvádí, že bychom se měli více zaměřovat na diferenciaci kurikula, aby všechny skupiny žáků byly ve výuce uspokojeny. Kritizuje vzdělávání žáků zaměřené na identifikaci nadaného žáka v rámci určité definice nadání, zařazení do určité kategorie a podle toho do homogenní skupiny žáků, v níž bude vzděláván: „Akceptování těchto (inteligenčních – poznámka autorky) testů jako platného nástroje objektivní vědy vedlo k jejich rozšířenému užívání ve školách, a to k diagnostikování, vedení, seskupování a snad i kontrolování dětí“ (s. 4).

Jako možné způsoby individualizace výuky matematiky se jeví zadávání kvalitativně náročnějších úloh v rámci hodiny (ovšem s následnou diskusí nad řešením úlohy) v souboru gradovaných úloh (Hejný, 2014), zadávání pracovních listů se zajímavými úlohami, nabídka matematického kroužku, příprava žáků na matematické soutěže apod. Ne každému žákovi lze však doporučit Matematickou olympiádu, která je vzhledem k náročnosti určena pro matematicky nadané žáky. Neúspěch v soutěži může některé žáky silně demotivovat. Dalšími soutěžemi jsou např. Matematický klokan či Pythagoriáda, jejichž náročnost je nižší, a tím jsou vhodné pro širší spektrum žáků. Účast žáků na matematické soutěži může ovlivňovat postoje žáků k matematice, třeba kvůli tomu, že se na soutěžích objevují školsky netypické úlohy. Nováková (2016) například uvádí, že Matematický klokan může přispět k celkové pozitivní změně pohledu na matematiku. Dále zmiňuje, že úspěšní řešitelé Matematického klokana se nezřídka najdou i mezi žáky, kteří mají na vysvědčení z matematiky trojku nebo čtyřku. Domnívá se, že tito žáci mají podstatně vyšší potenciál, než mohou projevit v hodinách matematiky.

Aby mohl učitel efektivně pracovat nejen s žáky běžnými, ale i s žáky nadanými, je nutné, aby k tomu byl důkladně teoreticky připraven, a navíc měl ochotu věnovat energii žákům, kteří nezapadají do středního proudu. U nadaných žáků je navíc nezbytné, aby matematické znalosti a zkušenosti vyučujícího byly na dobré úrovni, aby učitel mohl s nadanými žáky o matematice diskutovat.

## – 1 – 11 ŘEŠITELSKÉ STRATEGIE U NADANÝCH ŽÁKŮ

Nadaní žáci mají rozdílné schopnosti, ze kterých vycházejí při řešení problémových úloh. Podle některých studií jsou nadaní žáci úspěšní v těch částech řešení problémů, které jsou spojeny s organizováním dat, používáním pravidel, modifikací zadání, s porozuměním komplexním problémům a vyhledáváním relevantních údajů (Miller, 1990).

Nadaní žáci jsou mnohdy schopni projevovat matematické dovednosti jako jejich starší spolužáci (Sowell et al., 1990). Při řešení problému nejednou používají matematický aparát, který zatím nebyl ve výuce probírán. To souvisí s akcelerací rozumových schopností nadaných žáků, která se v matematice projevuje tím, že žáci si osvojují učivo rychleji než vrstevníci. Jak uvádí Portešová (2011), ze zkušeností s nadanými dětmi vyplývá, že většina dětí, u kterých se v útlém věku projeví nápadná akcelerace rozumových schopností, si určitý vývojový náskok před svými vrstevníky udrží trvale. Existují i děti, které v útlém věku projevují v matematice zrychlený vývoj, ale v určité fázi se ve vývoji zpomalí a posléze jsou jejich schopnosti srovnatelné se schopnostmi vrstevníků (Portešová, 2011). U některých nadaných dětí se naopak můžeme setkat s pozdější akcelerací rozumových schopností (Portešová, 2011). Renzulli (1978) uvádí, že nadaní žáci mají dle některých autorů předpoklad být lepší řešitelé matematických problémů než běžní žáci stejného věku, avšak upozorňuje, že tito žáci nemusí být úspěšní ve standardizovaných testech. U těchto žáků může být tedy problém odhalit nadání testováním.

Jelikož nadaní žáci mají rozvinutější dovednosti kvantitativního a kvalitativního myšlení, jejich dovednost řešit problémy je mnohem větší než u běžných žáků (Knepper, Obrzut & Copeland, 1983).

Výzkumníci, kteří se zabývali řešením problémů nadanými žáky 2. stupně, se většinou zaměřovali na řešení nerutinních problémů. Zjistili například to, že nadaní žáci tráví více času čtením zadání a jeho interpretací vlastními slovy (Garofalo, 1993; Sriraman, 2003).

Linsell (2009) sledoval řešitelské strategie u úloh rovnicového charakteru a porovnával, jaké strategie volí žáci nadaní a jaké běžní žáci. Došel k závěru, že nadaní žáci obvykle používali sofistikovanější strategie pro jednodušší úlohy a přešli k metodě pokusu a omylu u složitějších úloh. Méně nadaní žáci používali metodu pokusu a omylu u jednodušších úloh, zatímco složitější úlohy nebyli schopni řešit žádnou strategií.

Autoři výzkumů většinou nerozlišují žáky nadané a matematicky nadané, přestože matematické nadání je klíčové zejména při řešení problémových úloh.

V mém výzkumu jsem se věnovala způsobům řešení matematických úloh nadanými žáky. Zvažovala jsem, jaké typy úloh žákům zadávat, pokud chci sledovat specifické přístupy i matematicky nadaných žáků. Dle literatury mají nadaní žáci schopnost řešit s lehkostí a vhledem problémové úlohy. Z toho důvodu jsem vybrala úlohy rovnicového charakteru, které jsou typické tím, že je lze řešit aritmeticky i algebraicky. Žáci tedy mají možnost vybrat řešitelskou strategii dle svých schopností.

V následujícím textu pojednám o typech těchto úloh z teoretického hlediska.

# – 2 – ÚLOHY ROVNICOVÉHO CHARAKTERU

## – 2 – 1 VYMEZENÍ POJMŮ

Pod pojmem **matematická úloha** rozumím všechny úlohy, které je možné řešit matematickými prostředky (Květoň, 1982). Jejich součástí je také úloha slovní. Novotná (2000) uvádí, že pro slovní úlohy není sjednocena terminologie, a z toho důvodu není v literatuře ustáleno jednotné vymezení pojmu slovní úloha. Blažková, Matoušková a Vaňurová (2011a) definují slovní úlohy jako úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací. Mnoho autorů při vymezení pojmu slovní úloha vychází z názoru, že slovní úlohy jsou takové úlohy, které mají svůj námět v nějakém reálném, či pseudo-reálném kontextu. Kuřina (1989) uvádí, že „slovní úloha je úloha, kde je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky“ (s. 61).

Postup, jenž z dané reálné situace s reálným problémem vede k úloze matematické nebo k matematické formulaci daných vztahů, se nazývá **matematizace reálné situace** (Divíšek, 1989). K matematizaci situace může žák využít známý algoritmus, může mu pomoci obrázek, ve kterém budou znázorněny vztahy mezi veličinami, a může také použít logickou úvahu, pomocí níž si uvědomí hledané vztahy.

Každá slovní úloha obsahuje údaje, tj. čísla, která potřebujeme k tomu, abychom mohli odpovědět na otázku. Často je volba operace ovlivněna tzv. **signálním slovem**, neboli slovem, které má být spojeno s určitou operací. Toto slovo je v zahraniční literatuře označováno jako **klíčové slovo** (Adetula, 1990), případně **verbální vodítko** (Nesher, 1976). Adetula uvádí, že žáci používají klíčová slova jako „více“, „méně“, „získal“, „dohromady“, „ztratila“, atd. pro výběr operace na základě zkušenosti. Jestliže se např. ve slovní úloze vyskytne spojení „o 2 více než“, je to signál k přičtení dvou. Uvádí příklad použití slova „více“ jako klíčového slova (Adetula, 1990: s. 354): „Mlékař přivezl v neděli o 4 lahve mléka více než v pondělí. V pondělí přivezl 7 lahví. Kolik lahví přivezl v neděli?“

V případě, že takové slovo řešitele zavádí k jiné než správné operaci, jej nazveme **antisignálem** (Hejný, 2014) nebo **distraktorem** (Adetula, 1990; Nesher, 1976). Někteří zahraniční autoři označují úlohy s antisignálem jako **nekonzistentní úlohy** (Fuson et al., 1996). Úloha s antisignálem může být formulována např. takto: *Anička má 15 korálků, což je o 3 více, než má Maruška. Kolik korálků má Maruška?* Spojení „o 3 více než“ je signálem k přičtení 3. Ve skutečnosti se ale jedná o antisignál a žák má od 15 odečíst 3.

Úloha může také obsahovat údaje nadbytečné. Jedná se o číselné údaje, které nejsou k výpočtu potřeba. Pokud si žák nedokáže pro zadání vytvořit správnou aritmetickou představu, tyto nadbytečné údaje může chybně využít.

Podle množství početních výkonů, které potřebujeme k řešení, dělíme slovní úlohy na jednoduché a složené. Slovní úlohu považujeme za **jednoduchou**, jestliže k jejímu řešení postačí použít jeden početní výkon (Divíšek, 1989). **Složená slovní úloha** sestává z několika dílčích, jednoduchých, na sebe navazujících slovních úloh.

Ve škole se žáci setkávají nejčastěji s **typickými slovními úlohami**, u nichž se seznámí s algoritmem, který posléze aplikují. **Problémové úlohy** jsou úlohy, k jejichž řešení žák nemá osvojený potřebný algoritmus, typ úlohy nezná a úlohu musí řešit vhledem.

Podle toho, zda v úloze plyne čas či nikoli, rozlišujeme **dynamické slovní úlohy** neboli úlohy s plynoucím časem, a **statické úlohy**, odehrávající se v jednom čase.

Odděleně od úloh slovních bývají vnímány úlohy, které bych dle klasifikace Vyšína (1962) zařadila do kategorie **aritmetické úlohy** – úlohy, kde se má doplnit neúplný algoritmus některého početního výkonu, nebo určit algoritmus, v němž jsou jednotlivé číslice nahrazeny písmeny; jde tedy o úlohy, které slovně popisují určité vztahy mezi čísly (např. úloha: *Myslím si číslo. Když k němu přičtu 8 a výsledek vydělím čtyřmi, dostanu 9. Které číslo si myslím?*).

Dále budu používat termín **algebraická slovní úloha**, čímž myslím slovní úlohu, která je řešitelná algebraickými prostředky. Speciálním případem algebraických úloh jsou **úlohy rovnicového typu** či **charakteru**, jimiž Hejný (1990) chápe různé úlohy, které je možné řešit pomocí rovnice. Rozlišuje úlohy rovnicového charakteru podle formy zadání na **slovní** a **schematické či obrázkové**.

Úlohou rovnicového charakteru budu tedy označovat **slovní úlohu**, případně **aritmetickou** úlohu nebo **početní geometrickou úlohu**, která je řešitelná algebraicky, a to sestavením rovnice nebo soustavy rovnic.

## – 2 – 2 HISTORICKÝ VÝVOJ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ÚLOH

První „náznaky algebry“ spadají do doby kolem roku 2 000 př. n. l., kdy byly řešeny úlohy, které dnes řešíme pomocí rovnic.

Zpočátku nebyly známy znaky pro početní výkony, zapsání rovnosti či nerovnosti mezi čísly; všechny vztahy mezi matematickými veličinami byly vyjadřovány slovy a větami. Toto období nazýváme obdobím **verbalistickým** (Polák, 2014). V *Rhindově papyru*, pocházejícím ze starověkého Egypta přibližně z doby 1650 př. n. l., jsou obsaženy slovní úlohy na určení neznámé veličiny *h* (čte se „hau“). Můžeme se zde setkat s úlohami vedoucími k lineární (výjimečně kvadratické) rovnici, např.: *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15.* V papyru je úloha řešena **metodou falešného (chybného) předpokladu** (Polák, 2014). Řešitel nejprve předpokládá, že hledané množství je rovno čtyřem, protože ze čtyř určí jednoduše čtvrtinu. Dostává $4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$, tedy třetinový výsledek. Hledané číslo musí být proto třikrát větší než 4, tj. 12. Uvedená metoda se používala v úlohách se zlomky a její princip spočíval v tom, že „falešný předpoklad“ byl takové číslo, aby dosazením ze zlomků vznikla celá čísla.

V Mezopotámii se od druhého tisíciletí př. n. l. řešily různé úlohy, vedoucí k lineární, kvadratické i kubické rovnici a také k soustavám rovnic, např.: *Součet obsahů dvou čtverců je roven 1 525 jednotek obsahu. Strana jednoho čtverce je o 5 délkových jednotek větší než dvě třetiny strany druhého čtverce. Vypočtěte délky stran obou čtverců* (Polák, 2014). U většiny babylónských úloh nemůžeme jednoznačně určit použitý postup řešení, neboť hliněné tabulky obsahují jen zadání a případně výsledek. Čtverce z předchozí úlohy mají rozměry 30 a 25 délkových jednotek.

Kolem roku 500 př. n. l. řešili Řekové úlohy, které dnes řadíme do algebry, geometrickými prostředky. K rozvoji algebraické symboliky sice nepřispěli, ale rozvinuli užívání geometrických úvah k řešení úloh algebraického charakteru. Hovoříme o **geometrické algebře Řeků** (Polák, 2014). Až teprve *Diofantos z Alexandrie* kolem roku 250 př. n. l. ve svém spisu o rovnicích nazvaném *Aritmetika* užil některé symboly, které dnes nazýváme algebraickými. Zavedl znak pro neznámou a její mocniny, znak pro rovnost a znak pro odčítání (Kvasz, 2007). Diofantem bylo zahájeno druhé období vývoje algebry, kdy některé vztahy mezi matematickými veličinami byly popisovány slovy a větami, jiné byly již zapisovány zvláštními symboly. Diofantos zavedl některé symboly, proto je někdy označován za otce algebry (Mareš, 2011), avšak Kvasz (2013) oponuje, že v jazyce Diofanta chybějí algebraické operace a jsou použity pouze operace s čísly. Proto podle něj Diofantos představuje spíše jedno ze závěrečných stadií antické aritmetiky než zárodek algebry. Toto období nazýváme obdobím **synkopickým** (Polák, 2014). Trvalo až do konce 15. století n. l., tj. až do doby, kdy vývoj v matematice dospěl k zavedení znaků pro operace a používání písmen ve významu čísel.

Nejvýznamnějším matematikem synkopického období byl tádžický matematik *al-Chowárizmí* (asi 780–850). Shromáždil praktické výpočetní postupy pro numerické řešení matematických úloh. Vytvořil také praktické postupy pro počítání (sčítání, odčítání, násobení a dělení) čísel, vypracoval podrobné mechanické postupy při řešení rovnic a zvládl počítání se zlomky (Mareš, 2011).

Al-Chowárizmí nepoužíval znaky a vše popisoval slovně. Pro označení mocnin neznámé používal různé termíny. Pro dnes užívané $x$ používal slovo šai (věc) a pro $x^2$ slovo *mál* (majetek). Při řešení úlohy tato slova vypisoval (Kvasz, 2013). Al-Chowárizmí byl schopen řešit kvadratickou rovnici, a to tak, že ji nejdříve převedl na tvar, ve kterém vystupovaly pouze kladné koeficienty a u nejvyšší mocniny byla jednotka. Operace *al-džabr*, kterou při tom používal (pokud na jedné straně rovnice vystupují členy, které je třeba ubrat, tak se k oběma stranám přičte odpovídající hodnota), dala jméno celé nauce o rovnicích (Kvasz, 2013).

Nejvýznamnějším matematikem středověké Indie byl astronom a matematik *Brahmagupta* (asi 596 – asi 668). Byl mezi prvními, kteří zkoušeli zavést algebraickou symboliku, i když jinou, než jakou užíváme dnes. Také jeho následovník *Bhaskara II* ve 12. století zaváděl symboly pro neznámé, avšak ve svých pracích čtenáře spíše odrazoval od jejich používání, pokud je možné problém řešit aritmetickým úsudkem, například s využitím poměru (Subramaniam & Banerjee, 2011). Bhaskara II byl dalším z matematiků, kteří k řešení úloh využívali metodu falešného předpokladu. Řešil například následující úlohu (Juškevič, 1978): *Ze svazku čistých lotosů byly jedna třetina, pětina, resp. šestina postupně obětovány bohům Šivovi, Višnovi či Šúrjovi a čtvrtina byla obětována Bhavanimu. Zbývajících šest bylo darováno vysoce váženému hodnostáři. Rychle mi řekni, kolik bylo lotosů?* Bháskara za počet lotosů volí číslo 60, což je nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 5, 6. Při dosazení tohoto čísla do zadání zbývají tři lotosy a ne šest, proto je řešením úlohy číslo 120.

V první polovině 13. století používal také *Leonardo Pisánský* (asi 1170–1250) písmen k označení pro čísla, a to ve spisu *Liber abaci*. Největší zásluhu na důsledném zavedení písmen ve významu čísel měl francouzský matematik *Francois Viète* (1540–1603), který ve spise *Logistica speciosa* tato písmena používal. Sepsal dílo *Úvod do analytického umění* (slovo analýza v té době označovalo algebru), jehož cílem bylo sjednotit různé postupy, které se používaly k řešení rovnic. Viètovou hlavní inovací bylo, že zavedl rozlišení neznámé a parametru (Kvasz, 2007). Navrhoval označovat známé veličiny velkými souhláskami (B, C, D atd.) a neznámé veličiny velkými samohláskami (A, E, I atd.).

Algebraická symbolika byla dále zdokonalována v 17. století *René Descartem* (1596–1650), který mimo jiné navrhl označovat známé veličiny písmeny z počátku abecedy a neznámé veličiny z konce abecedy. Jeho symbolika ve velké míře přetrvala dodnes.

Třetí období vývoje algebraické symboliky se vyznačuje používáním symbolů a znaků pro matematické operace, exponenty, využíváním písmen ve významu čísel a trvá od 15. století až do dneška. Nazývá se obdobím **symbolickým** (Polák, 2014).

Nyní pojednám stručně o rovnicích. Rovnice se v historii velmi dlouhou dobu zapisovaly **slovně** a jejich řešení se uváděla v podobě regulí, tedy **postupů zapsaných v přirozeném jazyce** (Kvasz, 2013). Al-Chowárizmí například ve své knize *Krátká kniha o počtu algebry a al-muqábaly* nepoužíval symboliku, ale vyjadřoval vše slovně. Chápání řešení rovnice jako série úprav formálních výrazů se objevilo až téměř 800 let po zrodu algebraického myšlení, a to v roce 1591 u Vièta.

Kvasz (2013: s. 320) uzavírá: „Zdá se, že v tomto bodě se vyučování zcela rozchází s historií. Namísto kultivace algebraického myšlení, tedy řešení různých slovních úloh (…) prostřednictvím přirozeného jazyka, se vyučování zpravidla zaměřuje na nácvik formálních pravidel symbolické manipulace s algebraickými výrazy. Namísto u Al-Chowárizmího, Pacioliho nebo Cardana začíná výuka algebry až od Descarta. Tím odvádí pozornost od obsahu, tj. algebraického myšlení, k formě, tj. symbolice, která, zdá se, rozvoji algebraického myšlení spíše brání, než napomáhá.“

## – 2 – 3 PROPEDEUTIKA ALGEBRAICKÉHO MYŠLENÍ

Algebra jako taková se na 1. stupni základní školy nevyučuje. Z historických souvislostí je však známo, že aritmetika v sobě skrývá algebraický způsob myšlení. To znamená, že již na 1. stupni je možné v rámci aritmetiky působit na žáky tak, aby postupně rozvíjeli předalgebraické a posléze algebraické myšlení.

Během prvních let primárního vzdělávání získávají žáci dovednost sčítat, odčítat, násobit a dělit přirozená čísla. Žáci by měli pochopit vztah mezi operací danou a k ní inverzní (sčítání – odčítání, násobení – dělení). Později pracují s více operacemi současně. Pro pamětní sčítání nebo násobení mohou využívat komutativnosti sčítání a násobení, asociativnosti sčítání a násobení, a distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání, např. $12 \cdot 5 = (10 + 2) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 50 + 10 = 60$. Tím, že je například násobení komutativní a dělení nikoli, je pro žáka zpravidla jednodušší pochopit vztah mezi danými operacemi ve směru od násobení k dělení nežli naopak.

Po celou dobu výuky operací se může formovat algebraický pohled. Například už při sčítání čísel je možné se na věc dívat dvojím způsobem – znám-li oba sčítance, je jen jedna možnost výsledku, zatímco znám-li výsledek, existuje několik možností rozkladu daného čísla na součet. Zápis $2 + 3 = \square$ čte žák 1. stupně zleva doprava a vnímá ho tak **implikačně**: Jestliže ke dvěma přičtu tři, musím dostat pět. Někteří autoři soudí, že pokud se žáci při výuce sčítání setkávají pouze s tímto způsobem zadávání, vzniká u nich **implikační způsob myšlení** a rovněž si osvojují nedostatečnou interpretaci symbolu rovná se. Booker (1987) nebo Booth (1988) například zastávají názor, že tímto způsobem žák nabývá přesvědčení, že symbol „rovná se“ znamená „spočítej“, spíše než by chápal, že se jedná o relaci ekvivalence. Zatímco v aritmetice můžeme znak rovnosti skutečně považovat za propojení výpočtu s jeho výsledkem, v algebře má rovnost a ekvivalence velmi specifický význam, což nemusí být zjevné, když se pro obojí používá stejný znak (Booker, 1987). Žáci 1. i 2. stupně základní školy mají často představu, že znak „rovná se“ pouze reprezentuje jednosměrný operátor, který ze vstupů na levé straně vytváří výstup na pravé straně (např. Vergnaud, 1985).

Podobně je to u úloh dočítacích. Úlohu typu $\square + 3 = 5$ žák 1. stupně promýšlí zleva doprava, od zadání k výsledku, obvykle takto: *Tři a kolik je pět?* Zprava doleva žák většinou neuvažuje. Jiná situace v mysli žáka nastává, je-li úloha zadána tímto způsobem: $\square + \square = 5$. Nyní je žák nucen postupovat od výsledku k zadání, tj. zprava doleva, a přemýšlí třeba takto: *Číslo 5 mohu napsat jako 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3, 3 + 2*. Nahlížení na příklad zleva doprava a zprava doleva tedy není symetrické.

Také úlohy typu $\square + 7 = 5 + 6$ či $9 + 5 = 7 + \square$ nutí žáky přemýšlet o rovnosti zleva doprava i zprava doleva.

Uvedené představy se u žáka upevňují především v prvních dvou letech 1. stupně. Nejčastěji si žáci zafixují postup zleva doprava a tuto představu si přenášejí do dalších let, což jim komplikuje pochopení charakteru rovnic, kdy rovnici upravujeme jako celek tak, abychom dostali výraz, který je ekvivalentní s předchozím.

V 5. ročníku by žáci měli zvládat plynule sčítat, odčítat, násobit a dělit přirozená čísla. Automatizace spojů je bezesporu důležitá součást žákovských dovedností a je podstatná pro řešení úloh. Russel, Schifter a Batable (2011) se zamýšlejí nad tím, jaké jsou důsledky toho, když žáci nezískají dostatečnou zkušenost s chováním a vlastnostmi operací předtím, než se mají seznamovat s algebrou. Co se stane, když se klade důraz pouze na rychlost výpočtu a zapamatování algoritmů, aniž by žák rozuměl podstatě operací? Jeden z pravděpodobných důsledků spatřují Russel a kol. (2011) v chybách, se kterými se často setkáváme ve výuce matematiky a kterými jsou např. $-3 + (-5) = 8$, nebo $2(xy) = 2x2y$, a mnoho dalších. Takové chyby často přetrvávají i v případě, kdy byly opakovaně opravovány učitelem. Pokud žák nechápe správně operaci, snaží se pomoci si různými mnemotechnickými pomůckami, jako je např. „minus a minus dá plus“ pro násobení dvou záporných čísel. Uvedenou mnemotechnickou pomůcku mohou žáci nevhodně rozšířit na úlohy typu $(-a) + (-b)$.

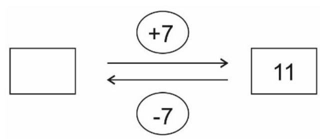
## Význam čísla ve slovních úlohách

Ve slovních úlohách, které žáci řeší na 1. stupni ZŠ, číslo nejčastěji udává počet prvků, číslo je v pozici kardinálního čísla konečných množin. Matematizace pak spočívá v tom uvědomit si, které počty jsou známy a které je nutno určit (Malinová, 1983).

Číslo může již na 1. stupni vystupovat v úloze i v jiném kontextu než jako počet prvků. Hejný (2014) udává následující třídění číselných představ: **identifikátor** (např. doběhl na 5. místě), **kvantita** (**počet** nebo **veličina**), **operátor** (**aditivní** nebo **multiplikativní**). Operátor lze dále rozdělit na **porovnání** (David je o dva roky starší než Jakub, Eva je dvakrát starší než Soňa) a **změnu** (přibral 2 kg, je dvakrát vyšší než před pěti lety). Hejný (2014) upozorňuje, že práce s operátorem je náročnější než práce s kvantitou. Operátor změny totiž poukazuje na dvě další čísla: na stav před změnou a stav po změně. Tyto údaje nejsou pro řešení nezbytně potřebné, žák je však může postrádat. Obdobně operátor porovnání v sobě obsahuje další dvě čísla, např. věk obou dětí, který ale nemusí být udán (Hejný, 2014).

## Využívání schémat k řešení algebraických úloh

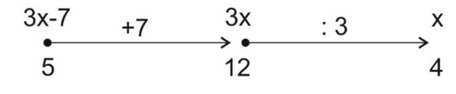
Vergnaud (2009) uvádí, že pro žáky je již od 1. stupně výhodné používat schematické znázornění aritmetické úlohy, které může žákům pomoci později uchopovat i úlohy s neznámou. Postup demonstruje na následující úloze: „John vyhrál 7 kuliček při hře s Meredith, nyní má 11 kuliček. Kolik kuliček měl před hrou?“ (Vergnaud, 2009: s. 86). Úloha je pro žáky 1. stupně náročná ze dvou důvodů: obsahuje aditivní operátor změny (vyhrál 7 kuliček); dále se jedná o úlohu s antisignálem, což je slovo „vyhrál“. Toto slovo mnoho žáků navede na přičítání, tj. výpočet 11 + 7. Schematické znázornění situace může žákům pomoci se uvedené chybě vyhnout. Takzvaný **šipkový diagram** (Obr. 3), jak Vergnaud schéma nazývá, od sebe dále odlišuje číslo jako počet a číslo jako operátor. Číslo jako počet zapisujeme do obdélníčků a číslo jako operátor do elips.




*Obr. 3 Šipkový diagram podle Vergnauda (2009)*

V diagramu lze sledovat počáteční stav P (neznámý), koncový stav K (11), přímou transformaci T (+7), nepřímou transformaci $T^{-1}$ (–7). Symbolicky lze zapsat takto: *Jestliže* $T(P) = K$, *potom* $T^{-1}(K) = P$. Zde již vnímáme algebraickou reprezentaci.

Rovněž Kuřina (1989) doporučuje, aby pro řešení aritmetických úloh, obsahujících čísla a operace, a později pro řešení jednoduchých lineárních rovnic byl použit jazyk šipek. Postup nazývá **operační schéma**. Například pro řešení rovnice $3x - 7 = 5$ uvádí následující operační schéma (Obr. 4) (Kuřina, 1989: s. 33). Cílem je osamostatnit neznámou. Stejné operace, které jsou prováděny s horním řádkem schématu (levá strana rovnice), jsou prováděny také s dolním řádkem (pravá strana rovnice).

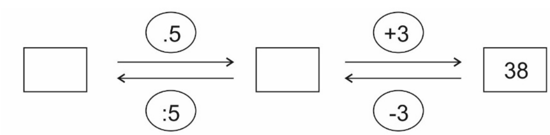



*Obr. 4 Operační schéma pro řešení rovnice podle Kuřiny (1989)*

Obě reprezentace (diagram i algebraická) ukazují, že existuje kontrast mezi způsoby symbolizace objektů a vztahů. Pro děti na 1. stupni není vhodná algebraická reprezentace, nicméně šipkový diagram jim může znázornit význam postupu tam a zpět. Žáci se dle Vergnauda (2009) mají setkávat s různými příklady, na nichž vidí inverzní charakter operací sčítání a odčítání, násobení a dělení.

Využívání šipkového diagramu v určitém typu úloh kultivuje u žáků jednu ze sofistikovaných aritmetických metod řešení – metodu řešení od konce. Kromě toho může v pozdějších letech vzdělávání tvořit přímý most k algebraické metodě řešení rovnic. Kilpatrick, Swafford a Findell (2001) například uvádí, že žáci mohou využít řešení problémů k rozvoji dovedností, které budou později potřebovat v algebraických úvahách. „Při řešení problému jako ‚*Přičteme-li tři k součinu pěti s určitým číslem, součet je 38. Jaké je neznámé číslo?*‘ mohou žáci vycházet ze svých aritmetických poznatků a postupovat tak, že od 38 odečtou 3 a rozdíl vydělí pěti. Postupují tedy v opačném pořadí, než je uvedeno v zadání, a používají inverzní operace“ (s. 262). Uvedený způsob výpočtu bývá označován jako **postup od konce** nebo také **číselný had**. Žák má v zadání nabídnuty operace a jeho úkolem je vytvořit jejich inverze.

Při zadávání uvedené úlohy je třeba mít na paměti, že žáci budou mít sklony k implikačnímu pojetí. Žák se snaží úlohu vyřešit ve stejném směru, jako ji čte. Tento směr je pro žáka známý a učitel může předpokládat, že opačný postup je žákovi rovněž zřejmý. Nemusí však tomu tak být. Implikační pojetí je do jisté míry složitější, nestojí-li chybějící číslo na jedné straně samostatně. Také u Kilpatrickovy úlohy by „zpětná cesta“ žákům mohla být přiblížena šipkovým diagramem (Obr. 5). Tentokrát je ale třeba postupovat ve dvou krocích.




*Obr. 5 Šipkový diagram pro dvojkrokovou aritmetickou úlohu*

Jestliže je v algebře zadána rovnice $5x + 3 = 38$, žáci potřebují k vyřešení stejnou dovednost jako při řešení uvedeného problému: od 38 odečíst 3 a rozdíl vydělit číslem 5. Uvedený šipkový diagram je mezikrokem mezi implikačním pojetím a ekvivalentním pojetím, které je potřeba k řešení rovnic.

Někteří autoři varují, že žáci se v rámci aritmetiky soustředí více na počítání (hledání výsledku) než na vztahový aspekt operace. Kieran (2004) uvádí, že při rozvoji algebraického způsobu myšlení je účelné: zaměřit se na vztahy a nejen na výpočty a hledání výsledku; zaměřit se na operace stejně tak jako na jejich inverze; zaměřit se na vytváření i řešení problémů, ne pouze na řešení zadaných problémů; zaměřit se na písmena i čísla a nejen na čísla; nahlížet na znak rovnosti jako na symbol pro ekvivalenci.

Výzkumy (např. Carraher et al., 2006) ukázaly, že dokonce i děti v prvních dvou letech základní školy jsou schopny používat proměnné k tomu, aby vyřešily slovně zadanou aritmetickou úlohu nebo rovnici. Carraher a kol. testovali po dobu třiceti měsíců 69 žáků ve věku 8–10 let. Prostřednictvím řešení úloh byli žáci nenápadně nuceni si neznámou či proměnnou hodnotu označovat, často k tomu sami od sebe využívali písmeno. Pro žáky, kteří sami došli k závěru, že zápis pomocí písmene je zjednodušující, bylo využívání algebraické symboliky přirozené a rozuměli jí.

Lee a kol. (2010) se naopak zabývali tím, proč žáci, kterým bylo od 4. ročníku nabízeno aritmetické řešení podpořené grafickým znázorněním, které nazývají **schematická metoda**, měli na 2. stupni problém přejít k tzv. **symbolické metodě** (algebraické) a nadále využívali schematickou metodu. Jejich cílem bylo zjistit, zda by bylo možné žáky podpořit v používání symbolické metody na 2. stupni základní školy, například vynecháním schematické metody. Zkoumali činnost mozku žáků během řešení úloh jednotlivými metodami. Symbolická metoda byla namáhavější pro žáky 1. stupně i 2. stupně základní školy. Ukázalo se, že je spíše vhodné žákům nechávat volnost ve výběru metody i poté, co jim byla nabídnuta symbolická metoda, protože někteří přirozeně inklinují ke schematické metodě a jiní k symbolické metodě.

Jedním z nejpatrnějších rozdílů mezi aritmetikou a algebrou je používání písmen zastupujících určitou číselnou hodnotu. To, ve kterém ročníku se žák s písmenem ve významu čísla poprvé setká, závisí na učiteli. Jsou učitelé, kteří písmena používají průběžně od 1. ročníku, postupně žákům objasňují jejich význam. Jsou také učitelé, kteří písmena začnou používat skutečně až s nástupem algebry ve vyšších ročnících 2. stupně základní školy. Žáci mohou být výskytem písmen zmateni, nechápou, co přesně znamenají, zda a jak s nimi mají počítat.

Pokud se písmena zavádějí na 1. stupni pouze formálně, mohou to žáci považovat za zbytečné. Úlohy totiž často vyřeší jednoduše bez písmen, aritmetickými operacemi, mnohdy i bez zápisu, tedy pamětně. Nechápou potom, proč si mají neznámou označovat písmenem a řešit úlohu složitěji, než je jim přirozené.

## Přístupy k zavádění školské algebry

Moderní školská algebra je silně zaměřena na technický symbolický aparát. Pokud se podíváme do historie, můžeme si všimnout, jaký důraz kladli například indičtí matematici, jako Bhaskara nebo Brahmagupta, na porozumění a vhled do kvantitativních vztahů. Algebraické symboly jsou pomůckou k tomuto pochopení. „Algebra je základem pro aritmetiku, a ne pouze zobecnění aritmetiky, z čehož plyne, že aritmetika sama musí být nahlížena očima algebry" (Subramaniam & Banerjee, 2011: s. 94). Subramaniam a Banerjee (2011) uvádějí, že jestliže se žáci učí manipulovat s proměnnými, písmeny a výrazy, jako by to byly objekty, je pro ně snadné ztratit povědomí o tom, že se jedná o kvantity. Algebra přináší nejen nové symboly ve formě písmen a výrazů (doposud byli žáci zvyklí jen na čísla a symboly pro operace), ale také nové způsoby zacházení se symboly.

Bylo by vhodné. kdyby mezi aritmetikou a algebrou na základní škole byl plynulý přechod. Zpočátku by se žáci měli učit pouze jinak zapisovat řešení úloh, která ovládají aritmeticky.

Již od 2. ročníku se žáci mohou seznamovat s úlohami, které se učí nejdříve řešit pamětně, později zapisovat aritmeticky, a nakonec zapisovat algebraicky. Následující tři zadání jsou navzájem ekvivalentní, liší se pouze mírou algebraizace zápisu:

1. Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a přičtu 3, dostanu 13. Které číslo si myslím? (2.–3. ročník, vhodná hra pro automatizaci násobilky).
2. $\square \cdot 2 + 3 = 13$ (4. ročník, jedná se o zapsání předchozího zadání; dítě stále uvažuje v mezích aritmetiky).
3. $2x + 3 = 13$ (6. ročník, pokud byly provedeny předchozí dvě fáze; dítě pouze nahradí volnou pozici písmenem $x$, stále může uvažovat v mezích aritmetiky).

Algebraický výraz nebo rovnice je možné interpretovat dvojím způsobem. Jedním z nich je „procedurální" interpretace (Hiebert & Lefevre, 1986; Kieran, 1992) nebo „operacionální" interpretace (Sfard, 1991). Algebraický výraz, např. $x + 3$, je v této interpretaci chápán jako procedura nebo operace „k $x$ přičti 3". Druhým je „strukturální" (Sfard, 1987; Kieran, 1992) nebo také „konceptuální" interpretace (Hiebert & Lefevre, 1986). Algebraický výraz je v ní chápán jako objekt nebo koncept v matematické struktuře. Stacey a MacGregor (2000) uvádějí, že někteří autoři spojují procedurální či operacionální myšlení s aritmetikou a strukturální myšlení s algebrou. Mnohdy právě žáci, kteří ovládají algebraické postupy, pohlížejí na řešení úlohy velmi algoritmicky, mají naučenou sekvenci kroků, které použijí, přitom nemusí postupu rozumět.

Mnoho výzkumů v didaktice matematiky (např. Lee et al., 2010; Britt & Irwin, 2011; Russel et al., 2011; Novotná, 2016) se zabývá otázkou, zda je pro žáky k zvládnutí školní algebry dostačující osvojit si předepsané algoritmy nebo zda by se školní matematika měla také zaměřovat na rozvíjení žákovské nezávislosti a kreativity při řešení problémových úloh. Novotná (2016) uvádí, že z výsledků mnoha výzkumů vyplývá důležitost vytváření podmínek pro tvořivé přístupy žáků k řešení problémů. V opačném případě žáci ztrácejí motivaci pro řešení úlohy v situacích, kdy jejich aktuální repertoár matematických znalostí neobsahuje algoritmus vedoucí k řešení.

## – 2 – 4 ÚLOHY ROVNICOVÉHO CHARAKTERU V RVP, STANDARDECH A VYBRANÝCH UČEBNICÍCH

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání ani Standardy pro základní vzdělávání se na 1. stupni nezabývají ani přechodem od aritmetiky k algebře, ani typy úloh, které by žákům v tomto přechodu na 2. stupni pomohly. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání vytyčuje na 2. stupni základní školy následující očekávané výstupy pro oblast algebry a rovnice: **M-9-1-07:** *Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním*. **M-9-1-08:** *Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav*. Oba výstupy jsou pro 9. ročník, a není tudíž zřejmé, ve kterém ročníku žáci získávají potřebné znalosti a dovednosti.

K očekávanému výstupu M-9-1-07 najdeme ve Standardech následující indikátory: 1. *Žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných*. 2. *Žák využívá při úpravě výrazů vytýkání a vzorce* $(a + b)^2$, $(a – b)^2$, $a^2 – b^2$. 3. *Žák vybere odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci*.

K očekávanému výstupu M-9-1-08 jsou ve Standardech tyto indikátory: 1. *Žák vyřeší rovnici a soustavu dvou jednoduchých lineárních rovnic pomocí ekvivalentních úprav*. 2. *Žák ověří správnost řešení slovní úlohy*.

V Metodických komentářích ke Standardům pro základní vzdělávání (Fuchs & Zelendová, 2015) uvádí Vondrová, že je důležité, aby se písmeno v roli proměnné dostávalo do hry přirozeně, a zmiňuje tři pilíře algebry. Jedním z nich jsou úlohy na zobecňování: „Žák si uvědomuje nutnost symbolického zápisu (aby nemusel vypisovat mnoho různých případů) i jeho podstatu (výraz zastupuje různé případy, třeba i nekonečně mnoho). Učitel by měl žáky nechat dospět k symbolickému zápisu až poté, co si žák vyzkouší dostatečný počet konkrétních případů“ (s. 26). Jako propedeutiku oblasti řešení lineárních rovnic uvádí Vondrová úlohy typu „myslím si číslo“, ale také jednoduché lineární rovnice (zapsané nejdříve pomocí čísel a např. prázdného obdélníku, posléze písmena $x$). Poznamenává, že tyto úlohy mohou řešit již žáci na 1. stupni, přičemž využívají metodu pokusu a omylu, později také systematický experiment. Upozorňuje, že dalším pilířem pro rozvoj algebraického myšlení na ZŠ jsou číselné výrazy a jejich aritmetika. Přitom ale nelze v tomto ohledu algebru chápat jako zobecněnou aritmetiku, protože algebraické procesy se v mnoha ohledech od aritmetických liší. Tuto problematiku uvádí Vondrová na příkladu číselného výrazu 2(3 + 5) a algebraického výrazu $2(x + 5)$. Zatímco v číselném výrazu může žák chápat „plus“ jako pokyn k sečtení čísel 3 a 5, ve výrazu $x + 5$ musí žák nejdříve vědět hodnotu $x$, aby mohl sčítat, a výraz může jedině roznásobit.

Za důležitý model pro zavedení ekvivalentních úprav rovnic považuje Vondrová váhy. Váhy dle ní mohou usměrnit představu žáků o znaku „rovná se“. Žáci si často vytvoří na základě svých předchozích zkušeností představu, že znaménko „rovná se“ odděluje proceduru (výpočet) nalevo od výsledku napravo. O rovnosti neuvažují jako o ekvivalenci, ale jako o implikaci (viz také výše).

### – 2 – 4 – 1 Kroky vedoucí k pochopení řešení rovnic a jejich zastoupení v učebnicích pro 1. a 2. stupeň ZŠ

Výuka rovnic by neměla začít až v 7. nebo 8. ročníku (podle školy a jejího školního vzdělávacího plánu), ale měla by k ní vést řada kroků, začínajících již v 1. ročníku základní školy a gradujících vzhledem k abstrakci, která je od žáků vyžadována. Na 1. stupni se jedná o následující typy úloh:

- Dočítací úlohy.
- Úlohy typu „myslím si číslo“ řešené pamětně.
- Úlohy typu „myslím si číslo“ řešené pomocí zakreslení do řetězce (šipkového schématu).
- Řešení algebraických slovních úloh s akcentem na využívání řízeného experimentu a aritmetických postupů.

Na 2. stupni se potom jedná o tyto typy úloh:

- Řešení úloh s vahami.
- Řešení jednoduchých rovnic, v nichž je vynecháno jedno číslo (např. $3 \cdot \square + 6 = 15$) a které je možné řešit pamětně.
- Řešení jednoduchých rovnic, v nichž je neznámé číslo zapsáno písmenem $x$, postupné zavádění ekvivalentních úprav.

Podívejme se nyní, zda a jak se v učebnicích matematiky objevují úlohy, které bychom mohli považovat za propedeutické k řešení rovnic. Uvedu příklad dvou řad učebnic 1. stupně a dvou řad učebnic 2. stupně, které se používají na řadě základních škol a mají odlišné pojetí výuky matematiky.

V učebnicích matematiky pro 1. stupeň základní školy se nejčastěji setkáváme s úlohami zaměřujícími se na procvičování aritmetických operací. V některých učebnicích se potom můžeme setkat s úlohami, které mohou u žáků pěstovat postupy, které budou využitelné při výuce algebry a rovnic na 2. stupni. V učebnicích nakladatelství Alter (Blažková, Matoušková & Vaňurová, 2011b) můžeme najít úlohy, které lze chápat jako propedeutiku budoucího učiva rovnic (Obr. 6)


*Obr. 6 Alter, Pracovní sešit pro 3. ročník, 1. díl*

Dále v těchto učebnicích lze najít úkoly pro přemýšlivé. Na Obr. 7 se jedná o slovní úlohy, které vedou na řešení pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých (Blažková, Matoušková & Vaňurová, 2011c). Žáci tento aparát neovládají a úlohu musí řešit aritmeticky. Jedná se opět o propedeutiku budoucího učiva, avšak za podmínky, že jsou žáci seznamováni s efektivními metodami řešení, v tomto případě s metodou řízeného experimentu.

10. Úlohy pro přemýšlivé počtáře:

a) Dana dala mamince hádanku: Když si koupím jednu žvýkačku, zbydou mi 2 Kč. Kdybych si chtěla koupit dvě žvýkačky, bude mi 1 Kč chybět. Kolik korun stojí 1 žvýkačka? (Úlohu můžeš řešit pokusem.)

Jedna žvýkačka stojí ___ Kč. Dana má na nákup ___ Kč.

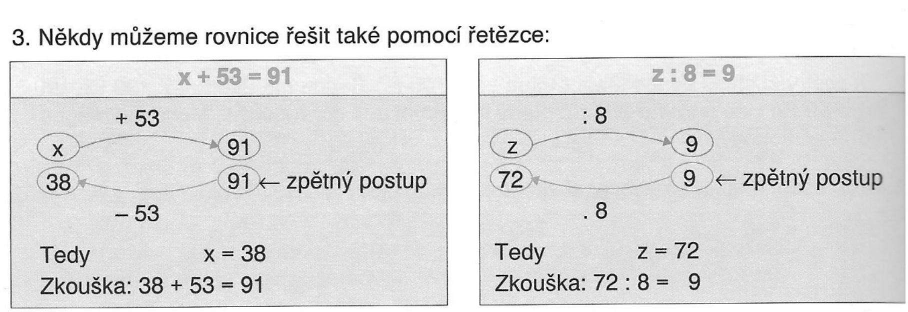
b) Maminka dala Daně také hádanku: Když ti koupím jedno tričko, zůstane mi v peněžence 200 Kč. Kdybych ti chtěla koupit dvě taková trička, bude mi 100 Kč chybět. Kolik korun stojí jedno tričko?

Jedno tričko stojí ___ Kč. Maminka měla v peněžence ___ Kč.

2

*Obr. 7 Alter, Pracovní sešit pro 3. ročník, 2. díl*

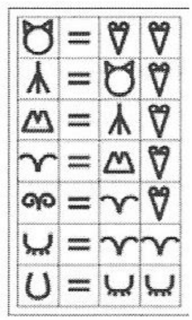
Od 3. a 4. ročníku se začíná cíleně používat tzv. **řetězců**, a to také v souvislosti s řešením rovnic (Obr. 8).




*Obr. 8 Alter, učebnice pro 4. ročník, 1. díl*

Výjimku mezi učebnicemi tvoří řada učebnic, která je v souladu s tzv. vyučováním založeným na budování schémat a byla vytvořena na základě teorie poznávacího procesu, tzv. teorie generických modelů (Hejný, 2014). Pro metodu se vžilo pojmenování Hejného metoda. V ní se již v rámci 1. stupně můžeme setkávat s úlohami, které mají algebraickou podstatu, přestože je žák vyřeší aritmetickými prostředky.

Učebnice podle Hejného metody jsou založeny na určitých didaktických prostředích. Od 2. ročníku se žáci seznamují s prostředím děda Lesoň. Děda Lesoň je ochránce zvířátek. Postupně je zavedeno osm druhů zvířat: myš, kočka, husa, pes, koza, beran, kráva, kůň. Každé z těchto zvířat je reprezentováno obrázkem, ikonou, písmenem a hodnotou, která odpovídá jeho „síle". Žáci tyto hodnoty postupně odhalují na základě vztahů, které jsou znázorněny na Obr. 9.

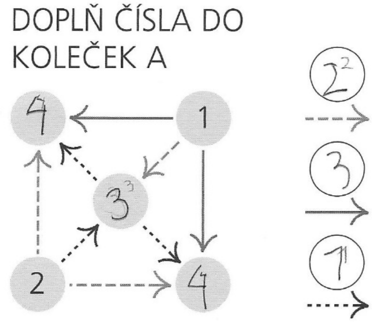


*Obr. 9 Děda Lesoň (Hejný, 2014: s. 21)*

Nejnižší hodnotu má myš, platí M = 1, dále kočka K = 2 atd. Jestliže žák vytváří stejně silná družstva zvířat, řeší vlastně modelové rovnicové situace[4] (Hejný, 2014).

V Hejného učebnicích se již na 1. stupni setkáváme s dalšími algebraickými prostředími, jako jsou pavučiny (Obr. 10), hadi, nebo algebrogramy. V těchto prostředích mají žáci možnost pohlížet na číslo nejen jako na známou hodnotu, případně jako na hodnotu, kterou vypočítají ze dvou známých hodnot, ale také jako na neznámou hodnotu.

[4] Kuřina (2016) však upozorňuje, že v prostředí děda Lesoň je zaměňována množinová operace sjednocení s aritmetickou operací sčítání. Dodává, že sčítat neznamená dávat dohromady. „Dám-li dohromady dva zajíčky a lišku, dostanu dva zajíčky a lišku (nenastane-li nějaká katastrofa), dám-li dohromady 2 a 1, dostanu 21" (Kuřina, 2016: s. 86). Za problematické považuje Kuřina i zavedení zápisu na Obr. 9 pro skutečnost, že např. „kočka je tak silná jako dvě myši". „Práci s veličinami (navíc nepojmenovanými) nepovažuji za dobrou propedeutiku řešení rovnic" (Kuřina, 2016: s. 86).



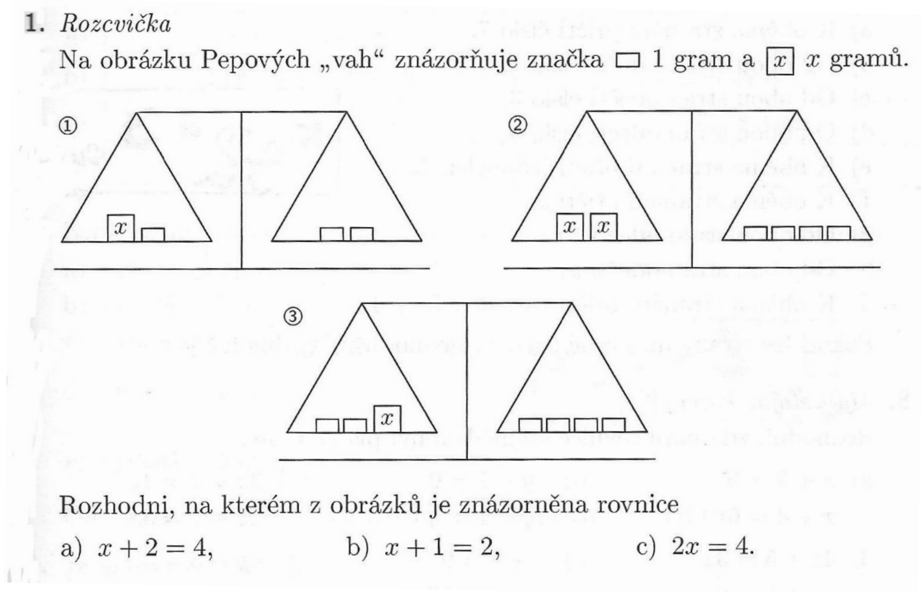

*Obr. 10 Řešení pavučiny žákem 2. ročníku*

Žáci při řešení pavučin obvykle postupují experimentálně. Dopisují si čísla, která by mohla v daném kolečku být, a postupně kontrolují všechny výpočty (viz Obr. 10). Opakovaným řešením pavučin si žáci mohou automatizovat spoje pro sčítání.

Nyní se podíváme na učebnice 2. stupně. Některé přistupují k určité propedeutice algebraického myšlení od 6. ročníku. Odvárko a Kadleček (1997) například volí v 6. ročníku úlohy, jako hledání všech přirozených čísel $x$, pro která platí $x < 5$, nebo určení zpaměti takového čísla $x$, aby platilo: $47 - x = 30$. V 7. ročníku (Odvárko & Kadleček, 1998) potom v učivu zlomků zadávají následující úlohy: Urči číslo $x$ tak aby platilo: $\frac{x}{2} = 0, \frac{2}{x} = 1$; Najdi takové nejmenší a) prvočíslo $x$, b) složené číslo $x$, aby zlomek $\frac{x}{16}$ byl v základním tvaru; Urči číslo $x$ tak, aby platilo $\frac{2}{3} = \frac{18}{x}$; Urči číslo $x$, pro které platí $\frac{4}{7} : x = \frac{2}{7}$. V kapitole Celá čísla lze najít úlohy typu: Vypiš všechna celá čísla, která můžeš dosadit za $x$ tak, aby platilo $|x| + 4 = 8$. A tak dále.

Jestliže učitel tyto úlohy průběžně zadává, žák má dva roky na to, aby si zvykl neznámé číslo či proměnnou veličinu označovat písmenem $x$.[5] Když se začíná probírat učivo rovnic, žák je již seznámen se způsobem zápisu rovnic. Odvárko a Kadleček (2000) ilustrují řešení rovnic na několika příkladech s vahami (Obr. 11) a dále pokračují zaváděním jednotlivých ekvivalentních úprav.

[5] Poněkud omezující je v těchto učebnicích fakt, že je stále používáno pouze písmeno $x$.



**1.** *Rozcvička*

Na obrázku Pepových „vah“ znázorňuje značka □ 1 gram a $\boxed{x}$ $x$ gramů.

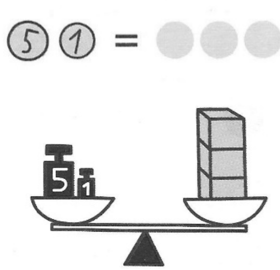


Rozhodni, na kterém z obrázků je znázorněna rovnice

a) $x + 2 = 4$, b) $x + 1 = 2$, c) $2x = 4$.

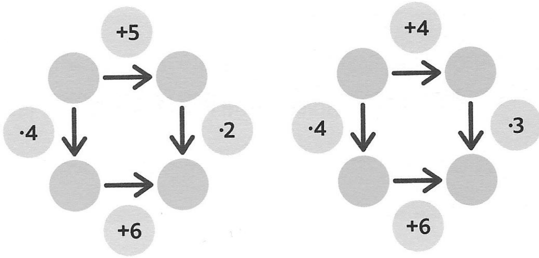
*Obr. 11 Odvárko a Kadleček (2000), Soubor úloh pro 8. ročník základní školy*

V Hejného metodě na 2. stupni ZŠ (Hejný et al., 2015) jsou rovnice uvedeny pomocí tzv. „mincových rovnic“ a „váhových rovnic“ (Obr. 12). U mincových rovnic má žák určit hodnotu neznámé mince. U váhových rovnic je úkolem určit, jak těžká je jedna krychle.




*Obr. 12 Ukázka mincové rovnice (nahoře) a váhové rovnice (dole)*

Dále v těchto učebnicích žáci mohou řešit tzv. „šipkové grafy“. Na Obr. 13 jsou uvedeny dva šipkové grafy, první vede na rovnici $(x + 5) \cdot 2 = 4x + 6$, druhý na rovnici $(x + 4) \cdot 3 = 4x + 6$.




*Obr. 13 Šipkové grafy*

Samotné řešení rovnic uvádí Hejný úlohami, ve kterých neznámé číslo „schovává“ do obálky. Například úlohy ✉ + 2 = 7 nebo 6 + ✉ = 1 (Hejný et al., 2015: s. 37) mohou žáci řešit pamětně, obálka se postupně nahrazuje písmenem *x*.

Na ukázkách z učebnic jsme viděli, že ačkoli kurikulární dokumenty (RVP a Standardy) neuvádějí, že by se žák měl v průběhu 1. i 2. stupně setkávat s úlohami, které ho postupně připravují na přechod k algebraickému a rovnicovému způsobu myšlení, je možné v některých učebnicích najít úlohy, které tak činí. To, zda se žáci s těmito úlohami seznamují, je však nakonec věcí přesvědčení a rozhodnutí učitele.

## – 2 – 5 MATEMATICKÁ ÚLOHA A JEJÍ ŘEŠENÍ

Při řešení matematické úlohy by měly být dodržovány určité kroky, které žákovi pomohou vypořádat se s různými typy úloh. Není přitom ani tak důležité vyžadování šablonovitého zápisu, ale spíše sledování určité posloupnosti úkonů.

Dnes již klasický popis řešení úloh pochází od maďarského matematika George Polyi. Polya (2016[6]) zformuloval postup, který považuje za vhodný při řešení matematických úloh:

1. **Porozumění úloze.** Žák si musí uvědomit, co je neznámá, jaké jsou známé údaje, jaké jsou podmínky. V této fázi je vhodné nakreslit si obrázek a zavést vhodné označení zadaných a hledaných údajů.
2. **Navržení plánu řešení.** Žák hledá souvislosti mezi známými údaji a neznámou. Může přemýšlet nad tím, zda nezná nějakou příbuznou úlohu, jejíž řešení by mohl využít. Nakonec sestaví plán řešení.
3. **Realizace plánu řešení.** Žák realizuje svůj plán, kontroluje své kroky.
4. **Pohled zpět.** Žák přezkouší nalezené řešení, zkontroluje, zda odpověděl na otázku a zda je odpověď reálná.

[6] Původní vydání v anglickém jazyce je již z roku 1945.

## – 2 – 6 ÚLOHY ROVNICOVÉHO CHARAKTERU A ZPŮSOBY JEJICH ŘEŠENÍ

Úlohu rovnicového charakteru je obvykle možné řešit různými strategiemi. Ty můžeme rozdělit na **aritmetické** a **algebraické**. Aritmetické strategie dělíme dále dle míry sofistikovanosti na **experimentální** a **neexperimentální** (dále je budu pro zkrácení nazývat jednoduše aritmetické). Experimentování má mnoho různých podob, v základním dělení rozlišujeme **neřízený** a **řízený experiment**. Aritmetické strategie mohou mít řadu různých forem, v závislosti na typu úlohy a rovněž na způsobu vizualizace vztahů.

Nejjednodušší, nejméně sofistikovanou a na matematický aparát nejméně náročnou je strategie **neřízeného experimentu**, která bývá také označována jako **metoda pokusu a omylu**. Žáci se snaží najít řešení slovní úlohy tak, že odhadnou výsledek. Podle Novotné (2000) může mít tento postup tři různé průběhy: 1) řešitel uvede odhadnutý výsledek za řešení slovní úlohy, neprovádí zkoušku správnosti; 2) řešitel provede zkoušku správnosti, která mu potvrdí správnost výsledku – buď hledá další řešení, obvykle jinou strategií, nebo další řešení nehledá; 3) řešitel provede zkoušku správnosti a odhalí, že jeho řešení nevyhovuje zadání úlohy – dále buď řešení vzdá, nebo se ho snaží hledat jinou strategií.

Jiný pohled na strategii pokusu a omylu má Hejný (2014). Dělí ji na náhodnou, částečně organizovanou, organizovanou. Při volbě této strategie žákovi dle něj ulehčí počítání, když si sestaví tabulku, ve které může sledovat vztahy mezi veličinami. Tím se z pokusu a omylu může stát řízené (systematické) experimentování.

**Řízený experiment** je strategie, která po řešiteli vyžaduje větší zkušenost a cílevědomější vyhodnocování získaných výsledků. Žák vyhodnocuje přesnost svého odhadu a postupně se přibližuje ke správnému výsledku.

**Aritmetické strategie** jsou takové, kdy není pro řešení použita rovnice. Žák hledá vztahy mezi zadanými údaji a volí vhodné operace k výpočtu neznámých hodnot. Vztahy mezi veličinami je také možné znázornit graficky, pak se strategie nazývá **grafická**, případně aritmetická s grafickým znázorněním. Při **algebraické strategii** řešitel při řešení úlohy používá jednu nebo více rovnic.

Břehovský, Eisenmann, Novotná a Přibyl (2015) a Novotná (2016) shrnují přehledně **heuristické strategie řešení**[7] pro řešení problémových úloh:

- **Pokus – kontrola – oprava:** Principem této strategie je přibližovat se hledanému řešení. V prvním kroku provede řešitel náhodnou volbu. V druhém

[7] Heuristické strategie jsou v didakticko-matematické literatuře hojně zkoumány a využívány (Kopka, 1999, 2007; Hejný, 2014; Polya, 2016).

kroku zkontroluje, zda je výsledek správný. Pokud ne, zjišťuje, jak moc se odchýlil. Ve třetím kroku vybírá novou hodnotu, v závislosti na velikosti chyby při první volbě.

- **Postup od konce:** Tato strategie je velmi často používána v případech, kdy je známý koncový stav a my se snažíme dostat z konce na začátek. Autoři však za tuto metodu nepovažují metodu založenou na používání inverzních operací, kterou nazývají **číselný had**. Číselný had dle jejich názoru testuje pouze znalost inverzních operací.
- **Zavedení pomocného prvku:** Základní myšlenkou této strategie je zavedení takového pomocného prvku, který zpřístupní řešiteli hledané řešení a pomůže mu získat vhled. Pomocný prvek je definován jako objekt, který není zahrnut v zadání, ale my doufáme, že zjednoduší řešení.
- **Využití analogie:** Žák může použít analogickou úlohu, jejíž řešení zná.
- **Přeformulování problému:** Žák zjednoduší zadání tak, aby pro něj bylo snadné k řešení. Může například zmenšit čísla a poté se vrátit k původnímu zadání.
- **Řešitelský obrázek**: Grafickou reprezentaci používáme k vizualizaci problému. Většinou se jedná o ilustrativní obrázek, který znázorňuje zadání. Někdy je řešení problému patrné přímo z tohoto obrázku. Ve většině případů nicméně musíme s obrázkem manipulovat a problém vyřešíme s modifikovaným obrázkem. Tento obrázek nazýváme **řešitelský obrázek**. V případě řešení rovnic se velmi často jedná o úsečkový model, který znázorní vztahy mezi veličinami a tvoří propojení mezi aritmetickým a algebraickým přístupem.

Hejný (2014) rozděluje řešitelské strategie na rutinní (řešení bez porozumění, s porozuměním, tvořivě), nerutinní, pokus-omyl (náhodný, částečně organizovaný, organizovaný), rozklad na dílčí úlohy, řešení od konce aj.

Výše bylo uvedeno, že úlohami rovnicového charakteru chápu algebraické slovní úlohy, aritmetické úlohy (úlohy, které slovně vyjadřují početní operace s čísly) a početní geometrické úlohy řešitelné rovnicemi. Nyní uvedu nejčastější typy těchto úloh, způsoby jejich řešení a možné obtíže žáků.

### – 2 – 6 – 1 SLOVNÍ ÚLOHY

Slovních úloh, které jsou řešitelné algebraicky, je mnoho typů. Na 1. stupni je obvykle výhodnější tyto úlohy řešit aritmeticky. Na 2. stupni se potom žáci setkávají s typy úloh, u nichž je jednodušší řešení pomocí rovnic (např. úlohy o pohybu, úlohy o společné práci, úlohy o směsích aj.). Jako typické úlohy, které se objevily také v mém testu, vyberu úlohy s dělením celku na nestejné části a dynamické slovní úlohy.

Nejdříve se podívejme na řešení slovních úloh obecně. Žáci na 1. stupni základní školy řeší nejdříve jednoduché slovní úlohy, obsahující jednu aritmetickou operaci. V rámci těchto slovních úloh se učí aplikovat početní výkony sčítání a odčítání, později násobení a dělení. Často se k volbě správného výkonu využívá signálních slov, která mají žáka navést: „přinesl“, „dostal“, „má více než“ má žáka navést na sčítání. Stačí úlohu mírně přeformulovat a signální slovo se stane antisignálem: *Eva má 5 kuliček, což je o 3 více, než má Roman. Kolik kuliček má Roman?* V uvedené úloze je třeba použít výpočet 5 – 3 = 2, přestože zadání obsahuje slovo „více“.

Postupně se přistupuje k řešení složených slovních úloh. Za složenou slovní úlohu obvykle považujeme takovou slovní úlohu, k jejímuž řešení žák potřebuje použít alespoň dva početní výkony (Divíšek, 1989). S těmito slovními úlohami žáky seznamujeme od 2. ročníku ZŠ. Na 1. stupni ZŠ jsou to však téměř vždy jen úlohy řešitelné dvěma, maximálně třemi početními výkony (Divíšek, 1989).

Složená slovní úloha sestává z několika dílčích jednoduchých, na sebe navazujících slovních úloh. Podstatnou částí řešení složené slovní úlohy je analýza složené slovní úlohy a její rozklad na jednoduché úlohy.

Řešení slovní úlohy probíhá obvykle ve fázích, které však nemusí být vždy stejně významné a patrné, zvláště při řešení série analogických úloh. Divíšek rozlišuje pět fází (1989):

1. **Rozbor úlohy** spočívá v pochopení textu a ujasnění si toho, co známe, a toho, co máme vypočítat. Snažíme se objevit vztahy mezi zadanými údaji, které bychom vyjádřili matematicky. Rozbor vede učitel formou otázek, žáci se postupně učí tyto otázky klást sami.
2. **Matematizace problému úlohy** spočívá v převedení slovní úlohy do úlohy matematické. Úkolem je uvědomit si, které údaje jsou známy a které je nutno určit, a sestavit početní příklad, později například rovnici. Matematizace úlohy může být v některých případech provedena i graficky.
3. **Řešení** matematicky formulované úlohy znamená řešení vytvořeného početního příkladu, rovnice, nebo nalezení výsledku na grafickém znázornění.[8]
4. **Zkouška**, že nalezené číslo je skutečně řešením dané úlohy, by měla potvrdit jednak správnost numerickou (správnost řešení matematické úlohy), jednak správnost věcnou. Ne každý výsledek matematické úlohy musí být řešením dané reálné úlohy, i když byl vypočten matematicky správně. Je nutné posoudit smysluplnost výsledku v kontextu úlohy a případně také v realitě.
5. **Odpověď** vede žáka k tomu, aby konfrontoval výsledek se zadáním úlohy.

[8] Pokud úloha obsahuje jednotky (Kč, kg, m, aj.), většinou se postupuje pro zjednodušení tak, že se jednotky v průběhu výpočtu nezapisují a matematické zápisy se provádějí jen s čísly. Jednotky se uvádějí až v odpovědi.

Fáze řešení problémových úloh nadanými žáky popisuje Mayer (1982). Uvádí, že žák by měl mít čtyři typy znalostí důležité pro řešení problémů. Těmito znalostmi jsou **sémantické znalosti**, **znalosti schématu**, **algoritmické znalosti** a **strategické znalosti**. Tyto znalosti by neměly být vzájemně oddělovány.

Prvním krokem při řešení problému je porozumění problému. V této fázi řešení je důležitá sémantická znalost řešitele. Žák musí nejen dokázat interpretovat dané informace, ale v případě algebraických úloh také správně označit neznámou.

Znalost schématu spočívá ve vytváření struktury podobných problémů nebo schémat řešení problémů. Podle Mayera (1992) znalost schématu znamená, že žák řeší různé slovní problémy pomocí stejné aritmetické operace. Jestliže řešitel ví, jaký druh problému řeší, znamená to, že používá znalost schématu. Riley a Greeno (1988) tvrdí, že znalost schématu je důležitá pro plánování způsobů postupu.

Po dvou prvních krocích, kdy žák porozumí zadání, zorientuje se v problému, vybere podstatné a nepodstatné informace a, pokud je to možné, využije znalost schématu, musí sestavit rovnici a tuto rovnici řešit. K tomu potřebuje **algoritmickou znalost**. Žák musí znát algoritmus postupu neboli jednotlivé kroky, které vedou k řešení.

Poslední znalost nazývá Mayer (1992) strategickou znalostí a spočívá podle něj v plánování a kontrole řešení problému.

Hejný a Stehlíková se podrobněji zabývají procesem **uchopování** slovní úlohy, který rozložili do čtyř etap (1999: s. 40):

1. Řešitel si vytvoří představu o tom, čeho se úloha týká. Vzpomíná, zda již podobnou úlohu řešil.
2. Řešitel eviduje objekty úlohy. Zapíše, označí nebo nakreslí, co je dáno a co se má najít. Někdy uvede i pomocné objekty, které sice v úloze nevystupují, ale které může použít při řešení.
3. Řešitel eviduje vztahy mezi objekty a tyto si nějak vyznačí, například pomocí šipek, kterými propojí již na papíře napsané objekty. Někdy připíše i pomocné vztahy.
4. Řešitel si utváří představu o úloze jako celku a z této představy se snaží vyvodit řešitelskou strategii, tj. směr, kterým bude dále postupovat.

Typické algebraické slovní úlohy, které jsou řešitelné aritmetickými strategiemi, jsou úlohy s dělením celku na nestejné části a dynamické úlohy. Nyní uvedu možnosti řešení těchto typů úloh.

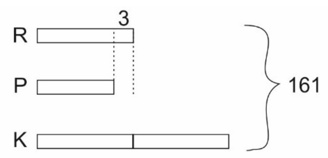
## Dělení celku na nestejné části – řešení s využitím úsečkového modelu

Příkladem grafické metody je využití **úsečkového modelu** (Novotná, 2010) nebo také **obdélníkového modelu,** který se dá využít například při řešení úloh s dělením celku na nestejné části. Využití demonstruji na úloze:

**Příklad 1.** *Sourozenci Renata, Pavel a Karel nasbírali dohromady 161 karet. Pavel nasbíral o 3 karty méně než Renata a Karel nasbíral dvakrát tolik karet než Renata. Kolik karet nasbíral každý z nich?*

Pokud žák ovládá pouze aritmetické metody, může pro něj být obtížné zaznamenat vztahy. Je vhodné, aby žák postupoval od známé aritmetické metody k neznámé algebraické metodě pozvolna. Pomoci mu může vizualizace založená na úsečkovém (obdélníkovém) modelu. Pomocí obrázku může algebraizovat zápis:

***Rozbor úlohy:***




Renata … $x$
Pavel … o 3 méně než
Karel … dvakrát více než

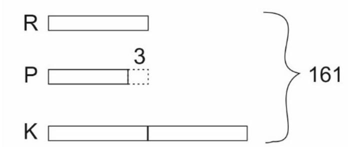
Pokud žák umí použít grafické znázornění, může dále postupovat aritmeticky nebo algebraicky. Aritmeticky postupuje od výsledné hodnoty: 161 – 3 · 3 = 152, 152 : 4 = 38. To je počet karet Pavla. Počet karet Renaty je 38 + 3 = 41 a počet karet Karla je 2 · 41 = 82.

Algebraicky postupuje opět z obrázku tak, že označí počet Renatiných karet jako $x$ a sestaví rovnici: $x + (x - 3) + 2x = 161$.

Získali jsme odpověď, že počet Renatiných karet je 41. Je nutné zkontrolovat všechny údaje ze zadání: R … 41; P … 41 – 3 = 38, K … 2 · 41 = 82, 41 + 38 + 82 = 161.

Nyní zapíšeme odpověď: Renata nasbírala 41 karet, Pavel 38 karet a Karel 82 karet.

Lze uvažovat také jinak: Kdyby měl Pavel o tři karty více, měl by stejně jako Renata. Úvahu zakreslíme do úsečkového diagramu a počítáme: 161 + 3 = 164, 164 : 4 = 41. Renata má 41 karet, Pavel karet 41 – 3 = 38, Karel 82 karet.




Přestože úsečkový model je velmi účinným nástrojem pro řešení slovních úloh s dělením celku na nestejné části, učitelé nejsou zvyklí jej používat. Stejnou zkušenost získala také Novotná (2010).

## Dynamické úlohy

Dynamická úloha byla jedna z úloh, kterou jsem zařadila do svého výzkumu. Tyto úlohy jsou pro žáky náročnější než úlohy statické, ve kterých se vše odehrává v jednom čase. U dynamických úloh je pro žáky největší problém uchopení časových hladin (Hejný, 2003).

Z důvodu problematického uchopování vztahů v dynamických úlohách je pro žáky vhodné zpočátku využívat **experimentální metodu**. Nemělo by se však jednat o nahodilé experimentování, žák by měl systematicky kontrolovat své kroky. Postup demonstruji na následující úloze:

**Příklad 2.** *Otci a synovi je dohromady 54 let. Za 5 let bude otec třikrát tak stár než syn. Kolik let je každému z nich?*

Pokud úlohu řešíme experimentem, je vhodné údaje zapsat do tabulky. V prvním kroku odhadneme, jaký věk by mohl mít syn.

| | | |
|---|---|---|
| Synův věk nyní | 8 | 9 |
| Otcův věk nyní | 54 – 8 = 46 | 54 – 9 = 45 |
| Synův věk za 5 let | 13 | 14 |
| Otcův věk za 5 let | 51 | 50 |
| Trojnásobek synova věku za 5 let | 39 ≠ 51 | 42 ≠ 50 |

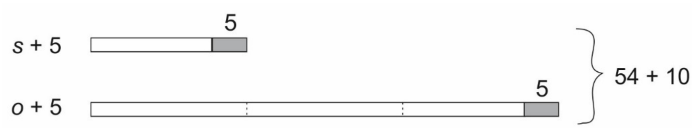
Pokud by žák postupoval neřízeným experimentem, postupně by synovi přidával po 1 roku, až by dospěl ke sloupci, ve kterém by v posledním řádku nastala rovnost.

V řízeném experimentu se snažíme ne základě získaných výsledků učinit co nejdříve správný odhad. Po zapsání druhého sloupce budeme uvažovat: Zvýšili jsme věk syna o 1 rok, rozdíl věků v posledním řádku se zmenšil o 4 ze 12 na 8. To znamená, že po dalších dvou krocích bude rozdíl nulový. Věk syna je tedy 8 + 3 = 11 let.

Opět provedeme zkoušku všech údajů ze zadání: 54 – 11 = 43, 11 + 5 = 16, 43 + 5 = 48, 3 · 16 = 48.

Zapíšeme odpověď: Synovi je 11 let a otci je 43 let.

Jestliže žák získá určitou zkušenost s řešením tohoto typu úlohy, je možné přistoupit k **aritmetickému řešení**. Opět nám poslouží obdélníkový model. Zakreslíme do něj situaci „za 5 let“:




Z něj můžeme vyčíst vztahy: 64 : 4 = 16, 16 – 5 = 11, 54 – 11 = 43. Otci je nyní 43 let.

Pomocí grafického znázornění můžeme přejít také k **algebraickému řešení**. Pokud označíme věk syna jako $x$ a věk otce jako $y$, můžeme z obrázku zapsat: $x + y = 54$, $3\,(x + 5) = y + 5$.

Uvedla jsem pouze ukázku dvou úloh rovnicového charakteru a možnosti jejich řešení. U každé takové úlohy obvykle existuje možnost využít experimentálního, aritmetického i algebraického postupu.

## Problémy žáků při řešení slovních úloh

Prvním problémem při řešení slovních úloh je důkladné pochopení textu úlohy. Je důležité, aby žáci rozuměli všem pojmům v zadání. Při řešení úloh se setkáváme s neschopností žáků číst matematický text s porozuměním. Přestože jednoduchá slovní úloha může žákům pomoci najít v matematických operacích smysl, neschopnost analyzovat matematický text a situaci si představit jim brání v úspěšném řešení. Hejný a Stehlíková (1999) uvádějí: „Schopnost číst s porozuměním matematický text je bytostně závislá na schopnosti žáka číst s porozuměním běžný text – třeba pohádku. Bez této schopnosti není snaha naučit žáka číst matematický text s porozuměním nadějná“ (s. 39).

Problematické jsou pro žáky slovní úlohy na porovnávání pomocí vztahů „o *n* větší než“, „o *n* menší než“, „*n*krát větší než“, „*n*krát menší než“. Adetula (1990) uvádí, že děti se prostřednictvím zkušenosti seznamují s mnoha polarizovanými termíny porovnávání, jako jsou „více“, „méně“, „před“, „po“, „nad“, „pod“, „vyhrát“, „prohrát“. Žáci mohou mít problém s pochopením významu těchto slov. I v případě, že slova chápou, mohou mít problémy s interpretací věty, ve které je slovo použito. Adetula to dává do souvislosti se signálními slovy a antisignály a ukazuje to na příkladu dvou zadání: „Které číslo je o tři více než čtyři?“ „O kolik je sedm více než čtyři?“ (Adetula, 1990: s. 355). Zatímco v prvním případě je slovo „více“ signální slovo a navádí na sčítání 3 + 4, ve druhém případě je slovo „více“ antisignál a hledanou operací je odčítání 7 – 4. Také Lewis a Mayer (1987) ukázali, že žáci mají větší problémy s úlohami, které nazývají jako **nekonzistentní slovní problém**, v nichž je neznámá předmětem druhé věty souvětí a termín vztahu (např. „více než“) je v konfliktu s operací, nežli s **konzistentními slovními problémy**, v nichž je neznámá podmětem druhé věty a termín vztahu je konzistentní s potřebnou operací.

Také učitelé považují slovní úlohy za náročné a u žáků neoblíbené. Čeští učitelé poukazují na nízkou čtenářskou gramotnost žáků, na fakt, že žáci velice málo čtou (Hříbková & Páchová, 2013). Řešení slovních úloh představuje pro mnoho žáků problém, možná nejen kvůli nízké čtenářské gramotnosti. Někteří učitelé dokonce soudí, že častější řešení slovních úloh od 4. ročníku ZŠ vede k tomu, že se matematika stává neoblíbeným předmětem (Hříbková & Páchová, 2013). Zatímco v prvních třech ročnících většina žáků uvádí matematiku jako oblíbený předmět, od 4. ročníku její obliba znatelně klesá.

V případě složených slovních úloh učitelé často soudí, že se je žák nejlépe naučí řešit tím, že vyřeší velké množství úloh stejné struktury bezprostředně za sebou. Divíšek upozorňuje na nebezpečí této metody, „že stále prosazovaný a opakovaný postup žáky zbavuje povinnosti promýšlet situaci popsanou v úloze a uvážlivě volit pracovní i početní postup. Bezmyšlenkovité procvičování určitého typu vede sice rychle k vypěstování dovednosti řešit typizované úlohy, ale fakticky znemožňuje řešit praktickou reálnou úlohu, která obvykle typizovaná není“ (Divíšek, 1989: s. 137).

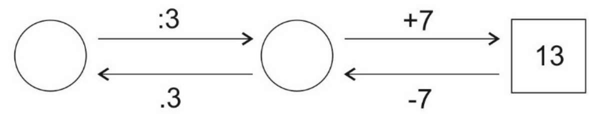
## – 2 – 6 – 2 Aritmetické úlohy

Aritmetická úloha řešitelná již od 1. stupně je úloha typu „myslím si číslo“. Na 2. stupni se mohou objevovat náročnější aritmetické úlohy, ve kterých jsou vyjádřeny vztahy mezi čísly.

Úloha typu „myslím si číslo“ je aritmeticky řešitelná s pomocí šipkového diagramu, často s využitím inverzních operací.

**Příklad 3.** *Myslím si číslo. Když jej vydělím třemi a k výsledku přičtu 7, dostanu 13. Které číslo si myslím?*

Vztahy mezi čísly uvedené v zadání znázorníme pomocí šipkového diagramu, jako na Obr. 14.




*Obr. 14 Znázornění úlohy pomocí šipkového diagramu*

Při výpočtu budeme postupovat z tohoto znázornění, a to inverzními operacemi: $13 - 7 = 6$, $6 \cdot 3 = 18$. Hledané číslo je 18. Zkoušku provedeme tak, že budeme vycházet ze zadaných vztahů: $18 : 3 = 6$, $6 + 7 = 13$.

Algebraicky je možné úlohu řešit sestavením a řešením rovnice $x : 3 - 7 = 13$.

Na 2. stupni se žáci mohou setkávat s náročnějšími aritmetickými úlohami, u nichž není možné jednoduše použít inverzní operace:

**Příklad 4.** *Třetina neznámého čísla zvětšená o 60 % vzniklého čísla je 8. Jaké je neznámé číslo?*

Obdobně jako v předchozí úloze budeme postupovat od konce. Jestliže číslo zvětším o 60 %, je výsledkem $\frac{8}{5}$ tohoto čísla. Potřebuji tedy určit $8 : \frac{8}{5} = 8 \cdot \frac{5}{8} = 5$. Číslo 5 je třetinou neznámého čísla, výsledkem je tedy číslo 15. Provedeme zkoušku: $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5,\ 1{,}6 \cdot 5 = 8$.

Úlohu je možné řešit algebraicky sestavením a řešením rovnice $\frac{x}{3} + 0{,}6 \cdot \frac{x}{3} = 8$.

### Problémy žáků při řešení aritmetických úloh

Problémy žáků s tímto typem úloh pramení nejčastěji z nezkušenosti. Jestliže se žáci s těmito úlohami nesetkávají v nižších ročnících a nejsou seznamováni s možnostmi aritmetického řešení, mohou mít ve vyšších ročnících problémy s určením neznámé a sestavením rovnice.

## – 2 – 6 – 3 Početní geometrické úlohy

Typů početních geometrických úloh, které jsou řešitelné algebraicky, existuje celá řada. V zásadě lze ale říci, že se jedná o úlohy, v nichž je potřeba určovat obvody či obsahy rovinných útvarů, případně povrchy a objemy prostorových těles, nebo dopočítat například délku některé z úseček. Úlohy z této kategorie jsou velmi často školsky netypické, a tudíž problémové. Žáci si na nich mohou ověřovat svoji schopnost orientovat se v neznámé situaci a znalosti z geometrie. Pokud není geometrie zařazována do výuky pravidelně, geometrické znalosti žáků mohou být nízké. Jestliže nejsou ve výuce řešeny problémové či netradiční úlohy, mohou mít žáci odmítavý postoj k jiným než typickým úlohám. To jsou dva nejčastější zdroje problémů žáků při řešení těchto úloh.

Ve výzkumné části se budu zabývat tím, jaké metody řešení žáci využívají při řešení úloh rovnicového charakteru. Budou představeny úlohy, které řešili žáci základní školy. Při vyhodnocování řešení jsem sledovala, jaké strategie žáci preferovali, zda byli schopni efektivně používat experimentální metody, zda ovládali korektní aritmetická řešení a zda byli ve vyšších ročnících schopni využít algebraického aparátu. Rovněž jsem pozorovala, zda žáci uváděli zkoušku správnosti úlohy a odpověď.

# VÝZKUMNÁ ČÁST

# – 3 – VÝZKUMNÉ ŠETŘENÍ NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

V letech 2012 a 2013 jsme s kolegyněmi z PdF MU ve spolupráci s FSS MU vedly na základních školách matematický kroužek, který byl primárně určen pro nadané žáky 4. a 5. ročníku. Byly osloveny vybrané školy Jihomoravského kraje. Podmínkou toho, aby se škola mohla do projektu zapojit, bylo, že na 1. stupni je alespoň jeden nadaný žák, diagnostikovaný odborným pracovištěm. Tito odborně identifikovaní žáci navštěvovali kroužek automaticky, možnost zapojit se do kroužku byla rovněž dána dalším žákům. Celkem se do matematického kroužku zapojilo 14 škol a 135 žáků (podrobněji bude specifikováno níže).

Žáci navštěvovali kroužek ve své škole jedenkrát týdně po dobu osmi týdnů. Celkově bylo zadáno 63 úloh, které se týkaly všech témat školské matematiky a dále kombinatoriky a teorie grafů. Některé z úloh byly motivační, vycházely ze základního učiva (pro nenadané žáky, kteří neměli rozvinuté matematické myšlení), jiné úlohy byly školsky netypické.

Školy dostávaly každý týden jeden pracovní list s osmi (jednou se sedmi) úlohami (Blažková & Budínová, 2014). Učitelé byli informováni, že by žákům na vypracování testu měli nechat 45 minut času a během řešení by neměli do průběhu nijak zasahovat. Žáci měli dostat instrukci od učitele, aby zapisovali postup řešení, aby uváděli odpověď i zkoušku. Po odevzdání měla proběhnout společná diskuse zúčastněných žáků a učitele o možných přístupech žáků k řešení a mělo být odhaleno správné řešení. Učitelé měli vše zapisovat. Jak se později ukázalo, v této otázce byli někteří učitelé velmi precizní, popisovali způsoby uvažování žáků, zatímco u jiných bylo patrné, že test se sebral a žádná diskuse neproběhla. Tento přístup některých učitelů značně komplikoval následnou analýzu úloh. To, zda diskuse s žáky proběhla či nikoli, jsme poznaly z výsledků testů. Typy úloh se totiž opakovaly, a když žák udělal v určitém typu úlohy chybu a učitel s ním rozebral možnosti správného řešení, žák se ponaučil z chyby a příště se jí už nedopustil. Jiní žáci stejné chyby opakovali stále znovu.

Mezi úlohami se pravidelně objevovaly také úlohy rovnicového charakteru různé náročnosti. Ve výzkumném šetření jsem se zaměřila právě na tyto úlohy.

## – 3 – 1 CÍL A VÝZKUMNÉ OTÁZKY

Cílem výzkumného šetření bylo zjistit, v jakých úlohách rovnicového charakteru budou žáci nadaní[9] úspěšnější než žáci, kteří jako nadaní nebyli identifikováni, ale účastnili se výše zmíněného kroužku. Dalším cílem bylo zjistit, zda nadaní žáci preferují určitý přístup k řešení těchto úloh, zda se u nich projeví nějaké opakující se fenomény a zda lze nalézt souvislost mezi typem nadání žáka a strategiemi, které preferuje.

Položila jsem si následující výzkumné otázky:

- Budou v řešení vybraných úloh nadaní žáci úspěšnější než ostatní?
- Bude mezi úlohami taková, v níž budou nadaní žáci výrazně úspěšnější než nenadaní žáci?
- Které řešitelské strategie budou nadaní žáci preferovat?
- Lze mezi diagnostikovanými žáky najít zástupce typů nadaných žáků podle Bettse a Neihartové (2017) (viz oddíl 1.6)? Pokud ano, lze je charakterizovat tím, jaké přístupy k řešení různých úloh využívají?[10]

Dále jsem zpracovala výsledky statisticky a vyslovila jsem následující hypotézu, vztahující se ke každé úloze zvlášť:

*Nadaní žáci budou v řešení dané úlohy statisticky významně úspěšnější než nenadaní žáci.*

## – 3 – 2 VÝZKUMNÝ VZOREK

Kroužek zmíněný v úvodu kapitoly probíhal ve dvou bězích, v každém běhu se účastnily jiné školy a jiní žáci. Celkem se kurzů účastnilo 14 škol, dvě v obou bězích. Prvního běhu se účastnilo celkem 55 žáků a druhého 80 žáků. Jako nadaní byli označeni ti žáci, kteří byli pedagogicko-psychologickou poradnou diagnostikováni jako nadaní – všeobecně, matematicky, nebo i jinak (viz Tab. 4 a Tab. 5). V prvním běhu se účastnilo 17 nadaných žáků 4. ročníku a 15 nadaných žáků 5. ročníku. Ve druhém běhu se účastnilo 22 nadaných žáků 4. ročníku a 16 nadaných žáků 5. ročníku. Navštěvovat kroužek bylo umožněno i žákům, kteří nebyli diagnostikováni v PPP, a to na základě jejich zájmu. V dalším textu je budu označovat jako nediagnostikované, protože je pravděpodobné, že někteří z nich byli také nadaní, pouze nebyli identifikováni.

9 Nadanými žáky budu v této části textu označovat ty, kteří byli odborně identifikováni v PPP.

10 Vzhledem k charakteru této výzkumné otázky ji pojednám zvlášť (v oddíle 3.7).

*Tab. 4 Školy a nadaní žáci účastnící se prvního běhu*

| Škola | **Typ školy** | **Ročník** | **Počet žáků** | **Nadání dle PPP** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Běžná ZŠ | 5 | 1 | Všeobecné |
| 2 | ZŠ s Daltonským plánem a rozšířenou výukou mat. | 4 | 2 | Matematické |
| | | | 1 | Jazykové |
| 3 | Běžná ZŠ | 5 | 1 | Matematické |
| 4 | Běžná ZŠ | 4 | 1 | Matematické |
| 5 | Běžná ZŠ | 5 | 1 | Všeobecné |
| 6 | ZŠ s Daltonským plánem | 4 | 1 | Mimořádné |
| 7 | Běžná ZŠ | 4 | 1 | Matematické |
| 8 | ZŠ s třídami pro nadané | 4 | 11 | Všeobecné |
| | | 5 | 12 | Všeobecné |

*Tab. 5 Školy a nadaní žáci účastnící se druhého běhu*

| Škola | **Typ školy** | **Ročník** | **Počet žáků** | **Nadání dle PPP** |
|---|---|---|---|---|
| 3 | Běžná ZŠ | 4 | 1 | Matematické |
| 8 | ZŠ s třídami pro nadané | 4 | 10 | Všeobecné |
| | | 5 | 14 | Všeobecné |
| 9 | Běžná ZŠ | 4 | 1 | Matematické |
| 10 | ZŠ s matematickými třídami | 4 | 1 | Všeobecné |
| | | | 4 | Matematické |
| | | 5 | 2 | Matematické |
| 11 | Běžná ZŠ | 4 | 2 | Matematické |
| 12 | Běžná ZŠ | 4 | 1 | Všeobecné |
| 13 | Běžná ZŠ | 4 | 1 | Všeobecné |
| 14 | Běžná ZŠ | 4 | 1 | Matematické |

Počty všech zúčastněných žáků jsou uvedeny v Tab. 6. V jednotlivých týdnech se počty žáků řešících dané úlohy mohou lišit, neboť někteří žáci byli nemocní nebo se neúčastnili kroužku v daném týdnu z jiného důvodu.

*Tab. 6 Počty žáků účastnících se matematického kroužku*

| | **1. běh** | | | **2. běh** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4. ročník | 5. ročník | Celkem | 4. ročník | 5. ročník | Celkem |
| Nadaní | 17 | 15 | 32 | 22 | 16 | 38 |
| Ostatní | 14 | 9 | 23 | 21 | 21 | 42 |
| Celkem | 31 | 24 | 55 | 43 | 37 | 80 |

Výsledky jsem zaznamenávala zvlášť pro nadané a ostatní, poté jsem ještě analyzovala výsledky matematicky nadaných žáků, neboť matematické nadání by teoreticky mělo být nejlepším předpokladem k úspěšnému řešení úloh v matematice.

Rodiče všech žáků, kteří byli zapojeni do výzkumu, podepsali informovaný souhlas s testováním dítěte a použitím jeho výsledků pro výzkumné záměry.

## – 3 – 3 VÝBĚR A CHARAKTERISTIKA ÚLOH

Úlohy, které jsem vybrala pro výzkum, byly rovnicového charakteru. Nyní uvedu jejich znění a stručnou charakteristiku:

1. *Myslím si číslo. Když je vynásobím 5 a odečtu 25, dostanu 100. Které číslo si myslím?* (Aritmetická úloha vedoucí ke dvojkrokové rovnici.)
2. *Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?* (Aritmetická úloha vedoucí k trojkrokové rovnici.)
3. *Roman říká: „Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků.“ Kolik je mu roků?* (Dynamická slovní úloha.)
4. *Mamince a tatínkovi je dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?* (Slovní úloha s dělením celku na nestejné části.)
5. *Kapr váží 2 kilogramy, a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?* (Problémová úloha.)

První úlohu jsem vybrala z toho důvodu, že jsem předpokládala, že většina žáků si u řešení vystačí s jednoduchými aritmetickými představami, které vychází z faktu, že $4 \cdot 25 = 100$. Dalo se tedy předpokládat, že značná část žáků bude úlohu řešit pamětně.

Druhá úloha je sice stejného typu jako první úloha, ale žák musí uvažovat ve více krocích. Proto jsem očekávala, že již nebude tolik žáků, kteří úlohu vyřeší pamětně, a budou tedy muset postupovat například metodou od konce.

Třetí úloha je dynamická úloha se dvěma časovými hladinami (nyní a až mi bude 100 let). Z toho důvodu se dalo očekávat, že úloha bude pro žáky obtížná. Také aritmetické vztahy v úloze obsažené nejsou zcela triviální.

U čtvrté úlohy jsem očekávala, že budou úspěšní žáci, kteří si dokážou vytvořit aritmetickou představu. Z toho důvodu jsem si myslela, že by úloha mohla odlišit nadané žáky od ostatních.

Pátá úloha byla problémová a dalo se očekávat, že bude náročná pro nenadané i pro nadané žáky. Zajímalo mě, jak v ní uspějí matematicky nadaní žáci, jejichž matematické představy by měly být na nejvyšší úrovni.

## Analýza úloh a priori

1. Slovní zadání lze přepsat do matematického zápisu $5 \cdot \square - 25 = 100$. Poté je možné úlohu řešit pamětně například tak, že se na prázdné místo doplňují různá čísla a kontroluje se rovnost.

   Úlohu je také možné řešit od konce, pomocí inverzních operací: $100 + 25 = 125$, $125 : 5 = 25$.

   Je možné postupovat i algebraicky, sestavením rovnice $5x - 25 = 100$. Jedná se o rovnici, která by byla řešena ve dvou krocích:

$$
\begin{aligned}
5x - 25 &= 100 \;/{+25}\\
5x &= 125 \;/{:5}\\
x &= 25
\end{aligned}
$$

   Hledané číslo je tedy 25. Provedeme kontrolu dosazením do zadání: $25 \cdot 5 = 125$, $125 - 25 = 100$.

2. Zadání lze přepsat do matematického zápisu $[(\square + 7) : 3] \cdot 5 = 45$. Je možné postupovat aritmeticky. Zaměříme se na číslo 45, které je možné napsat v součinovém tvaru jako $9 \cdot 5 = 45$. V hranaté závorce je tedy číslo 9, které získáme, když 27 vydělíme třemi. Neznámé číslo tedy musí být 20. Pro žáky je dovednost vnímat čísla v součinovém či součtovém tvaru podstatná a při řešení rovnic může usnadňovat výpočty.

   Další aritmetický postup je pomocí metody od konce: $45 : 5 = 9$, $9 \cdot 3 = 27$, $27 - 7 = 20$.

   Úlohu můžeme řešit i algebraicky sestavením rovnice $[(x + 7) : 3] \cdot 5 = 45$. Pomocí formálních operací by se rovnice řešila ve třech krocích:

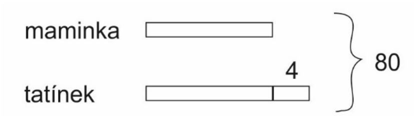
$$
\begin{aligned}
[(x + 7) : 3] &= 45 \;/ : 5\\
(x + 7) &= 9 \;/ \cdot 3\\
x &= 27 \;/ - 7
\end{aligned}
$$

   Hledané číslo je 20. Prověříme správnost dosazením do zadání: $20 + 7 = 27$, $27 : 3 = 9$, $9 \cdot 5 = 45$.

3. Úlohu je možné přepsat do matematického zápisu $9 \cdot \square + 10 = 100$ a úloha je řešitelná stejnými metodami jako úloha 1. Velký rozdíl pro žáky ale představuje způsob zadání. Zatímco úloha 1 byla zadána ve formě aritmetické slovní úlohy, úloha 3 je dynamická. Žáci se tedy v první řadě musí vyznat v časových hladinách, což by mohl být problém, a úloha je proto náročnější než úloha 1. Dalším ztěžujícím faktem je použití kondicionálu (nereálné podmínky), který je pro žáky daného věku náročný. Kaslová, Fialová, Čížková a Korda (2007) uvádí možnost vědomého používání podmínky od 5. ročníku ZŠ a rozlišují podmínky reálné (když ano, když ne) a nereálné (kdyby ano, kdyby ne). V úloze je použita podmínka nereálná – sta let se dožije velmi málo lidí. Odpověď: Romanovi je 10 let.

4. Jedná se o dělení celku na nestejné části. V zadání je obsažen operátor porovnání, přičemž neznáme věk ani jednoho z rodičů. Tím je úloha pro žáky 1. stupně netypická a náročná. Úlohu je možné řešit tak, že 80 vydělíme dvěma. Pokud by rodiče byli stejně staří, měli by 40 let. Jestliže tatínek je o 4 roky starší než maminka, musíme mamince 2 roky ubrat a tatínkovi tyto 2 roky přidat. Mamince je tedy 38 let a tatínkovi 42.

   Úlohu můžeme také řešit pomocí úsečkového modelu, ze kterého vyčteme aritmetické vztahy:

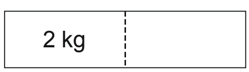
   Platí: 80 – 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42. Mamince je 38 let a tatínkovi 42.

   Novotná (1997) uvádí, že ze dvou výše zmíněných postupů, tj. 80 : 2 = 40, 40 – 2 = 38, 40 + 2 = 42 a 80 – 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42, je druhý postup univerzálněji využitelný, lze jej zobecnit i pro dělení celku na více než dvě části. První postup je navíc rizikovější z hlediska udělání chyby, kdy žáci inklinují k nesprávnému výpočtu 80 : 2 = 40, 40 – 4 = 36, 40 + 4 = 44.

   Algebraicky lze úlohu řešit rovnicí $x + (x + 4) = 80$, kde neznámá $x$ je věk maminky, nebo soustavou rovnic $x + y = 80$, $y = x + 4$, kde x značí věk maminky a $y$ věk tatínka.

   Provedeme zkoušku slovní úlohy: 38 + 42 = 80, 42 – 4 = 38.

5. Jedná se o problémovou úlohu. Úloha je pro žáky 1. stupně netypická tím, že číslo se v ní vyskytuje jak v roli kvantity (2 kilogramy), tak operátoru (polovina kapra). Kromě toho je zadání netypicky formulováno a vyžaduje jazykový cit. Úlohu je účelné graficky znázornit, což je možné pomocí vah, nebo pomocí obdélníku jako na Obr. 15. Odtud je také zřejmé, že kapr váží 4 kilogramy.




*Obr. 15 Grafické znázornění problémové úlohy*

U každé z uvedených úloh lze sledovat linii řešitelských strategií *experiment → aritmetické strategie → algebraické strategie.* V tomto směru budu rovněž posuzovat sofistikovanost použitých strategií. Na matematické znalosti a dovednosti je nejméně náročná a také nejméně sofistikovaná experimentální strategie, za nejsofistikovanější lze považovat algebraické strategie (ovšem za předpokladu, že žák chápe, co provádí, a nemá jen naučenou sekvenci kroků pro určité typy úloh). Také v rámci jednotlivých kategorií se sofistikovanost řešení může lišit. Například u aritmetické metody budu jako sofistikovanější chápat ty strategie, které více souvisejí se způsobem řešení rovnice, jako jsou šipkové diagramy, postup od konce či úsečkový diagram, nežli početní postupy, jako je třeba rozklad čísla na součin (viz úloha 2).

## – 3 – 4 ANALÝZA DAT

Písemná řešení žáků jsem analyzovala z hlediska použitých metod řešení a chyb, kterých se žáci dopouštěli. Přitom jsem si všímala i částí řešení, které byly škrtnuty, pokud mi poskytly vhled do žákova uvažování. Žáci dostali pokyn, aby zapsali i postup řešení, nejen výsledky, a většinou tak činili.

Výsledky analýz žákovských řešení jsem dávala do souvislostí s písemnými záznamy učitelů. Jak jsem již uvedla, ne všichni učitelé respektovali pokyn, aby s žáky diskutovali o jejich metodách řešení. Z 16 zapojených učitelů komentovalo průběh řešení 7, z toho 2 učitelé podávali záznamy velmi podrobné (popsali osobnost každého žáka, jeho projevy při řešení, jak se vyrovnával s tím, že nemůže objevit řešení, na co se v průběhu řešení ptal, jak reagoval v následné diskusi), ostatních 5 učitelů poskytovalo výpovědi stručné (např. pouze zapsali, když žák položil nějakou neočekávanou otázku). Žáci se v pracovním listu vyjadřovali k náročnosti úloh a v rámci diskuse s učitelem mělo být také rozebráno, které úlohy se jim jevily náročné a proč.

U každé úlohy jsem sledovala, zda existuje statisticky významný rozdíl mezi výsledky žáků nadaných a nediagnostikovaných. Na hladině významnosti 0,05 byla testována nulová hypotéza $H_0$: *Úspěch v úloze X a nadání spolu nesouvisí* proti alternativní hypotéze $H_1$: *Úspěch v úloze X a nadání spolu souvisí* pro žáky 4. a 5. ročníku zvlášť i pro obě skupiny dohromady. Byl použit chí-kvadrát[11] testu nezávislosti. V případě, že nebyly splněny podmínky dobré aproximace, byl použit Fisherův přesný test.

Žáci u každé úlohy dokreslovali smajlíky podle toho, jak se jim úloha líbila. Oblibu úloh dle smajlíku jsem vyhodnocovala, protože ale tyto výsledky nejsou pro práci podstatné, nebudu se jimi zabývat.

[11] Jedná se o test významnosti, který ověřuje, zda se četnosti, které byly získány měřením v pedagogické realitě, odlišují od teoretických četností, které odpovídají dané nulové hypotéze.

## – 3 – 5 VÝSLEDKY

Některé výsledky, které uvádím, byly již publikovány časopisecky (Budínová, 2016).

**Úloha 1:** *Myslím si číslo. Když je vynásobím 5 a odečtu 25, dostanu 100. Které číslo si myslím?*

Nejčastěji žáci řešili úlohu pomocí zápisu □ · 5 – 25 = 100, kde na prázdnou pozici doplnili číslo 25, tedy 25 · 5 – 25 = 100. U tohoto řešení není zcela jasné, jak žák postupoval. Buď mohl volit strategii pokusu a omylu, nebo řešení od konce, které však nezapsal. Občas se objevilo také explicitně zadané řešení od konce, tj. úvaha 100 + 25 = 125, 125 : 5 = 25.

Úspěšnost žáků v úloze 1 je uvedena v Tab. 7. Přestože počet žáků je v některých skupinách nízký, úspěšnost je uvedena v procentech, aby mohly být výsledky rychle porovnány.

*Tab. 7 Úspěšnost, úloha 1*

| | **Počet žáků** | | | **Úspěšnost** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Celkem | 4. ročník | 5. ročník | Celkem | 4. ročník | 5. ročník |
| Nadaní | 28 | 13 | 15 | 22 (79 %) | 9 (69 %) | 13 (87 %) |
| Ostatní | 20 | 13 | 7 | 17 (85 %) | 11 (85 %) | 6 (86 %) |

Různé strategie řešení, které žáci používali, jsou uvedeny v Tab. 8.

*Tab. 8 Různé strategie řešení, úloha 1*

| | **Nadaní** | | **Ostatní** | |
|---|---|---|---|---|
| | 4. ročník | 5. ročník | 4. ročník | 5. ročník |
| Správně, úsudkem se zápisem □ · 5 – 25 = 100 | 7 | 3 | 5 | 5 |
| Správně, od konce | 0 | 4 | 1 | 1 |
| Správně, s použitím *x* | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Správně, bez uvedení postupu | 2 | 5 | 5 | 0 |
| Neřešeno | 2 | 1 | 2 | 1 |
| Chybná úvaha | 2 | 1 | 0 | 0 |

Z tabulky 8 vidíme, že jednoznačně převažovaly aritmetické strategie řešení. Jeden nadaný žák 5. ročníku řešil úlohu algebraicky, a to pomocí rovnice 5x – 25 = 100. To znamená, že se někde (např. při rozhovoru s rodiči nebo při čtení matematické knihy) setkal s algebraickým řešením a to použil.

Není patrný markantní rozdíl v přístupu k řešení mezi nadanými a ostatními žáky. Na hladině významnosti 0,05 se nepotvrdil rozdíl mezi výsledky nadaných a ostatních žáků[12]. Nejsofistikovanější použitou metodou byl postup od konce. U tohoto postupu můžeme sledovat, že mírně převažují počty nadaných žáků 5. ročníku nad ostatními skupinami.

**Úloha 2:** *Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?*

Souhrnné výsledky úspěšnosti jsou uvedeny v Tab. 9 a použité strategie v Tab. 10.

*Tab. 9 Úspěšnost, úloha 2*

| | **Počet žáků** | | | **Úspěšnost** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Celkem | 4. ročník | 5. ročník | Celkem | 4. ročník | 5. ročník |
| Nadaní | 36 | 21 | 15 | 32 (89 %) | 17 (81 %) | 15 (100 %) |
| Ostatní | 37 | 18 | 19 | 28 (76 %) | 14 (78 %) | 14 (74 %) |

Při pohledu do Tab. 9 je patrné, že se mírně liší výsledky nadaných a ostatních žáků. Rozdíl však není statisticky významný na hladině významnosti 0,05.[13]

[12] Nadaní žáci 4. a 5. ročníku byli při řešení úlohy 1 úspěšní v 78,57 %, ostatní žáci v 85,00 % případů. Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu $H_0$: „úspěch v úloze 1 a nadání spolu nesouvisí“ proti alternativní hypotéze $H_1$: „úspěch v úloze 1 a nadání spolu souvisí“. Pearsonův chí-kvadrát = 0,316, p = 0,573. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 4. ročníku byli při řešení úlohy 1 úspěšní v 69,23 %, ostatní žáci v 84,62 % případů. Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu $H_0$: „úspěch v úloze 1 a nadání spolu nesouvisí“ proti alternativní hypotéze $H_1$: „úspěch v úloze 1 a nadání spolu souvisí“. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 0,645, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 5. ročníku byli při řešení úlohy 1 úspěšní v 86,67 %, ostatní žáci v 85,71 % případů. Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu $H_0$: „úspěch v úloze 1 a nadání spolu nesouvisí“ proti alternativní hypotéze $H_1$: „úspěch v úloze 1 a nadání spolu souvisí“. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 1,000, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

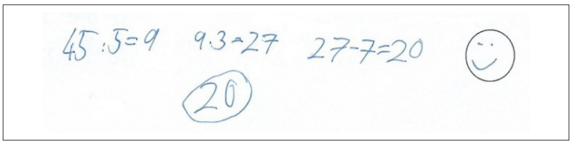
[13] Nadaní žáci 4. a 5. ročníku byli při řešení úlohy 2 úspěšní v 88,89 %, ostatní žáci v 75,68 % případů. Pearsonův chí-kvadrát = 2,176, p = 0,140. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 4. ročníku byli při řešení úlohy úspěšní v 80,95 %, ostatní žáci v 77,78 % případů. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 1,000. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 5. ročníku byli při řešení úlohy 2 úspěšní v 100,00 %, ostatní žáci v 73,68 % případů. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 0,053. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Sledovala jsem ještě to, jak byli úspěšní matematicky nadaní žáci. Těch bylo 8 a všichni úlohu řešili správně. Nejčastěji postupovali od konce, v jednom případě se objevilo také algebraické řešení, a to u nadaného žáka 5. ročníku.

*Tab. 10 Různé strategie řešení, úloha 2*

| | **Nadaní** | | **Ostatní** | |
|---|---|---|---|---|
| | 4. ročník | 5. ročník | 4. ročník | 5. ročník |
| Správně, experimentem $[(\square + 7) : 3] \cdot 5 = 45$ | 4 | 1 | 5 | 3 |
| Správně, od konce 45 : 5, 9 · 3, 27 – 7 | 7 | 12 | 6 | 8 |
| Správně, přes *x* | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Správně, bez popisu | 6 | 1 | 3 | 3 |
| Chybně | 4 | 0 | 4 | 5 |

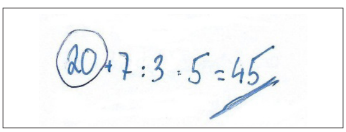
Nejčastějším postupem byl postup od konce (Obr. 16), který lze zde vnímat jako nejsofistikovanější aritmetickou metodu. Nejčastěji ho používali nadaní žáci 5. ročníku.




*Obr. 16 Žák postupuje od konce. Matematicky nadaný žák 4. ročníku, ZŠ*

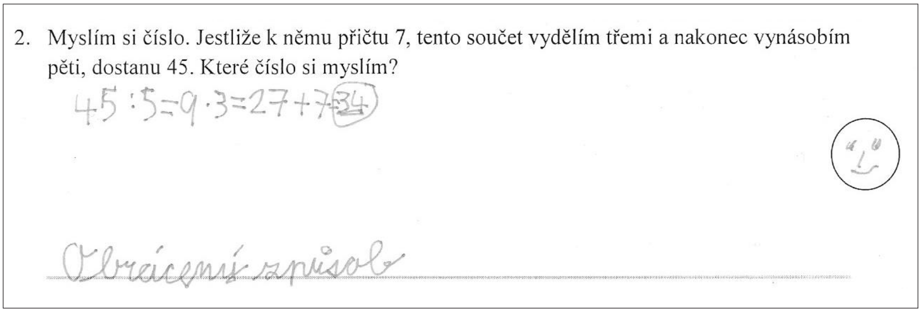
Často se také objevoval výsledek bez zapsání postupu a experimentální řešení, v němž žák hledal číslo, které bude splňovat požadované aritmetické vztahy. V tomto případě však není průkazné, jak žák vlastně postupoval. Mohlo to být metodou pokusu a omylu, kdy za neznámé číslo žák postupně dosazoval, či postupem od konce, který však nebyl zapsán. Jednotlivé možnosti se podstatně liší svojí sofistikovaností.

Na Obr. 17 vidíme řešení experimentem – žák si nechal volnou pozici, do které doplnil číslo. Lze si všimnout, že zápis neobsahuje závorky, ale žák postupuje tak, jako by tam byly.




*Obr. 17 Žák postupuje experimentálně. Nediagnostikovaný žák 4. ročníku, ZŠ*

Žáci také často používali postup od konce. V mnoha případech přitom využívali implikační zápis. Na Obr. 18 je ukázka chyby, které se někteří žáci dopustili. Žák použil „obrácený způsob“, jak uvádí, aplikoval tedy inverzní operace, ale u poslední operace vyměnil odčítání za sčítání.

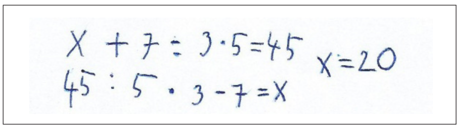

2. Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?

45 : 5 = 9 · 3 = 27 + 7 34

Obrácený způsob

*Obr. 18 Úloha řešená od konce s chybně volenou operací, implikační zápis. Všeobecně nadaný žák 4. ročníku, ZŠ*

Jeden nadaný žák 5. ročníku řešil úlohu algebraicky, pomocí rovnice. Na Obr. 19 vidíme, že provedl všechny operace v jednom kroku. Je otázkou, zda neměl pouze štěstí, když se dopracoval ke správnému výsledku. Ze zápisu například není průkazné, zda zvažoval přednost jednotlivých operací, protože zápis opět neobsahuje závorky.




*Obr. 19 Algebraické řešení úlohy s nekorektním zápisem. Všeobecně nadaný žák 5. ročníku, ZŠ, třída pro nadané*

**Úloha 3:** *Roman říká: „Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků.“ Kolik je mu roků?*

Někteří žáci měli problém uchopit dvě časové hladiny, což byl jeden z důvodů snížení úspěšnosti jinak jednoduchého matematického příběhu.

*Tab. 11 Úspěšnost, úloha 3*

| | **Počet žáků** | | | **Úspěšnost** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Celkem | 4. ročník | 5. ročník | Celkem | 4. ročník | 5. ročník |
| Nadaní | 32 | 17 | 15 | 17 (53 %) | 8 (47 %) | 9 (60 %) |
| Ostatní | 20 | 14 | 6 | 11 (55 %) | 10 (71 %) | 1 (17 %) |

Na to, abych mohla činit zásadní závěry, je počet žáků malý. Přesto si lze všimnout skutečnosti, že nejúspěšnější byli v řešení této úlohy nenadaní žáci 4. ročníku. U této úlohy nepomohlo, že žáci 5. ročníku již ovládají širší spektrum matematických poznatků. Schopnost vyřešit matematickou úlohu nesouvisí pouze s matematickými poznatky, ale také například se schopností či ochotou začít hledat řešení úlohy, která je pro žáka zcela neznámá.

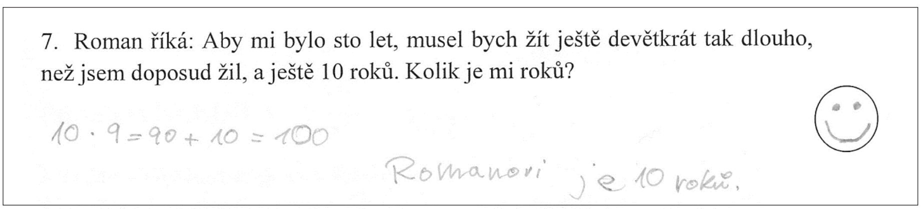
Nadaní žáci nebyli v této úloze úspěšnější než ostatní žáci, ani v případě 5. ročníku nebyl rozdíl statisticky významný.[14] Mezi nadanými žáky bylo 7 dětí matematicky nadaných, z nichž 5 dětí řešilo úlohu správně.

Nejčastěji jsem se setkávala s chybným řešením vycházejícím z nesprávné úvahy (žáci použili aritmetické operace se zadanými čísly, ale volba operací nebyla správná). Nejsofistikovanější aritmetickou metodou je v případě této úlohy opět postup od konce, který použili pouze nadaní žáci (Tab. 12).

*Tab. 12 Různé strategie řešení, úloha 3*

| | Nadaní | | Ostatní | |
|---|---|---|---|---|
| | 4. ročník | 5. ročník | 4. ročník | 5. ročník |
| Správně, experimentem $9 \cdot 10 + 10 = 100$ | 3 | 3 | 6 | 0 |
| Správně, od konce | 2 | 3 | 0 | 0 |
| Správně, bez postupu | 3 | 3 | 4 | 1 |
| Numerická chyba | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Neřešeno | 1 | 2 | 0 | 0 |
| Chybně | 8 | 4 | 4 | 4 |

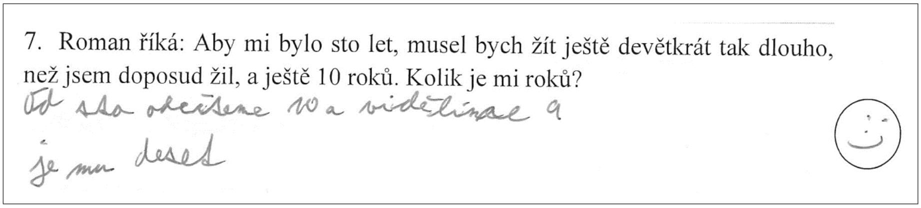
V případě správných řešení byla nejčastější úvaha $9 \cdot 10 = 90$, $90 + 10 = 100$, ke které může vést strategie pokusu a omylu, ale také vhled, či řešení od konce ($100 – 10 = 90$, $90 : 9 = 10$). Na Obr. 20 vidíme použití strategie od konce, můžeme sledovat implikační zápis, kdy je pro žákyni symbol „=" jen pokynem k počítání, nechápe jej jako znak pro rovnost ($10 \cdot 9$ na levé straně není rovno 100 na pravé straně).




*Obr. 20 Postup od konce s implikačním zápisem.*
*Nediagnostikovaná žákyně 5. ročníku, ZŠ*

[14] Nadaní žáci 4. a 5. ročníku byli při řešení úlohy 3 úspěšní v 53,13 %, ostatní žáci v 55,00 % případů. Pearsonův chí-kvadrát = 0,174, p = 0,895.
Nadaní žáci 4. ročníku byli při řešení úlohy 3 úspěšní v 47,06 %, ostatní žáci v 71,43 % případů. Pearsonův chí-kvadrát = 1,872, p = 0,171.
Nadaní žáci 5. ročníku byli při řešení úlohy 3 úspěšní v 60,00 %, ostatní žáci v 16,67 % případů. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 0,149.

Na Obr. 21 je uvedeno slovně popsané řešení od konce, které uvedl matematicky nadaný žák. Můžeme vidět pravopisnou chybu ve slově „vydělíme“. Někteří žáci opakovaně chybovali v předponách vy- a vý-, ale i v dalších pravidlech českého pravopisu.

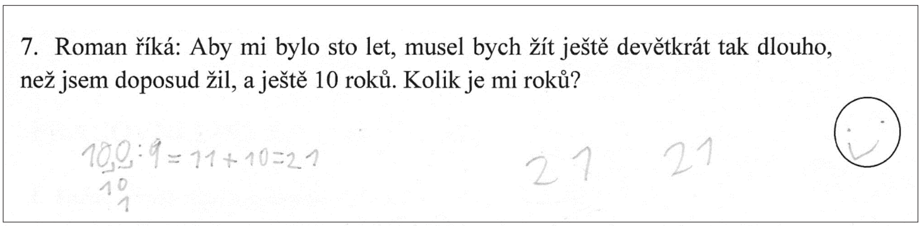

7. Roman říká: Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků. Kolik je mi roků?

Od sta odečteme 10 a vidělíme 9

je mi deset

*Obr. 21 Slovně popsaný postup od konce. Matematicky nadaný žák 5. ročníku, ZŠ*

Na Obr. 22 je ukázán postup mimořádně nadaného žáka, který při rozhovoru s učitelkou řekl, že z matematiky má nejraději příklady na „krát a děleno“. I v tomto případě vidíme, že uplatňuje nejdříve dělení a poté sčítání, avšak ne správně. Výsledek nezkontroloval zkouškou. V zápise opět můžeme sledovat chápání symbolu „=“ jakožto pokynu k počítání, žák jej nechápe jako znak pro rovnost (100 : 9 není rovno 21). V tomto případě se jedná o aritmetické řešení bez vytvoření aritmetické představy.


7. Roman říká: Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků. Kolik je mi roků?

100 : 9 = 11 + 10 = 21

10

1

21 21

*Obr. 22 Žák bere čísla ze zadání a provádí s nimi aritmetické operace. Mimořádně nadaný žák 4. ročníku, ZŠ s Daltonským plánem*

**Úloha 4:** *Mamince a tatínkovi je dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?*

Úspěšnost úlohy 4 je uvedena v Tab. 13.

*Tab. 13 Úspěšnost, úloha 4*

| | Počet žáků | | | Úspěšnost | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Celkem | 4. ročník | 5. ročník | Celkem | 4. ročník | 5. ročník |
| Nadaní | 37 | 21 | 16 | 33 (89 %) | 17 (81 %) | 16 (100 %) |
| Ostatní | 42 | 21 | 21 | 18 (43 %) | 9 (43 %) | 9 (43 %) |

Úloha 4 byla jediná z úloh, u níž se statisticky potvrdil rozdíl mezi výsledky nadaných a ostatních žáků. Na hladině významnosti 0,05 byla zamítnuta nulová hypotéza jak pro všechny žáky dohromady (Pearsonův chí-kvadrát 6,461538, p = 0,00002), tak pro žáky 4. ročníku (Pearsonův chí-kvadrát 18,45495, p = 0,01102) a 5. ročníku (Pearsonův chí-kvadrát 13,53143, p = 0,00023). Nadaní žáci obou ročníků jsou tedy statisticky významně úspěšnější v úloze 4 než ostatní žáci.

Mezi nadanými žáky 4. i 5. ročníku bylo 8 žáků matematicky nadaných. Zkontrolovala jsem i jejich výsledky a všichni úlohu řešili správně. U těchto žáků převažovalo sofistikovanější řešení výpočtem.

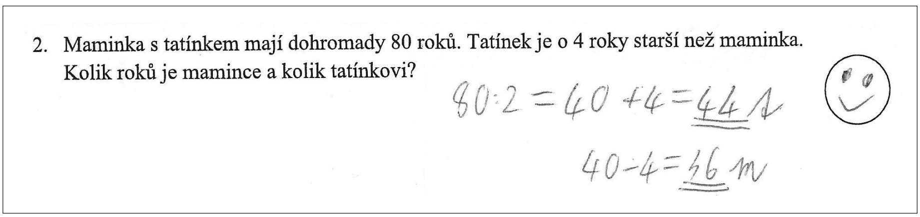
V této úloze mnoho žáků neuvedlo postup řešení, a to zejména žáci 4. ročníku. Neuvedený postup může mít v podstatě tři vysvětlení:

a) žák řešil experimentálně metodou pokusu a omylu;

b) žák si výpočet zapisoval stranou a do pracovního listu napsal jen výsledek;

c) žák vyřešil úlohu zpaměti.

Mnoho nediagnostikovaných žáků (platí to zejména pro žáky 5. ročníku) uvedlo nesprávný postup, kdy 80 vydělili dvěma a pak od 40 jednou odečetli 4 a podruhé přičetli 4. Dostali pak výsledek 36 a 44, jak ukazuje Obr. 23. Pokud žáci neprovedli zkoušku splnění podmínek slovní úlohy, nebo provedli jen zkoušku jedné z podmínek, a to 36 + 44 = 80, nepoznali, že výsledek není správný.


2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

80:2 = 40 + 4 = 44 t

40 − 4 = 36 m

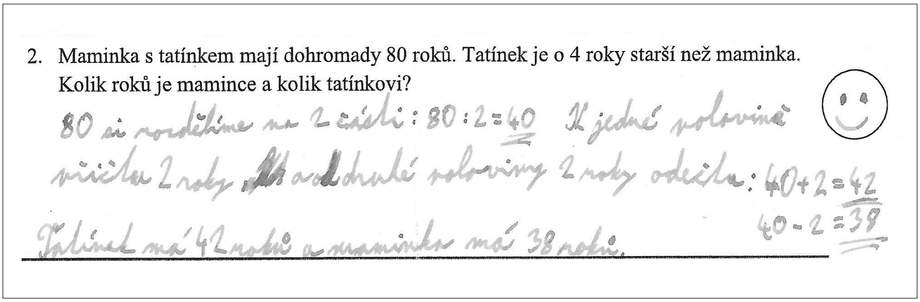
*Obr. 23 Řešení s chybou v úvaze.*
*Nediagnostikovaný žák 5. ročníku, ZŠ, matematická třída*

V případě správného řešení se objevily dvě možnosti výpočtu:

1) 80 : 2 = 40, 40 – 2 = 38, 40 + 2 = 42,

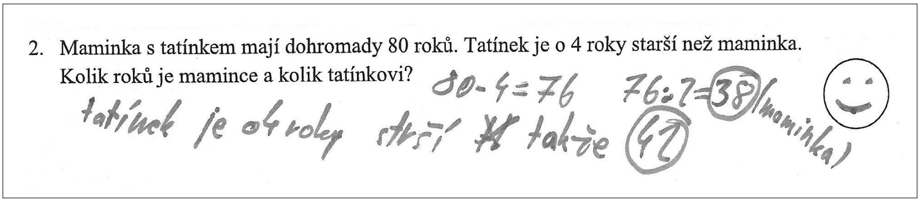
2) 80 – 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42.

Řešení jsou ukázána na Obr. 24.



2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

80 si rozdělíme na 2 části: 80 : 2 = 40 K jedné polovině přičtu 2 roky a od druhé poloviny 2 roky odečtu: 40 + 2 = 42
40 − 2 = 38
Tatínek má 42 roků a maminka má 38 roků.

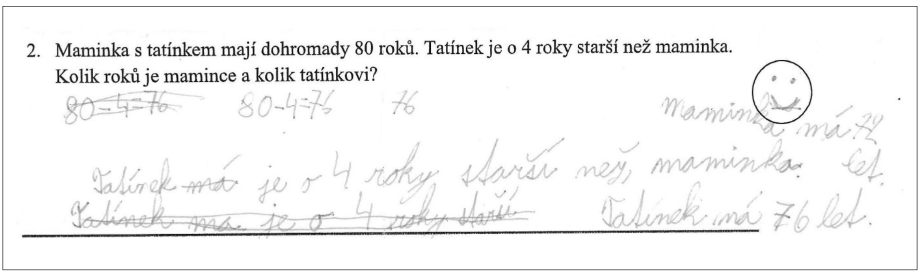


2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

80 − 4 = 76 76 : 2 = 38 (maminka)
tatínek je o 4 roky starší ~~4~~ takže 42

*Obr. 24 Dva způsoby správného řešení úlohy 4.*
*Nahoře matematicky a jazykově nadaná žákyně 4. ročníku, ZŠ.*
*Dole neidentifikovaný žák 5. ročníku, ZŠ, matematická třída*

Někdy žáci zvolili zcela nesprávnou úvahu. Jeden z případů je demonstrován na Obr. 25. Žák neprovedl zkoušku a nezkontroloval, zda je skutečně možné, aby mamince bylo 72 let a tatínkovi 76 let.



2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?

~~80 − 4 = 76~~ 80 − 4 = 76 76 Maminka má 72 let.
Tatínek ~~má~~ je o 4 roky starší než maminka.
~~Tatínek má je o 4 roky starší~~ Tatínek má 76 let.

*Obr. 25 Úloha vyřešená pomocí nesprávné úvahy.*
*Nediagnostikovaná žákyně 4. ročníku, ZŠ, matematická třída*

Různé strategie řešení jsou uvedeny v Tab. 14.

*Tab. 14 Různé strategie řešení, úloha 4*

| | Nadaní | | Ostatní | |
|---|---|---|---|---|
| | 4. ročník | 5. ročník | 4. ročník | 5. ročník |
| Správně, výpočtem 80 : 2 = 40, 40 – 2, 40 + 2 | 4 | 7 | 2 | 3 |
| Správně, výpočtem (80 – 4) : 2 = 38 | 2 | 4 | 1 | 4 |
| Správně, bez postupu | 11 | 5 | 6 | 2 |
| Chybně: 36 a 44 | 1 | 0 | 5 | 10 |
| Chybně | 1 | 0 | 7 | 2 |
| Neřešeno | 2 | 0 | 0 | 0 |

Úloha poměrně dobře odlišuje nadané děti od ostatních. Zatímco někteří nadaní v následném rozhovoru s učitelem uvedli, že úloha pro ně byla velmi jednoduchá, mnoho nediagnostikovaných dětí se v zadání ztrácelo. V tabulce můžeme zejména vidět, že mnoho těchto dětí si neuvědomilo, že když dělí dvěma součet let (80 : 2), musí také vydělit dvěma rozdíl let (4 : 2).

**Úloha 5:** *Kapr váží 2 kilogramy, a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?*

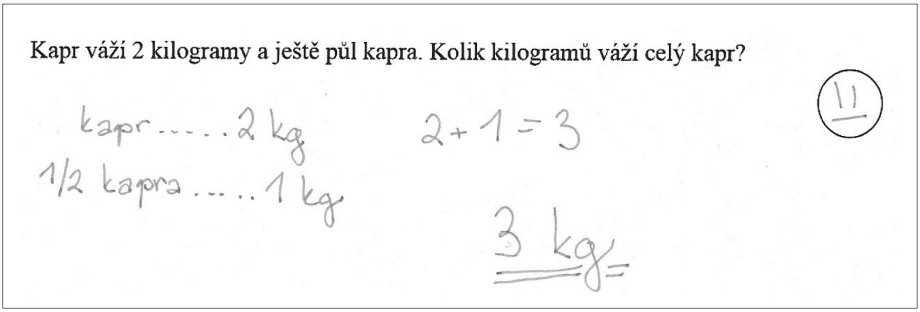
Uvedená úloha se řadí do problémových úloh. Úloha byla pro mnoho žáků náročná, nedokázali najít aritmetickou představu, která by jim v řešení pomohla. Jak už bylo uvedeno výše, netypické je pro žáky 1. stupně zejména to, že zde najdeme číslo ve formě kvantity (2 kilogramy) a číslo jakožto operátor (polovina kapra). Dále je zadání popsáno pro žáky netypickým jazykem. Patrně z tohoto důvodu několik žáků (a to i nadaných) napsalo, že je úloha nejasně zadaná.

Celkové výsledky úspěšnosti jsou uvedeny v Tab. 15.

*Tab. 15 Úspěšnost, úloha 5*

| | Počet žáků | | | Úspěšnost | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Celkem | 4. ročník | 5. ročník | Celkem | 4. ročník | 5. ročník |
| Nadaní | 27 | 12 | 15 | 7 (26 %) | 3 (25 %) | 4 (27 %) |
| Ostatní | 20 | 11 | 9 | 2 (10 %) | 1 (9 %) | 1 (11 %) |

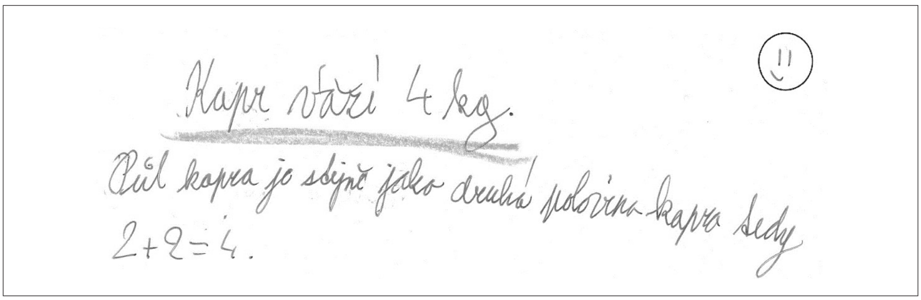
Žáci měli největší problém zvolit základ, ze kterého určují polovinu. Nejčastěji se z tohoto důvodu objevovala nesprávná úvaha: celý kapr váží 2 kg, polovina kapra tedy váží 1 kg a dohromady jsou to 3 kg. Postup je demonstrován na Obr. 26.




*Obr. 26 Řešení úlohy nesprávnou úvahou.*
*Všeobecně nadaná žákyně 5. ročníku, ZŠ, třída pro nadané*

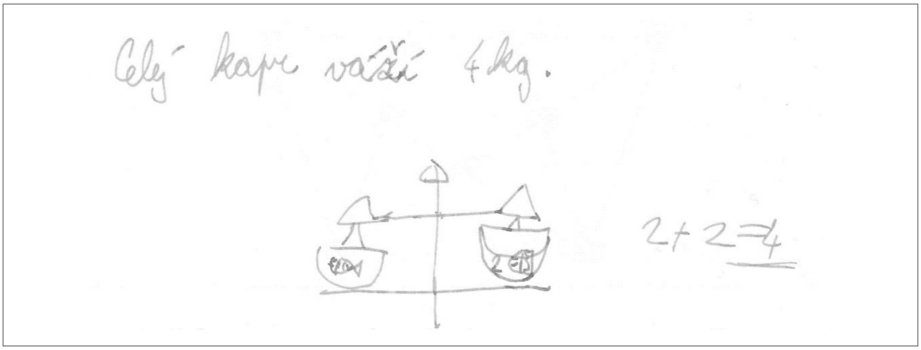
Často se objevovaly i jiné chybné výsledky, ale u nich lze těžko odhadovat, jak k nim žáci dospěli. Když byl uveden například výsledek 68 kg, vypadalo to spíše na recesi.

Několik žáků bylo schopno ke správnému výsledku dospět úvahou, jak je znázorněno na Obr. 27.




*Obr. 27 Správně vyřešená úloha se slovním popisem úvahy.*
*Všeobecně nadaná žákyně 5. ročníku, ZŠ, třída pro nadané*

Dva žáci se k výsledku dopracovali tak, že si znázornili rovnoramennou váhu (Obr. 28). Z nízkého počtu žáků využívajících obrázek vyplývá, že žáci nejsou zvyklí používat ve svých řešeních grafická znázornění, která by jim mohla pomoci se v úloze orientovat.




*Obr. 28 Správné řešení se znázorněním pomocí vah.*
*Všeobecně nadaná žákyně 5. ročníku, ZŠ*

Použité strategie řešení jsou uvedeny v Tab. 16.

*Tab. 16 Různé strategie řešení, úloha 5*

| | **Nadaní** | | **Ostatní** | |
|---|---|---|---|---|
| | 4. ročník | 5. ročník | 4. ročník | 5. ročník |
| Správně, úvahou | 2 | 2 | 0 | 1 |
| Správně, váhy | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Správně, bez postupu | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Chybně: 3 kg | 5 | 7 | 6 | 2 |
| Chybně | 3 | 4 | 3 | 5 |
| Neřešeno | 1 | 0 | 1 | 1 |

Úspěšnost řešení byla nízká jak u žáků nenadaných, tak u žáků nadaných; ani matematicky nadaní žáci, kterých bylo 5, nebyli příliš úspěšní – pouze dva z nich dokázali úlohu správně řešit. Z toho důvodu jsem neprováděla statistické výpočty. Úloha je pro žáky 1. stupně základní školy svým charakterem náročná.

## – 3 – 6 DISKUSE A ZÁVĚRY

Nyní je možné odpovědět na výzkumné otázky, které jsem si položila. První výzkumná otázka zjišťovala, zda budou nadaní žáci při řešení vybraných úloh úspěšnější než ostatní žáci. Obecně nelze tvrdit, že u vybraných úloh by nadaní žáci byli při řešení úspěšnější než ostatní žáci. To může být samozřejmě dáno malým vzorkem zkoumaných žáků, ale spíše se domnívám, že tento závěr skutečně odráží realitu. Nadaní a bystří žáci se od sebe svými výkony v matematice nemusí příliš lišit. Nadaní žáci, zejména pak matematicky nadaní, častěji používají sofistikovanější metody řešení, avšak nejsou neomylní, dopouští se chyb logických i početních.

Druhá otázka se zaměřovala na jednotlivé úlohy a zjišťovala, zda mezi nimi bude taková, v níž budou nadaní žáci výrazně úspěšnější než nediagnostikovaní žáci. Viděli jsme, že u některých úloh byly výsledky nadaných a ostatních žáků srovnatelné, v některých dokonce ostatní žáci dopadli lépe. Nejvíce odlišovaly nadané a ostatní žáky úlohy 2 a 4. Statisticky významný byl rozdíl pouze u úlohy 4. Úloha 2 je aritmetická úloha, vedoucí k tříkrokové rovnici. Domnívám se, že právě tři kroky vedou k tomu, že pro žáky je náročnější řešit úlohu zcela pamětně. Nejčastěji žáci využívali sofistikovanou metodu řešení od konce. Úloha 4 je slovní úloha a k úspěšnému řešení je potřebná správná aritmetická představa. Pokud tuto představu žák nemá, nepřijde na to, jaké aritmetické operace má použít. Takové chyby v úvaze se častěji dopustili nediagnostikovaní žáci. Nadaní žáci nejčastěji použili buď jednu z uvedených výpočtových metod, nebo zapsali výsledek bez postupu, což může korespondovat s pamětným řešením.

Poslední otázka se ptala, které řešitelské strategie budou nadaní žáci preferovat. Vybraná strategie závisela na typu úlohy. U jednoduchých úloh převažovalo experimentální pamětní řešení, kdy žák zkoušel dosazovat různá čísla a kontroloval uvedené vztahy. V případě úlohy 2 byl často využívaným řešením postup od konce, v případě úlohy 4 aritmetické výpočty. U nejnáročnějších úloh, což byly úlohy 3 a 5, se mnoho žáků nepokusilo o řešení, případně neúspěšně experimentovalo. Úloha 3 je dynamická úloha. Někteří žáci měli problém uchopit dvě časové hladiny, což byl jeden z důvodů snížení úspěšnosti. To koresponduje se závěry Hejného (2003), podle nějž jsou kvůli uchopování časových hladin dynamické úlohy pro žáky náročnější než statické úlohy. Úloha 5 je netypická problémová úloha. Pro žáky byl mnohdy problém vůbec pochopit zadání úlohy, které je formulováno nezvyklým způsobem. U této úlohy byli úspěšnější žáci, kteří si situaci dokázali zakreslit, ale těch mnoho nebylo.

V případě úloh 3 a 5 vzrostlo procento žáků, kteří se řešení nepokusili hledat. Pokud se na základní škole učí převážně standardní úlohy, pak mohou mít žáci problémy s řešením problémových úloh. Někteří žáci potom vyžadují pro každou úlohu znalost algoritmu. V úloze se snaží známý algoritmus aplikovat, a pokud ho nenajdou, úlohu opustí bez řešení nebo ji „nějak“ vyřeší, bez ohledu na smysl úlohy.

V různých případech jsem se setkávala s nezvládnutou gramatikou zápisu. Jednalo se nejčastěji o používání zkrácených implikačních zápisů a nepoužívání závorek, jestliže mělo mít sčítání přednost před násobením. Zkrácený implikační zápis většinou nebývá vnímán jako závažná chyba, spíše jako pomocný zápis, ve kterém se žák vyzná. Kuřina (1989) tuto chybu označuje jako syntaktickou chybu a uvádí, že je pro žáky přirozená. „Žák úlohu postupně řeší, zapisuje dílčí výsledky a na ně navazuje dalším postupem“ (Kuřina, 1989: s. 32). Tento zápis je však matematicky nesprávný, protože je porušena tranzitivita relace rovnosti. Řešiteli může zápis dávat smysl, neboť řešitel rovnítko chápe jako implikaci. Je nutné si ale uvědomit, že pokud se žák naučí vnímat symbol „=“ jako jednosměrnou šipku ⇒, může mít problémy v rovnicových zápisech, kde je neznámá na obou stranách rovnice, a nelze tedy postupovat zleva doprava.

V testování se projevilo, že žáci neumí používat závorky. Stejnou zkušenost získala Žalská (2015) ve svém výzkumu, kde se projevily problémy žáků s aktivním používáním závorek (tedy použitím závorky jako symbolu pro celistvý algebraický nebo aritmetický objekt), v menší míře i s pasivním používáním závorek (tj. interpretací závorek a jejich významu v aritmetické a algebraické syntaxi při aplikaci distributivního zákona a pořadí operací). Potíž měli žáci s pořadím operací, kdy nezřídka postupovali zleva doprava a sčítali před násobením (např. $6 + 3 (2 + 1) = 9 (2 + 1)$). Nevyužívání závorek žákům na 2. stupni způsobuje problémy také v algebře, když už není možné provést naznačené operace a je například nutné roznásobit závorku.

Několik nadaných žáků využívalo algebraické zápisy. Často bylo patrné, že tito žáci si umí správně označit neznámou a sestavit rovnici, problémy měli obvykle jen s gramatikou zápisu (jak bylo již uvedeno, např. nepoužívali závorky). Rogers a Novotná (2003) uvádí čtyři stupně přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen v písemném záznamu zadaných informací:

1) Řešitel používá jedno písmeno k označení více neznámých, písmeno je pro něj označení jakékoli obecné neznámé.
2) Řešitel používá jedno nebo více písmen ve fázi kódování textu, ale nepracuje s nimi ve fázi transformace, neznámá je použita pouze jako označení něčeho, co se má hledat. Řešení je aritmetické.
3) Řešitel vědomě používá písmena pro označování hledaných hodnot a pro popis zadaných vztahů, avšak stále jsou pro něj důležité aritmetické modely, proto je použito aritmetické řešení.
4) Řešitel používá písmena k označení hodnot, uplatňuje algebraické operace. V tomto případě jsou splněny podmínky pro správné používání algebraických metod.

Jestliže žák 1. stupně používá písmena k řešení problému, není zcela jisté, na kterém stupni přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen se nachází. Pokud se jedná o umělé urychlení poznávacího procesu (např. žák zápisu nerozumí, ale líbí se mu, že ho používá mezi vrstevníky pouze on), vzniká riziko upevnění nesprávných představ o algebraických metodách. Zejména se jedná o přednost operací a používání závorek.

Závěrem zmíním, že žáci neprováděli zkoušku správnosti svých výpočtů. Z toho důvodu mnohdy neodhalili chybu, které se dopustili. Leckdy si žáci nevšimli ani výsledku, který byl v kontextu zadání nesmyslný.

# – 3 – 7 TYPY NADANÝCH ŽÁKŮ A JEJICH PŘÍSTUPY K ŘEŠENÍ ÚLOH

Jak bylo uvedeno výše, Betts a Neihart (2017) určili v roce 1988 šest profilů nadaných dětí, které se od sebe liší školními projevy a výkony: úspěšné děti, autonomní děti, skrývači nadání, defenzivní odpadlíci, provokatéři, děti s dvojí výjimečností. Kategorie se mezi sebou mírně prolínají a, jak uvidíme na případových studiích, není vždy jednoduché žáka zařadit do konkrétního profilu. Poslední výzkumná otázka se týkala identifikace zástupců těchto typů ve výzkumném vzorku žáků navštěvujících výše zmíněný kroužek a charakteristiky jejich přístupů k řešení.

## – 3 – 7 – 1 Identifikace zástupců jednotlivých profilů

Analyzovala jsem řešení všech žáků (diagnostikovaných i nediagnostikovaných) z výše uvedeného výzkumu, a to u všech úloh, nejen úloh rovnicového charakteru. Mezi žáky byli takoví, kteří mě téměř od začátku zaujali tím, že se něčím zásadně lišili od ostatních žáků. Jejich výkony v pracovních listech byly v určitém aspektu výjimečné a nezvyklé. Také z výpovědí učitelů (u všech vybraných žáků učitelé poskytovali komentáře) bylo patrné, že se jedná o jedinečné žáky.

Poté, co proběhl kroužek na školách, jsme na Pedagogické fakultě MU pořádali kurz pro mimořádně nadané, kterého se mohli účastnit vybraní žáci, kteří vyplňovali pracovní listy. Pokusila jsem se všechny tyto nevšední žáky do kurzu zapojit. Někteří z nich se kurzu opravdu účastnili, a měla jsem proto možnost je poznat i osobně a dlouhodoběji je pozorovat. Někteří bohužel zájem neměli a kurzu se neúčastnili.

Z šesti profilů Bettse a Neihartové jsem mezi těmito žáky objevila tři až pět profilů (pokusím se ukázat, že zařazování žáků není jednoznačné). Poslední žákyni uvádím jako příklad nadané žákyně, která má podprůměrné matematické schopnosti. Z tohoto důvodu z hlediska matematiky nespadá ani do jednoho profilu, přesto se jedná o inspirativní ukázku toho, jak různorodé jsou projevy nadání.

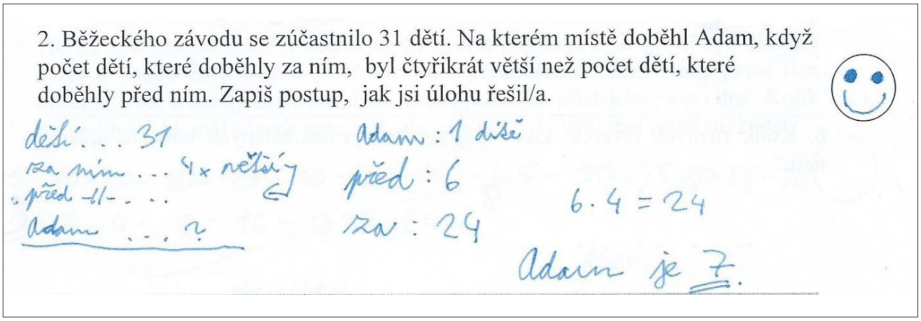
Uvedená jména žáků jsou smyšlená.

## – 3 – 7 – 2 Mini-případové studie

### LUCKA, 5. ročník, bez absolvování odborné identifikace nadání v PPP

Lucka ani její rodiče neměli zájem o testování nadání v pedagogicko-psychologické poradně. Kurzu se účastnila kvůli zájmu o matematiku. V pracovních listech vyřešila největší počet úloh ze všech žáků, a to 59 z 63, tedy 94 % úloh. Na základě toho a lehkosti, s jakou řešila všechny typy úloh, soudím, že se jednalo o žákyni s matematickým nadáním. Přestože jsme rodiče Lucky kontaktovali a doporučili jim odbornou identifikaci, neměli zájem.

Lucka byla specifická například tím, že si dokázala velmi účinně uspořádat data. Na Obr. 29 vidíme ukázku úlohy, v níž selhalo velké procento žáků. Lucka si přehledně zapsala všechny informace a úlohu zpaměti vyřešila. To poukazuje na schopnost analýzy.



2. Běžeckého závodu se zúčastnilo 31 dětí. Na kterém místě doběhl Adam, když počet dětí, které doběhly za ním, byl čtyřikrát větší než počet dětí, které doběhly před ním. Zapiš postup, jak jsi úlohu řešil/a.

děti . . . 31
za ním . . . 4x větší
před -//- . . .
Adam . . . ?

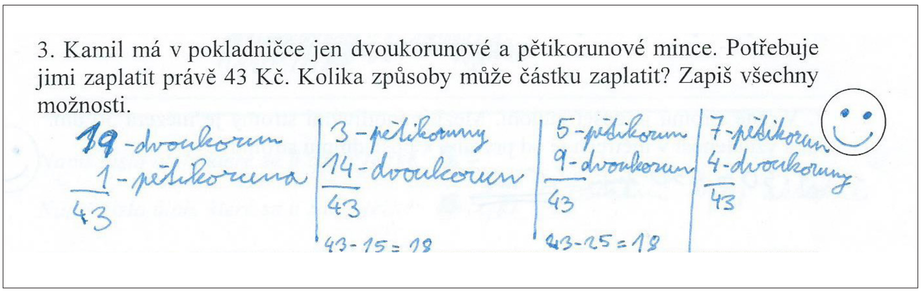
Adam : 1 dítě
před : 6
za : 24

6 · 4 = 24

Adam je 7.

*Obr. 29 Přehledné řešení náročné úlohy*

Obdobně na Obr. 30 vidíme efektivní řešení úlohy kombinatorického rázu, u níž je právě uspořádání informací podstatné.



3. Kamil má v pokladničce jen dvoukorunové a pětikorunové mince. Potřebuje jimi zaplatit právě 43 Kč. Kolika způsoby může částku zaplatit? Zapiš všechny možnosti.

19 - dvoukorun
1 - pětikoruna
43

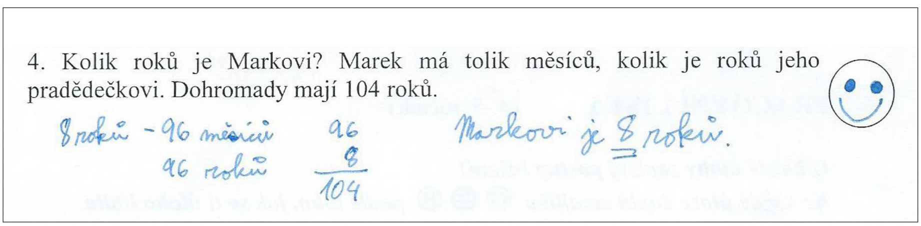
3 - pětikoruny
14 - dvoukorun
43
43 - 15 = 18

5 - pětikorun
9 - dvoukorun
43
43 - 25 = 18

7 - pětikorun
4 - dvoukoruny
43

*Obr. 30 S nadhledem řešená kombinatorická úloha*

Úlohy, které se mnoha jiným žákům jevily jako neřešitelné, řešila Lucka většinou zpaměti, což nejpravděpodobněji ukazuje na experimentální metodu založenou na dobrých aritmetických představách (Obr. 31).



4. Kolik roků je Markovi? Marek má tolik měsíců, kolik je roků jeho pradědečkovi. Dohromady mají 104 roků.

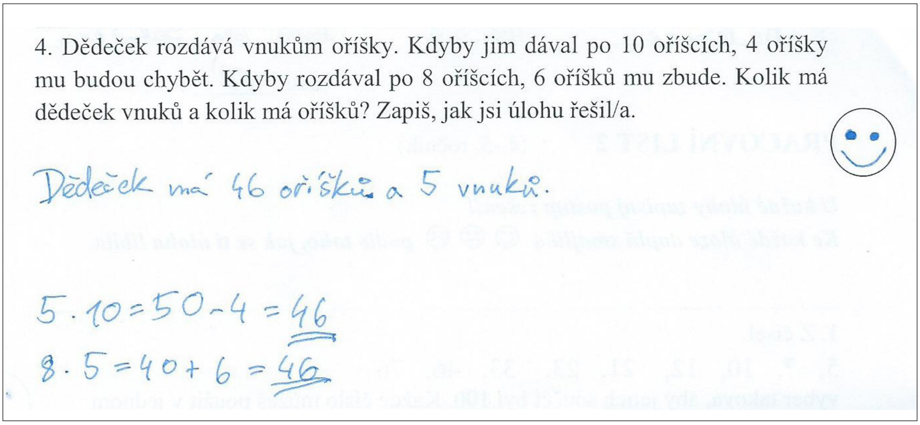
8 roků - 96 měsíců
96 roků

96
8
104

Markovi je 8 roků.

*Obr. 31 Pamětní řešení náročné úlohy – nejspíše experimentální*

Rovněž následující úlohu (Obr. 32) vyřešilo správně velmi málo žáků. Zde se setkáváme se zkráceným implikačním zápisem: 5 · 10 = 50 – 4 = 46.



4. Dědeček rozdává vnukům oříšky. Kdyby jim dával po 10 oříšcích, 4 oříšky mu budou chybět. Kdyby rozdával po 8 oříšcích, 6 oříšků mu zbude. Kolik má dědeček vnuků a kolik má oříšků? Zapiš, jak jsi úlohu řešil/a.

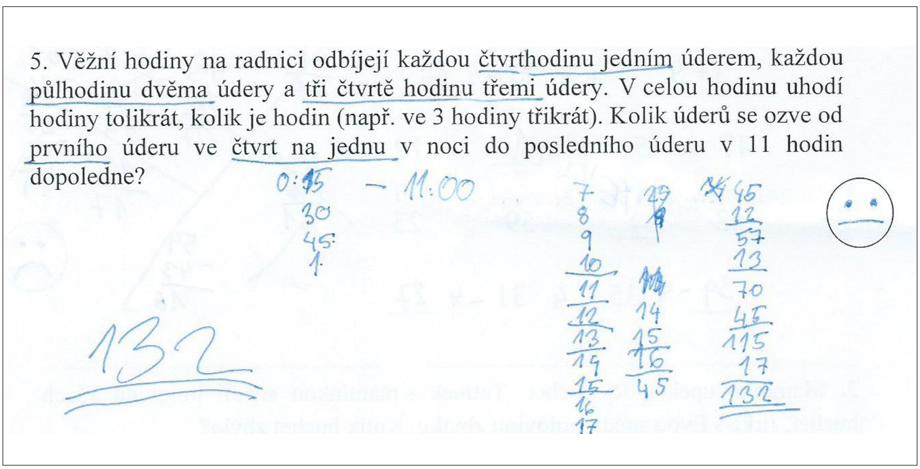
Dědeček má 46 oříšků a 5 vnuků.

5 · 10 = 50 – 4 = 46

8 · 5 = 40 + 6 = 46

*Obr. 32 Řešení jedné z náročnějších úloh*

V případě úlohy náročné na trpělivost a cílevědomost, v níž mnoho žáků selhalo kvůli neschopnosti vytrvat v hledání všech řešení, se Lucka projevila jako velmi houževnatá řešitelka a našla správné řešení. Můžeme si všimnout, že v úloze na Obr. 33 nepostupovala analyticky, jak by mohla (v celou hodinu je celkem 66 úderů, mezitím je vždy 6 úderů, to nastane jedenáctkrát, celkem tedy 132 úderů), ale vypisovala postupně, kolik úderů se ozve každou hodinu.



5. Věžní hodiny na radnici odbíjejí každou čtvrthodinu jedním úderem, každou půlhodinu dvěma údery a tři čtvrtě hodinu třemi údery. V celou hodinu uhodí hodiny tolikrát, kolik je hodin (např. ve 3 hodiny třikrát). Kolik úderů se ozve od prvního úderu ve čtvrt na jednu v noci do posledního úderu v 11 hodin dopoledne?

0:15 – 11:00
30
45
1

7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

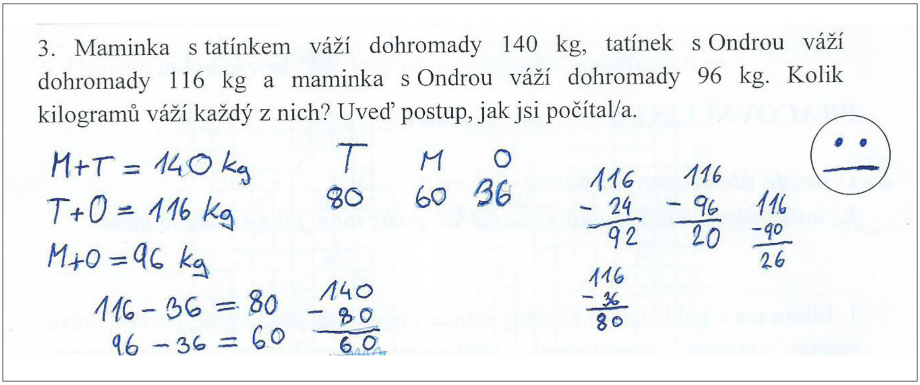
14 15 16 45

45 12 57 13 70 45 115 17 132

132

*Obr. 33 Postupné a trpělivé hledání výsledku*

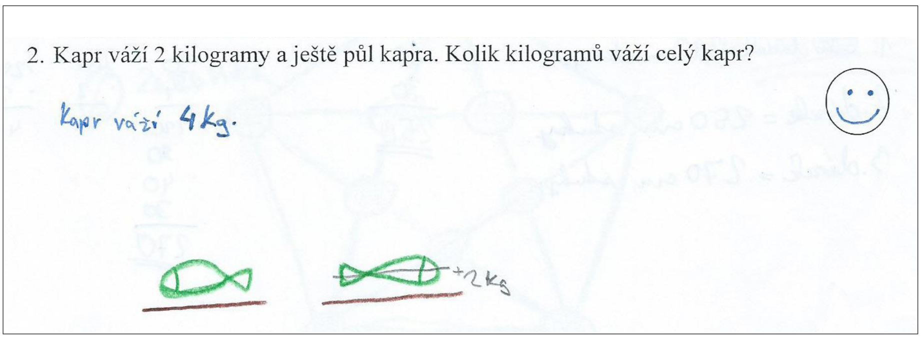
Velmi náročná byla pro většinu žáků úloha na Obr. 34. Lze sledovat, že Lucka hledá vztahy mezi jednotlivými veličinami, postupuje experimentálně.


3. Maminka s tatínkem váží dohromady 140 kg, tatínek s Ondrou váží dohromady 116 kg a maminka s Ondrou váží dohromady 96 kg. Kolik kilogramů váží každý z nich? Uveď postup, jak jsi počítal/a.



*Obr. 34 Experimentálně řešená úloha*

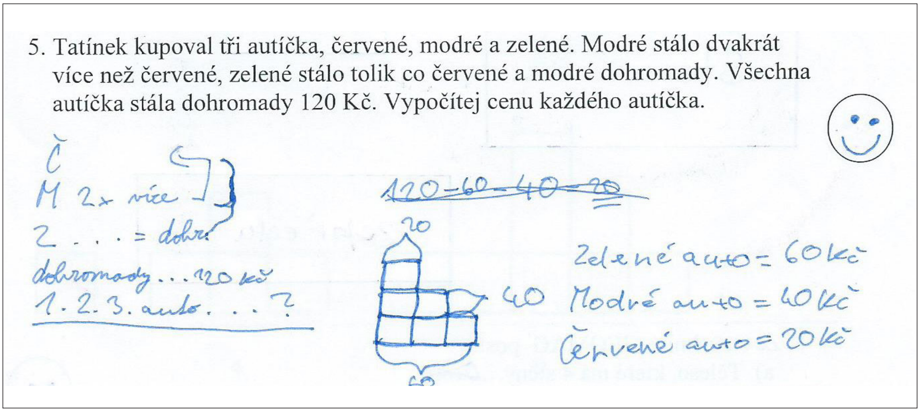
Lucka často využívala k řešení grafického znázornění. Na Obr. 35 je řešení problémové úlohy, která, jak bylo ukázáno výše, byla pro drtivou většinu žáků nejasná, protože nechápali vztahy mezi jednotlivými čísly.


2. Kapr váží 2 kilogramy a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?



*Obr. 35 Elegantní řešení problémové úlohy*

Také úlohu na Obr. 36 se Lucka rozhodla řešit aritmeticky s grafickým znázorněním.




*Obr. 36 Grafické řešení úlohy*

Když se podíváme globálně na přístupy Lucky k řešení úloh, můžeme sledovat následující fenomény:

- Byla schopna zapsat zadání úlohy srozumitelně a přehledně, což jí pomáhalo v následných úvahách.
- U některých náročnějších úloh přehledně rozepisovala zadané údaje (jako na Obr. 29), což může korespondovat se schopností analýzy.
- Velmi často volila k řešení řízenou experimentální strategii.
- Mnoho úloh, a to i těch náročnějších, byla schopna řešit pamětně, což může souviset s rozvinutými aritmetickými představami.
- V případě některých úloh volila grafické řešení, což jí dopomáhalo ke správnému výsledku.
- U pracných a časově náročných úloh byla ochotna systematicky hledat řešení.
- Téměř se nedopouštěla numerických chyb.

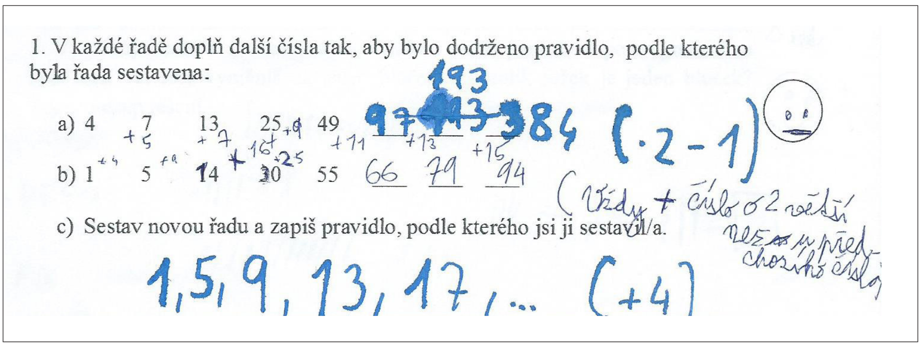
Lucku bych zařadila do profilů „úspěšné děti“ (oblíbené u učitelů, obdivované spolužáky i rodiči, mají excelentní výsledky ve škole) nebo „autonomní děti“ (obdivované pro své schopnosti, mají dobré sebevědomí, vysokou vnitřní motivaci). Luccini rodiče bohužel neměli zájem, aby se účastnila kurzu pro mimořádně nadané, neměla jsem tedy možnost ji poznat osobně a upřesnit si obrázek o ní.

## VAŠEK, 5. ročník, všeobecné nadání

Vašek byl pedagogicko-psychologickou poradnou identifikován jako všeobecně nadaný. Paní učitelka o něm říkala, že je to „třídní šašek“. Když měl plnit úkoly, často začal raději vyrušovat nebo se předvádět. Dával najevo svoji rozladěnost, když se mu nedařilo najít způsob výpočtu nebo výsledek. Několikrát se stalo, že odmítl nabízený papír na pomocné výpočty a pak si jimi popsal celou levou paži. Býval roztěkaný, někdy si nepřečetl správně zadání.

V našich pracovních listech dokázal správně vyřešit 51 z 63 úloh (84 %). Zajímavé bylo, že pomocí smajlíků u většiny úlohy vyjádřil to, že se mu úloha nelíbila. Všimla jsem si, že nejčastěji „šklebáka“ nakreslil u „počítacích“ úloh. „Usměváčka“ naopak nejčastěji nakreslil u geometrických úloh, ale pouze v případě, že nemusel nic kreslit nebo rýsovat. Líbily se mu také úlohy typu „výměnný obchod“[15]. Jeho přístupy k řešení nyní konkrétně demonstruji.

Úprava Vaškových řešení byla velmi často neúhledná, jak můžeme vidět na ukázce z Obr. 37. Často škrtal, nepsal na řádek, psal různě velké číslice, někdy vyměnil psací potřebu v průběhu zápisu jedné úlohy.


1. V každé řadě doplň další čísla tak, aby bylo dodrženo pravidlo, podle kterého byla řada sestavena:

a) 4 7 13 25 49 (·2 − 1)

b) 1 5 14 30 55 66 79 94 (Vždy + číslo o 2 větší než u předchozího čísla)

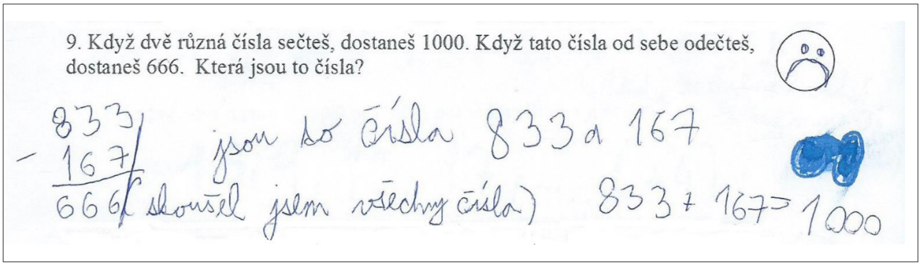
c) Sestav novou řadu a zapiš pravidlo, podle kterého jsi ji sestavil/a.

1, 5, 9, 13, 17, … (+4)

*Obr. 37 Vaškův neúhledný zápis řešení úlohy*

Vašek často používal experimentální metodu, a to spíše neekonomickým způsobem. Byl schopen vypsat všechny možnosti, aniž by sledoval jakékoli zákonitosti, které by mu pomohly urychlit hledání řešení. Všechny možnosti vypisoval na volný papír, případně na levou paži. Na Obr. 38 uvádí, že zkoušel „všechny čísla“. Skutečně, k pracovnímu listu byl přiložen papír A4, který byl celý hustě popsán různými možnostmi součtů a rozdílů dvou trojciferných čísel (např. 700 + 300 = 1 000, 700 – 300 = 400, 701 + 299 = 1 000, 701 – 299 = 398 atd.). Není divu, že se mu úloha nelíbila. Vzhledem k tomu, že jsem Vaška poznala osobně a vím, jak byl bystrý při řešení matematických úloh, není mi jasné, proč zde postupoval tak mechanicky.

[15] Jednalo se o úlohy typu: Jedno pero stojí dvě tužky a jedna tužka stojí tři gumy. Za kolik gum lze vyměnit dvě pera?



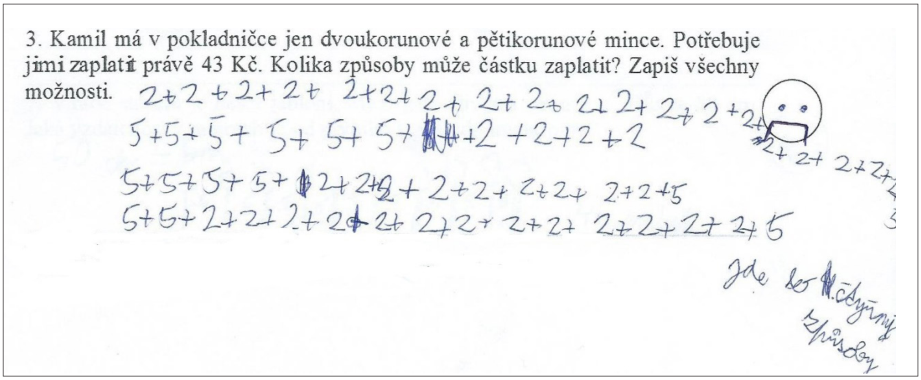
9. Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 1000. Když tato čísla od sebe odečteš, dostaneš 666. Která jsou to čísla?

$833 - 167 = 666$ jsou to čísla 833 a 167

(zkoušel jsem všechny čísla) $833 + 167 = 1000$

*Obr. 38 Ukázka úlohy řešené neřízeným experimentem*

Na Obr. 39 vidíme další ukázku Vaškova neúhledného a neekonomického zápisu, ve kterém řeší kombinatorickou úlohu.



3. Kamil má v pokladničce jen dvoukorunové a pětikorunové mince. Potřebuje jimi zaplatit právě 43 Kč. Kolika způsoby může částku zaplatit? Zapiš všechny možnosti.

2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+3

5+5+5+5+5+5+2+2+2+2

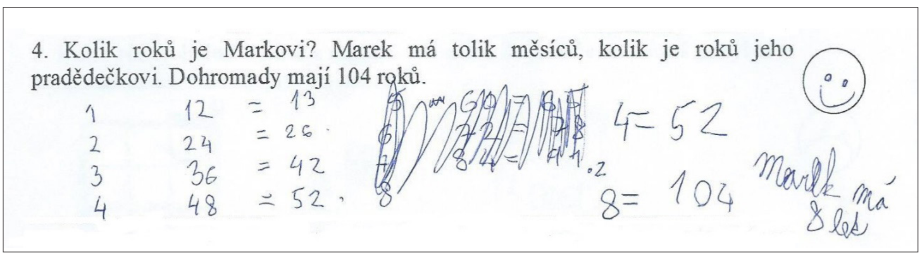
5+5+5+5+2+2+2+2+2+2+2+2+5

5+5+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+5

Jde to 4. čtyřmi způsoby

*Obr. 39 Zápisy měl neekonomické, neúhledné*

V některých případech se Vaškovi přece jen podařilo najít určitou zákonitost, jako je tomu v případě na Obr. 40. Nejdříve zvolil experimentální metodu a opět dosti svébytný způsob zápisu, kdy sčítal počet roků a příslušný počet měsíců. Pokračoval stále dál, když si všiml, že pro počet roků 4 u Marka je celkový počet roků 52, což je polovina oproti zadání. Tím, že se mu podařilo odhalit určitou zákonitost, se mu úloha zřejmě zalíbila, což ohodnotil „usměváčkem“.



4. Kolik roků je Markovi? Marek má tolik měsíců, kolik je roků jeho pradědečkovi. Dohromady mají 104 roků.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 12 | = 13 |
| 2 | 24 | = 26 |
| 3 | 36 | = 42 |
| 4 | 48 | = 52 |

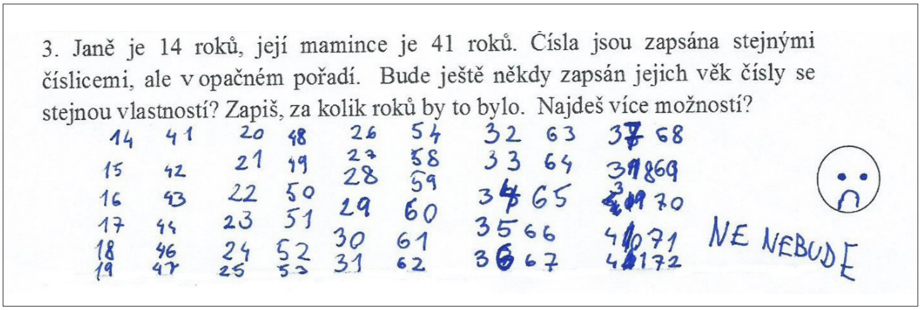
4 = 52

8 = 104

Marek má 8 let

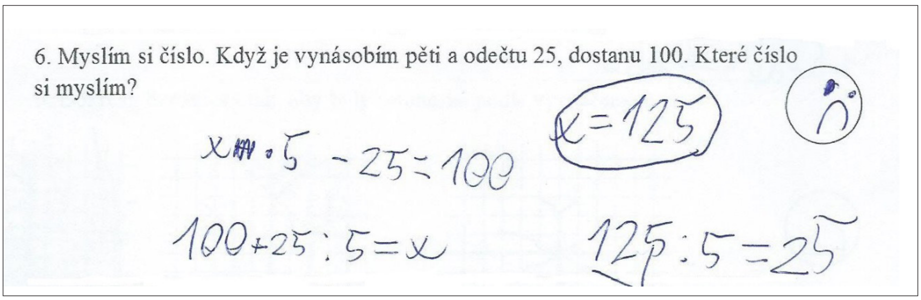
*Obr. 40 Úloha řešená řízeným experimentem*

Občas se stalo, že během zdlouhavého experimentování udělal Vašek numerickou chybu a nenašel správné řešení, jako např. na Obr. 41. Chybu najdeme hned ve druhém sloupci a pátém řádku, Vašek tudíž nemohl objevit správné řešení.



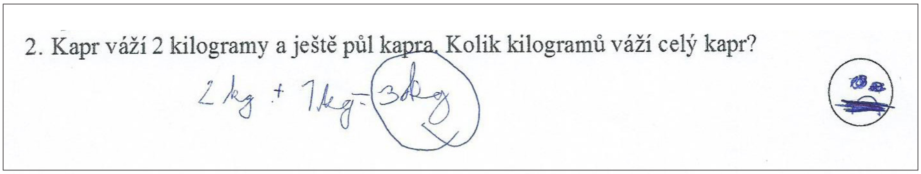

*Obr. 41 Experiment s numerickou chybou*

Úlohy, které byly řešitelné algebraicky, byl Vašek v jednodušších případech schopen řešit rovnicemi. Na Obr. 42 vidíme nekorektní zápis bez závorek (na druhém řádku by mělo být (100 + 25) : 5 = *x*), což, jak jsme viděli výše, je problém u dětí, které již na 1. stupni samovolně přecházejí k algebraickému řešení. Přestože použil správnou úvahu, výsledek zapsal špatně.




*Obr. 42 Algebraicky řešená úloha (zápis bez závorek, chyba v zapsání výsledku)*

U problémových úloh dosahoval Vašek slabých výsledků, ve většině případů neobjevil správnou logickou úvahu, která by jej dovedla k cíli. Navíc si většinou nebyl ani vědom, že nenašel správné řešení. Na Obr. 43 vidíme řešení problémové úlohy pomocí nesprávné úvahy (Vašek určil polovinu ze 2, měl ale určovat polovinu kapra). Po odevzdání pracovního listu Vašek učitelce řekl, že se mu úloha nelíbila, protože byla příliš jednoduchá.


2. Kapr váží 2 kilogramy a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?

2 kg + 1 kg = 3 kg

*Obr. 43 Řešení problémové úlohy*

U Vaška jsme pozorovali tyto fenomény:

- Používal experimentální metodu, a to mnohem častěji než Lucka. Jeho experimentování bylo neřízené, nesystematické, nehledal v něm žádnou zákonitost, která by mu pomohla řešení urychlit.
- Jeho zápis byl neúhledný, používal nekorektní matematické zápisy.
- Přestože většina jeho řešení byla nesofistikovaná, u některých úloh byl schopen použít algebraické řešení, občas s nekorektním zápisem.

Vašek měl jistě velký potenciál k rozvoji matematického myšlení. Bohužel tento potenciál zůstával ležet poněkud ladem, jeho řešení byla nesofistikovaná (často používaná experimentální metoda, avšak bez hledání zákonitosti). Při osobním kontaktu jsem si všimla, že Vašek je rád, když se rozebírá jeho způsob řešení, aniž by se mu hned prozradilo, že postupoval špatně a kde má chybu. Z toho důvodu jsem přesvědčena, že Vaškův potenciál by byl více zužitkován, pokud by se s ním diskutovalo nad různými možnostmi řešení. Vašek měl také určité osobnostní a charakterové potíže, které se projevovaly jeho chováním v hodinách matematiky.

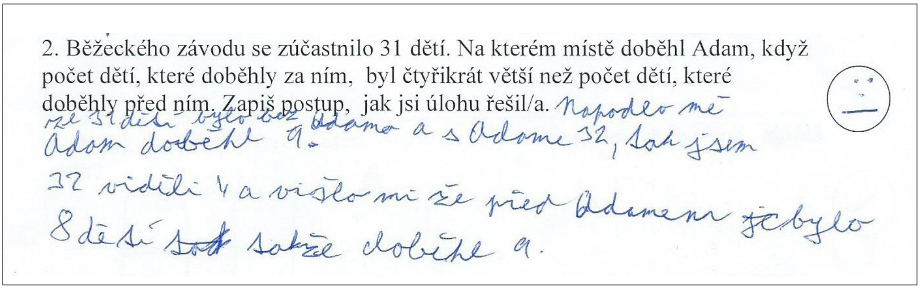
Oproti Lucce byl tedy Vašek typ žáka, u něhož nebylo nadání patrné. Zařadila bych ho do profilu „defenzivní odpadlík" (vnímáni jako neposlušní, nepřijímají je ani dospělí, ani vrstevníci; jsou stále v opozici, mají na vše vztek; objevuje se u nich nesoulad mezi inteligencí a školními výsledky, jsou vynikající v mimoškolních aktivitách) nebo „provokatér" (mívají problémy s disciplínou, působí jako iritující; ve škole se rychle začnou nudit, jsou netrpěliví, často v opozici, mají nízké sebevědomí). Jednoznačně bych si jej netroufla zařadit, vykazoval znaky obou kategorií.

## PATRIK, 5. ročník, matematické nadání

Patrik měl pedagogicko-psychologickou poradnou diagnostikováno matematické nadání. V našich testech obdržel 49 z 63 bodů (78 %). Byl u něj vidět velký pokrok, v prvním pracovním listu se mu příliš nedařilo, ale neustále se zlepšoval.

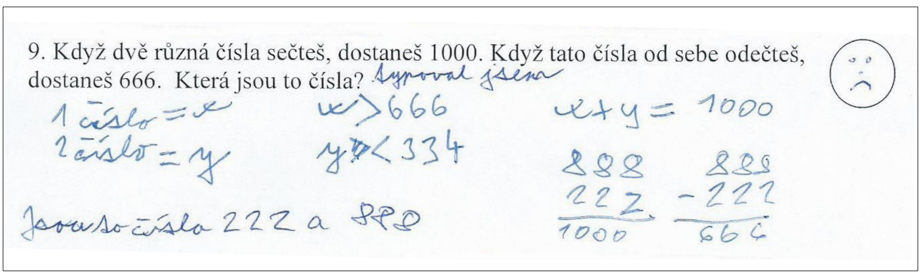
Patrika jsem měla možnost poznat i osobně, účastnil se našeho kroužku pro mimořádně nadané děti. Zde působil opravdu jako dítě mimořádně nadané pro matematiku, rychle chápal zákonitosti, svými matematickými znalostmi byl minimálně tři roky před vrstevníky. Vysokou rychlostí se učil – během čtvrt hodiny byl například schopen s využitím Montessori pomůcky Binomická krychle odvodit obecný vztah pro druhou mocninu dvojčlenu, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Přitom na začátku aktivity ani nevěděl, co to je mocnina, a byl s tímto pojmem teprve seznámen.

Patrikovi se zpočátku řešení úloh z pracovních listů moc nedařilo. V úloze na Obr. 44 přeformuloval zadání, ale i tak udělal v úvaze chybu. Nejdříve zvýšil počet dětí na 32, aby byl dělitelný čtyřmi. Neuvědomil si, že počet dětí bez Adama má vydělit pěti. Všimněme si, jak zapisoval slova „vydělil“ nebo „vyšlo“. S obdobnými chybami se budeme v Patrikových řešeních setkávat i v dalších ukázkách.


2. Běžeckého závodu se zúčastnilo 31 dětí. Na kterém místě doběhl Adam, když počet dětí, které doběhly za ním, byl čtyřikrát větší než počet dětí, které doběhly před ním. Zapiš postup, jak jsi úlohu řešil/a. Napodle mě ze 31 dětí bylo bez Adama a s Adame 32, tak jsem 32 vidělil 4 a vislo mi že před Adamem je bylo 8 dětí ~~tak~~ takže doběhl 9. Adam doběhl 9.

*Obr. 44 Úloha řešená špatnou úvahou*

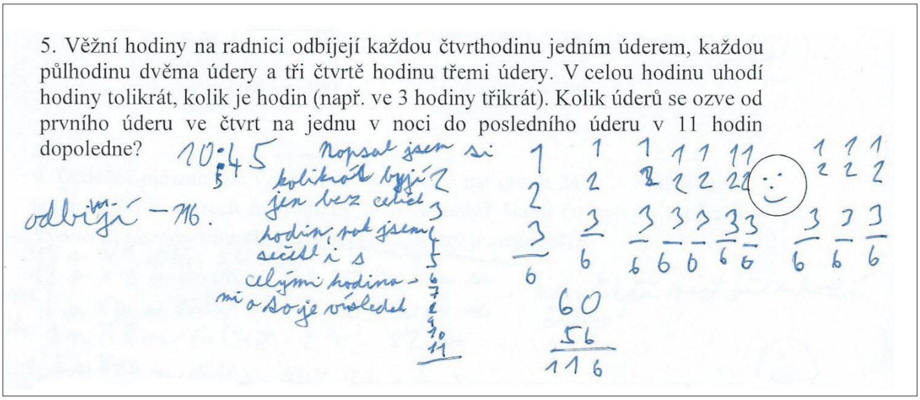
Rovněž v následující úloze, která je řešitelná aritmeticky, nebyl Patrik úspěšný. Nejdříve úlohu zapsal tak, jako by chtěl postupovat algebraicky, ale nakonec ji řešil experimentálně. Narazil možná na nedostatečné aritmetické představy a možná také na nedostatečnou dovednost sčítat a odčítat čísla s přechodem přes základ 10 nebo 100. Pokud by provedl řádně zkoušku a sčítal 888 + 222 = 1 110, mohl by dále postupovat například úvahou, neboť je zřejmé, že každý ze sčítanců je nutné zmenšit o 55.


9. Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 1000. Když tato čísla od sebe odečteš, dostaneš 666. Která jsou to čísla? Typoval jsem

1 číslo = x
2 číslo = y
x > 666
y < 334
x + y = 1000
888 + 222 = 1000
888 − 222 = 666
Jsou to čísla 222 a 888

*Obr. 45 Algebraický zápis, experimentální postup, nesprávný výsledek*

S poměrně těžkopádným řešením se u Patrika setkáváme také u úlohy s věžními hodinami. Není jasné, proč desetkrát dokola sčítal počet úderů mezi hodinami a nenásobil šest jedenácti. Ani údery v celých hodinách nespočítal správně, výsledek má špatně.


5. Věžní hodiny na radnici odbíjejí každou čtvrthodinu jedním úderem, každou půlhodinu dvěma údery a tři čtvrtě hodinu třemi údery. V celou hodinu uhodí hodiny tolikrát, kolik je hodin (např. ve 3 hodiny třikrát). Kolik úderů se ozve od prvního úderu ve čtvrt na jednu v noci do posledního úderu v 11 hodin dopoledne?

10:45

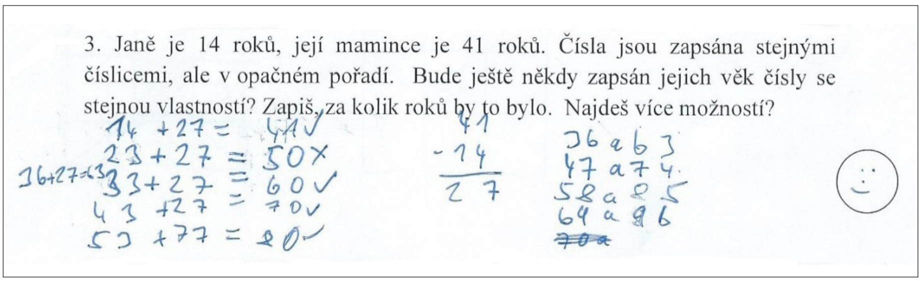
Napsal jsem si kolikrát bijí jen bez celých hodin, pak jsem sečetl i s celými hodinami a toje výsledek

odbíjí — 116.

60
56
116

Obr. 46 Složitě řešená úloha se špatným výsledkem

V následující úloze začal Patrik tím, že si vypočítal, o kolik let je maminka starší než dcera. Chvíli se snažil s tímto údajem operovat, ale pochopil, že pro řešení není relevantní. Nakonec se mu podařilo experimentálně objevit některá řešení (chybí 25 a 52).


3. Janě je 14 roků, její mamince je 41 roků. Čísla jsou zapsána stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí. Bude ještě někdy zapsán jejich věk čísly se stejnou vlastností? Zapiš, za kolik roků by to bylo. Najdeš více možností?

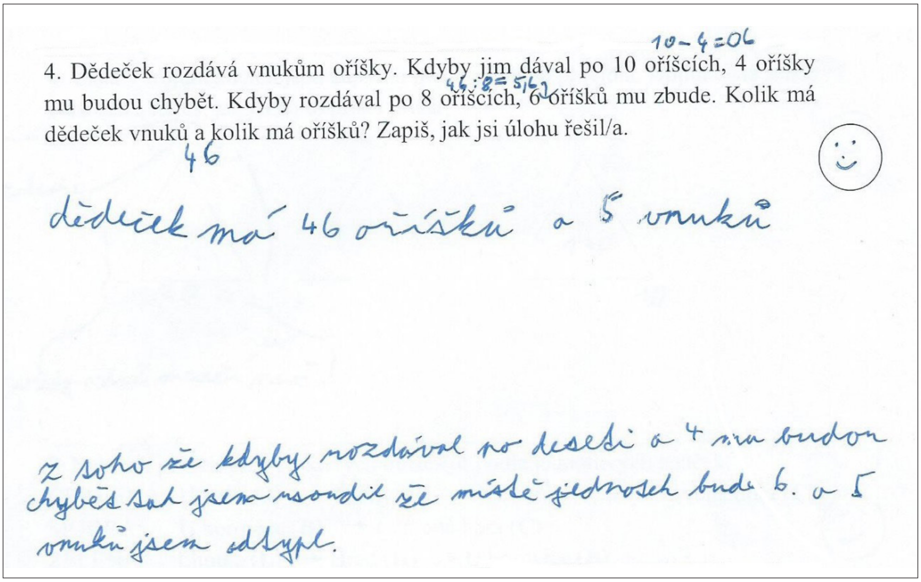
14 + 27 = 41
23 + 27 = 50
33 + 27 = 60
43 + 27 = 70
53 + 27 = 80

41
-14
27

36 a 63
47 a 74
58 a 85
69 a 96

Obr. 47 Experimentálně řešená úloha

V mnoha úlohách však Patrik prokázal své vysoce rozvinuté logické myšlení. V úloze na Obr. 48 začal úvahou, která mu pomohla v následném řešení pomocí pokusu a omylu.



10 – 4 = 06

4. Dědeček rozdává vnukům oříšky. Kdyby jim dával po 10 oříšcích, 4 oříšky mu budou chybět. Kdyby rozdával po 8 oříšcích, 6 oříšků mu zbude. Kolik má dědeček vnuků a kolik má oříšků? Zapiš, jak jsi úlohu řešil/a.

46 : 8 = 5,6 2

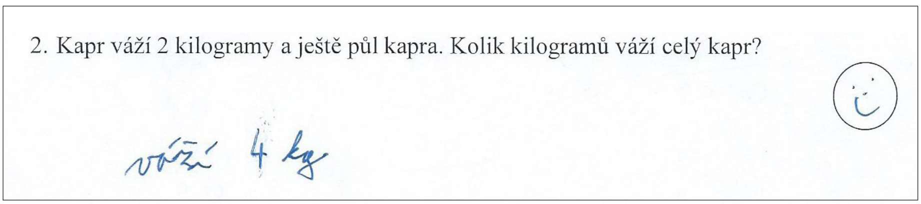
46

dědeček má 46 oříšků a 5 vnuků

z toho že kdyby rozdával po deseti a 4 mu budou chybět tak jsem usoudil že místě jednotek bude 6. a 5 vnuků jsem odtypl.

*Obr. 48 Úloha řešená částečně úvahou a částečně experimentálně*

Velmi úspěšný byl Patrik při řešení problémových úloh. Na Obr. 49 nepotřeboval ani podporu v podobě grafického znázornění, úlohu vyřešil pamětně.



2. Kapr váží 2 kilogramy a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?

váží 4 kg

*Obr. 49 Správně řešená problémová úloha*

Pokud se podíváme na Patrikovy přístupy k řešení, můžeme sledovat následující jevy:

- Většinu úloh řešil metodou pokusu a omylu, často podpořenou dobrými aritmetickými představami, někdy úvahou.
- Velmi rychle se zlepšoval v řešení úloh.
- Problémové úlohy obvykle vyřešil správně.
- Geometrické úlohy rovněž obvykle vyřešil správně.

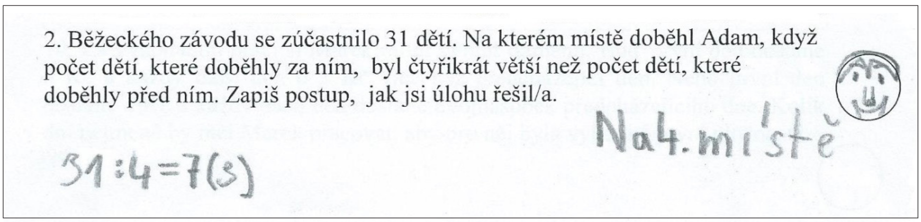
Vzhledem k diagnostikovanému matematickému nadání a také k tomu, jak se projevoval v našem kroužku, se domnívám, že také Patrik se pohyboval pod hranicí svého potenciálu. V Patrikových pracích se opakovaně objevovaly pravopisné chyby (např. „viděli“ místo „vydělil“ a mnoho dalších). Je tedy možné, že Patrik patřil k žákům s dvojí výjimečností a mohl mít poruchu učení. Pokud ji měl, dostatečně ji kompenzoval vysokým intelektem.

Patrika bych zařadila do profilu „autonomní děti“ (jsou obdivované pro své schopnosti, jsou vnímány jako ti, kteří uspějí; mají dobré sebevědomí, vysokou vnitřní motivaci; mívají dobré známky), případně „děti s dvojí výjimečností“.

## VANDA, 5. ročník, jazykové nadání

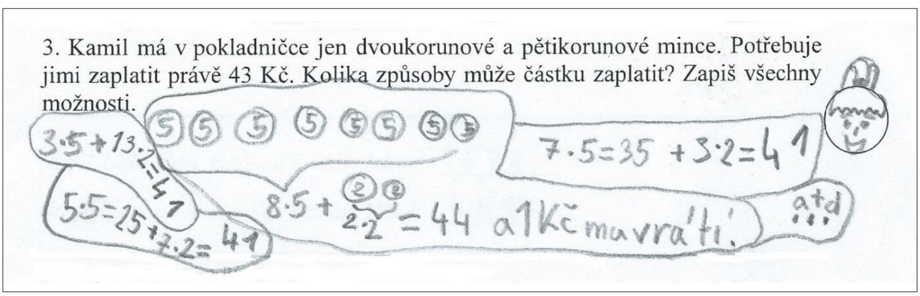
Vanda byla žákyní 5. ročníku s diagnostikovaným jazykovým nadáním. V kurzu získala 18 bodů z 48 (dvakrát chyběla), tj. 38 %. Jednalo se o jeden z nejslabších výsledků, a to u nadaných i nediagnostikovaných dětí. Zařazuji ji sem z toho důvodu, že někdy nálepka „nadání“ na učitele působí tak, že žákovi musí jít ve škole vše.

Při řešení se Vanda snažila uplatnit operace známé ze školy, úlohy se příliš nesnažila analyzovat. V úloze zobrazené na Obr. 50 využila čísla ze zadání a vydělila 31 : 4. Možná se nechala ovlivnit antisignálem ze zadání „čtyřikrát větší než“, ale tím si nemohu být jista. Dále je zvláštní, že výsledek „na 4. místě“ neodpovídá výsledku dělení „7 (zbytek 3)“.



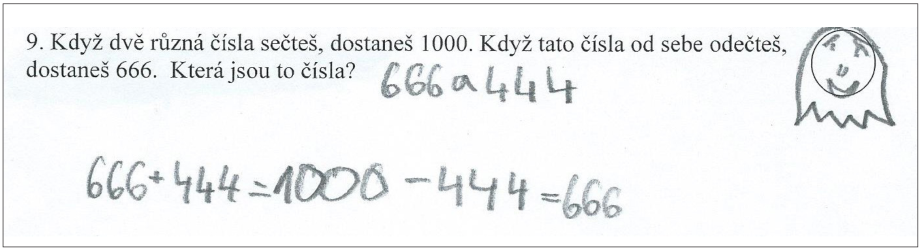

*Obr. 50 Nesprávně řešená úloha.*

Další úloha je řešena částečně správně, přestože zápis není matematicky správný (např. 5 · 5 není rovno 41). Vanda ale nenašla všechna řešení a uvedla jedno, ve kterém se vrací peníze, což zadání neumožňuje.




*Obr. 51 Řešení kombinatorické úlohy*

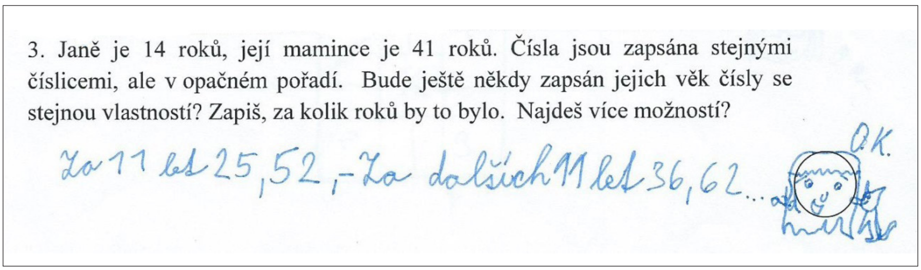
Logické myšlení i aritmetické představy Vandy byly zřejmě na nízké úrovni, což se projevilo v řešení úlohy na Obr. 52. Zadání nebylo pochopeno, nalezená čísla nesplňují ani jednu z podmínek.


9. Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 1000. Když tato čísla od sebe odečteš, dostaneš 666. Která jsou to čísla? 666 a 444

666+444=1000 −444=666

*Obr. 52 Nesprávně řešená úloha*

Ve výjimečných případech se Vandě podařilo najít obecnou zákonitost v řešení úlohy, jako např. na Obr. 53. Vanda se jen dopustila malého přepisu, místo 63 napsala 62.

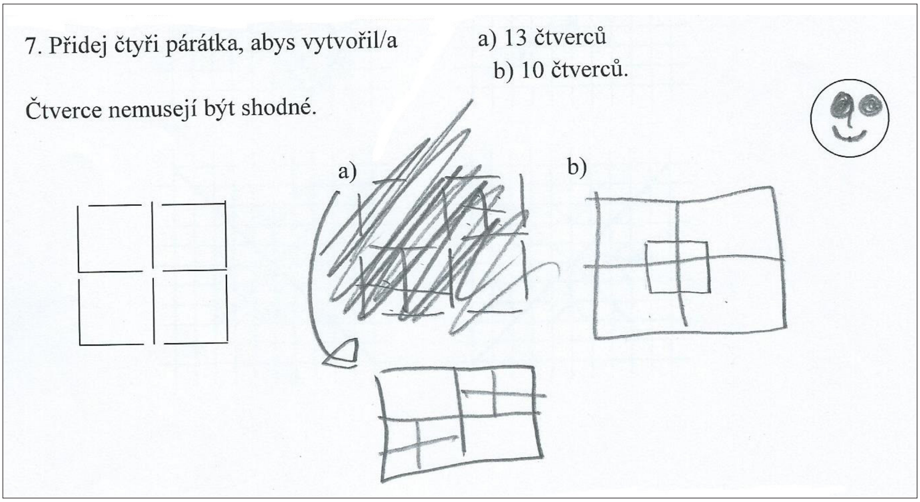

3. Janě je 14 roků, její mamince je 41 roků. Čísla jsou zapsána stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí. Bude ještě někdy zapsán jejich věk čísly se stejnou vlastností? Zapiš, za kolik roků by to bylo. Najdeš více možností?

O.K.

Za 11 let 25,52, - Za dalších 11 let 36,62...

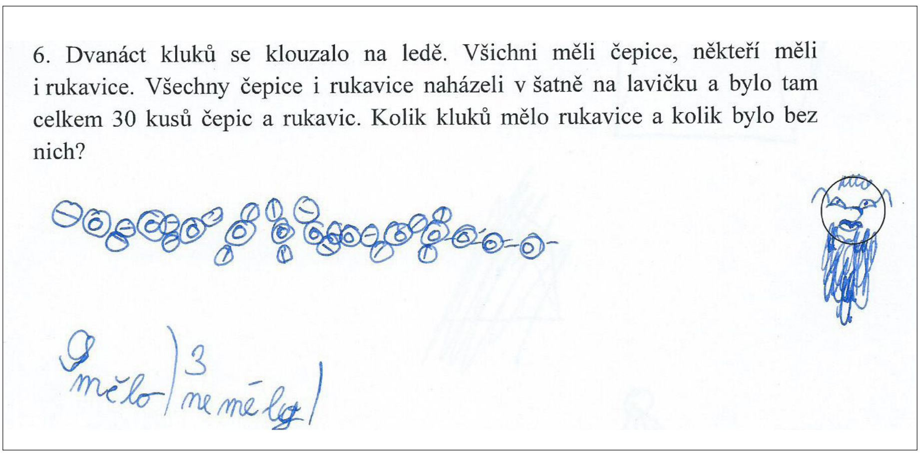
*Obr. 53 Úloha vyřešená správnou úvahou*

Nejúspěšnější byla Vanda v řešení geometrických úloh, jak demonstruje Obr. 54. Úlohy na geometrickou představivost měla prakticky vždy správně. Dle Gardnerovy teorie multiplikativní inteligence jsou logicko-matematická inteligence a prostorová inteligence nezávislé složky celkové inteligence a, jak je vidět, pro některé žáky slabé v aritmetice může být geometrie příležitostí jak v matematice dosahovat dobrých či výborných výsledků.



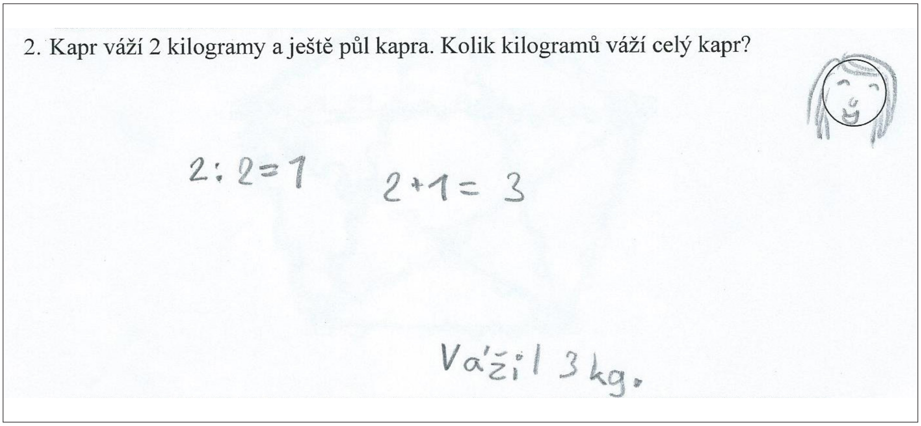

*Obr. 54 Správně vyřešená problémová geometrická úloha*

Při řešení některých aritmetických úloh využila Vanda grafické znázornění, které jí pomohlo v hledání správného výsledku. Na Obr. 55 postupovala tak, že nejdříve nakreslila 12 čepic a pak jim postupně přikreslovala rukavice, dokud nebyl celkový počet kusů 30.




*Obr. 55 Graficky řešená úloha*

Problémové úlohy[16] byly pro Vandu neřešitelné (Obr. 56).




*Obr. 56 Nesprávně vyřešená problémová úloha*

Pokud se podíváme na Vandina řešení celkově, můžeme si všimnout následujících jevů:

- Co se aritmetických úloh týče, správně dokázala řešit ty, které vycházely z běžného školního učiva a u nichž mohla bez problému aplikovat aritmetickou operaci. Ty tvořily menšinu, proto většinu aritmetických úloh neuměla správně řešit.
- Některé aritmetické úlohy vyřešila správně pomocí grafického znázornění.
- U většiny úloh našla „nějaké“ řešení, nekontrolovala jeho správnost.
- Úspěšná byla v případě geometrických úloh.
- Problémové úlohy neuměla řešit.
- Vzhledem ke smajlíkům, které kreslila, se nejspíše jednalo o velmi kreativní dívku.

Na případu Vandy lze sledovat, že je-li dítě nadané, nemusí to znamenat, že mu půjde ve škole vše. Z výsledků lze usuzovat, že Vanda neměla rozvinuté matematické ani logické myšlení. Byla sice nadaná, ale v rámci zcela jiné složky inteligence. Aritmetické schopnosti měla podprůměrné, dobré výsledky měla v oblasti geometrické představivosti.

Velice sympatické bylo, že ráda navštěvovala kurz. Domnívám se, že pokud by s ní úlohy byly rozebírány, mohla by se zlepšovat v oblasti matematického myšlení, i když pomalejším tempem.

[16] Za problémové jsem považovala úlohy, které žák musel řešit vhledem a pro něž neměl ze školy osvojen matematický aparát.

## – 3 – 8 ZÁVĚR A OMEZENÍ VÝZKUMU

Z výsledků žáků vyplynulo, že diagnostikované nadání není jediným předpokladem k úspěšnému řešení matematických úloh. Jak je v literatuře popsáno, nadání má různé podoby a žák může vynikat jen v některých oblastech. To platí dokonce i pro matematiku, kdy mají žáci zvýšené schopnosti obvykle jen pro některé části matematiky. Bylo patrné, že nadaní žáci podávali v úlohách rozličné výkony a nebylo je mnohdy ani jednoduché odlišit od žáků bystrých. Nejlepší předpoklady pro řešení matematických úloh mají žáci s matematickým nadáním. Ve vybraných úlohách rovnicového charakteru byli matematicky nadaní žáci vždy procentuálně nejúspěšnější, ale vzhledem k jejich malému počtu a charakteru výzkumu nemohu tento závěr zobecnit. Pro některé nadané žáky bylo charakteristické, že byli schopni využívat algebraické postupy již na 1. stupni základní školy, ve 4. nebo 5. ročníku. Problémy přitom měli s gramatikou matematického zápisu, nezvažovali přednost operací, nepoužívali závorky a operace prováděli v pořadí, v jakém byly zapsány.

Významným omezením výzkumu bylo rozdělení žáků do skupin nadaných (diagnostikovaných) a ostatních (nediagnostikovaných). Ve skupině nediagnostikovaných žáků se totiž objevovali žáci, kteří sice pedagogicko-psychologickou poradnou nebyli diagnostikováni, avšak jejich výsledky během celého kurzu odpovídaly tomu, že nadaní byli. Tím mohlo dojít ke zkreslení mezi sledovanými výsledky diagnostikovaných a ostatních žáků. Problém je v tom, že někteří žáci a jejich rodiče nemají o testování v poradně zájem.

Druhým podstatným omezením byla v případě mnoha žáků absence rozhovoru po odevzdání pracovního listu. Přestože někteří učitelé byli velmi svědomití, zapisovali průběh celého testování i následný rozhovor, jiní učitelé toto nepovažovali za důležité, a na analýzu jsem tak dostala pouze vyplněné testy. Bez rozhovoru je však mnohdy prakticky nemožné analyzovat některá řešení. Bohužel, dodatečné rozhovory už nebylo možné realizovat a je také málo pravděpodobné, že takto malé děti by s časovým odstupem byly schopny své řešení zpětně vysvětlit.

# – 4 – VÝZKUM NA 2. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

V roce 2017 proběhlo testování žáků na 2. stupni základní školy s cílem zjistit, jak jsou bystří a nadaní žáci schopni řešit aplikační úlohy rovnicového charakteru různé náročnosti a jaké řešitelské strategie preferují. Výzkum byl uskutečněn ve druhém pololetí školního roku. Výzkumným nástrojem byl didaktický test. Test byl zadán žákům 6.–9. ročníku základní školy. Testování se účastnily základní školy, víceletá gymnázia a matematická gymnázia (tj. víceletá gymnázia s třídami s rozšířenou výukou matematiky) v Jihomoravském kraji, kraji Vysočina a Moravskoslezském kraji.

Původním záměrem bylo vyhledávat pro testování žáky nadané, pokud možno odborně identifikované v pedagogicko-psychologické poradně. Odborná identifikace měla sjednotit úroveň „nadprůměrnosti" žáků, která se mohla mezi školami zásadně lišit. Brzy se ale ukázalo, že odborně identifikovaných žáků je na 2. stupni základní školy malý počet. V České republice bylo například ve školním roce 2015/2016 pedagogicko-psychologickými poradnami diagnostikováno 1 503 intelektově nadaných žáků, z toho 884 žáků bylo z 1. stupně a 255 žáků bylo z 2. stupně[17]. Na většině škol jsme se proto s odborně identifikovaným žákem nesetkali, podařilo se nám najít jen 13 žáků s odbornou identifikací. V této situaci jsem se rozhodla vybírat žáky do výzkumného vzorku v rámci daných tříd v následujících krocích:

1) Jestliže byli ve třídě, kde nám bylo umožněno testování, odborně diagnostikovaní nadaní žáci, byli do výzkumu zahrnuti všichni identifikovaní žáci.
2) Jestliže ve třídě nebyl žádný odborně diagnostikovaný žák, učitel vybral všechny žáky, kteří dle jeho úsudku byli nadaní způsobem, který se projevoval výbornými výkony v matematice.

[17] Neuvádím počty nadaných středoškoláků a vysokoškoláků.

3) Jestliže ve třídě nebyl žádný žák, kterého by učitel označil jako nadaného, byli učitelem vybráni tři žáci nejlepší v matematice. Učitel musel také uvést, z jakého důvodu žáka vybírá, a dále byl výzkumníkem požádán, aby u každého vybraného žáka podal co nejširší charakteristiku jeho projevů v matematice. Snahou bylo, aby se do výzkumného vzorku nedostali žáci v matematice průměrní nebo dokonce podprůměrní.

## – 4 – 1 VÝZKUMNÉ OTÁZKY A HYPOTÉZY

Zajímalo mě, jaké budou řešitelské strategie žáků při řešení úloh rovnicového charakteru. Zejména jsem se chtěla soustředit na to, zda bude možné vysledovat nějaký vývoj v používání experimentální, aritmetické a algebraické strategie v jednotlivých ročnících 2. stupně základní školy. Vyslovila jsem následující očekávání: Matematicky nadaní žáci budou více inklinovat k algebraickým strategiím, a to od 6. ročníku. Nadaní žáci budou v řešení úspěšnější než ostatní žáci, budou u nich převažovat experimentální a aritmetické strategie. Ostatní žáci budou ve většině případů využívat experimentální strategie.

Dále byly stanoveny výzkumné otázky:

O1. *Jakého průměrného výsledku dosáhli žáci v jednotlivých úlohách testu?*

O2. *Jakého průměrného výsledku dosáhli žáci v jednotlivých úlohách testu vzhledem k ročníku?*

O3. *Jakého průměrného výsledku dosáhli žáci v jednotlivých úlohách testu vzhledem k nadání?*

O4. *Jaké strategie řešení volili žáci vzhledem k nadání?*

Předpokládala jsem, že úspěšnost v testu se bude zvyšovat od 6. do 9. ročníku. V 6. ročníku se ještě neprobírá žádná část algebry. Žáci zpravidla nejsou vedeni k tomu, aby algebraické úlohy (např. úlohy rovnicového charakteru) řešili aritmetickými metodami. Z toho důvodu jim u některých typů úloh zbývá jen experimentální strategie. V 7. ročníku se na některých školách začíná probírat učivo lineárních rovnic. Žáci se postupně seznamují s ekvivalentními úpravami, ale učivo zatím není využíváno v aplikačních úlohách. V 8. ročníku se pokračuje v probírání lineárních rovnic, výuka se rozšiřuje také na slovní úlohy vedoucí k rovnicím, poznatky o lineárních rovnicích krystalizují (Hejný, 2014). V 9. ročníku se potom žáci seznamují s řešením soustav rovnic o více neznámých. Žáci 9. ročníku tedy mají k dispozici nejširší spektrum matematického aparátu, navíc mají největší matematickou zkušenost.

Dále jsem předpokládala, že v řešení úloh budou úspěšnější matematicky nadaní žáci. Jedná se totiž o úlohy, které nejsou typické na běžných základních školách (úlohy viz oddíl 4.4). Také jsem předpokládala, že některé z úloh budou pravděpodobně neznámé i pro žáky matematického gymnázia. V tom případě rozhodne o správnosti řešení žákova tvořivost a zkušenost s postupy. Obojí by měli mít nejrozvinutější právě matematicky nadaní žáci.

Bylo také možno předpokládat, že mezi čtyřmi typy škol budou nejúspěšnější žáci matematického gymnázia (tj. víceletého gymnázia s posílenou výukou matematiky). Jedná se o výběrovou školu a žáci se mohou lišit od žáků jiných škol svojí motivací pro studium, znalostmi aj. Hodinová dotace matematiky je na tomto typu školy nejvyšší, výuce matematiky je věnována největší pozornost a žáci se setkávají se širší nabídkou úloh.

Pro zodpovězení výzkumných otázek byla využita smíšená metodologie.

## – 4 – 2 VÝZKUMNÝ VZOREK

Základní soubor tvořili žáci 2. stupně základní školy a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Výběrový soubor byl sestaven dostupným výběrem z 34 škol, celkem se 165 žáky. Výzkumu se zúčastnilo 28 základních škol, 1 základní škola s rozšířenou výukou matematiky, 3 víceletá gymnázia, 2 víceletá gymnázia s rozšířenou výukou matematiky.

Ve vzorku se vyskytovalo 109 chlapců a 56 děvčat. Mezi žáky bylo 50 žáků 6. ročníku, 31 žáků 7. ročníku, 19 žáků 8. ročníku a 65 žáků 9. ročníku. Vidíme rozdílné zastoupení žáků podle pohlaví i podle ročníku. Nerovnoměrnost v případě pohlaví byla pravděpodobně zapříčiněna vžitou představou, že v matematice jsou chlapci nadanější než dívky. Nerovnoměrné zastoupení ročníků bylo způsobeno dostupností vzorku, neboť testování mi bylo umožněno jen ve třídách, kde vyučující nebyl v časovém tlaku. Vzhledem k charakteru úloh navíc učitelé volili raději nejzkušenější žáky 9. ročníku.

Výzkumu se účastnilo 28 žáků s matematickým nadáním, 55 žáků se všeobecným nadáním a 82 „ostatních“ nadprůměrných žáků. Žáků, kteří měli nadání identifikováno v pedagogicko-psychologické poradně, bylo pouze 13. Devět z těchto žáků mělo všeobecné nadání a čtyři byli matematicky nadaní. Zastoupení žáků podle nadání je uvedeno v Tab. 17.

*Tab. 17 Žáci rozdělení podle nadání a podle školy*

| | **ZŠ** | **MZŠ** | **G** | **MG** | **Celkem** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Mat. nadaní identifikovaní** | 2 | 1 | – | 1 | 28 |
| **Mat. nadaní neidentifikovaní** | 3 | – | 1 | 20 | |
| **Všeob. nadaní identifikovaní** | 8 | – | 1 | – | 55 |
| **Všeob. nadaní neidentifikovaní** | 9 | 3 | 2 | 31 | |
| **Ostatní** | 72 | 4 | 4 | 3 | 82 |
| **Celkem** | 94 | 8 | 8 | 55 | **165** |

Jak jsem již uvedla, nebylo možné vybírat jen žáky identifikované PPP. Proto byli žáci zařazeni do příslušné kategorie na základě doporučení učitele, který tak učinil na základě projevů žáka v matematice a jiných předmětech. Učitelé byli požádáni, aby identifikovali žáky všeobecně nadané, matematicky nadané. Pokud žádné takové žáky ve třídě neměli, tak vybírali tři nejlepší žáky, které jsem zařadila do kategorie „ostatní". V posledním případě měli učitelé své rozhodnutí zdůvodnit, což mi umožnilo jejich návrh posoudit a kategorii ostatních ještě rozdělit na tři typy: bystrý (myslí mu to rychleji než ostatním, matematika mu jde, v matematice je šikovný), logický (má dobré logické myšlení, ale v počtech moc dobrý není), jedničkář[18]. Žáci, kteří učiteli nebyli nominováni jako nadaní, měli toto zastoupení (Tab. 18).

*Tab. 18 Podkategorie kategorie „ostatní žáci" a jejich zastoupení*

| | | |
|---|---|---|
| **Ostatní** | Bystrý | 50 |
| | Jedničkář | 29 |
| | Logický typ | 3 |

Dále jsem se u všech předchozích skupin soustředila také na vedlejší specifikace, jako jsou poruchy učení, ADHD, autismus a charakterové či jiné specifikace, jako nezájem o školu, lenost, účast na matematických soutěžích apod. (toto rozlišování pro mě bylo důležité zejména v kvalitativní analýze řešení). Každý žák byl zařazen do právě jedné kategorie. Jednotlivé podkategorie jsou uvedeny v Tab. 19.

*Tab. 19 Počet žáků v jednotlivých podkategoriích*

| **Skupina podkategorií** | **Podkategorie** | **Mat. nadání ident.** | **Mat. nadání neident.** | **Všeob. nadání ident.** | **Všeob. nadání neid.** | **Ostatní** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Specifické poruchy učení** | **Dysgrafie** | | | 1 | | 1 |
| | **Dyslexie** | | 1 | 1 | | 2 |
| | **Dysortografie** | | | 1 | | |
| **Poruchy autistického spektra** | **Aspergerův syndrom** | | 1 | | | 1 |
| | **Autismus** | | | | | 1 |
| **Poruchy pozornosti** | **Porucha pozornosti s hyperaktivitou** | | | | 1 | 2 |
| **Charakter** | **Lenivý** | | | 2 | | |
| | **Bez zájmu** | 1 | 1 | 2 | | |
| **Stupeň nadání** | **Extrémně nadaný** | | 4 | | | |

[18] Kategorie „jedničkář" byla volena v případě, kdy žák nebyl nadaný, neměl ani obzvlášť rozvinuté matematické myšlení, ale v matematice měl jedničku. To znamená, že i žáci z jiných kategorií mohli mít jedničku z matematiky, ale nebyl to jediný parametr, díky němuž se do vzorku dostali.

V některých případech jsem váhala, do které skupiny žáka zařadit. Například u specifikace „je jedničkář, matematika ho baví, ale má celkově ke všemu dost laxní přístup“ jsem se rozhodovala mezi kategoriemi jedničkář a bystrý. Kategorie „jedničkář“ totiž u většiny učitelů evokovala snaživého žáka, který usiluje o dobrý prospěch. Uvedený žák zřejmě příliš snaživý nebyl, přesto měl v matematice výborné výsledky, což může souviset s bystrostí, mohlo by se však také jednat o skryté nadání. Žák byl posouzen jako „bystrý, lenivý“. Je zřejmé, že rozřazování žáků bylo v mnoha případech náročné a nejednoznačné.

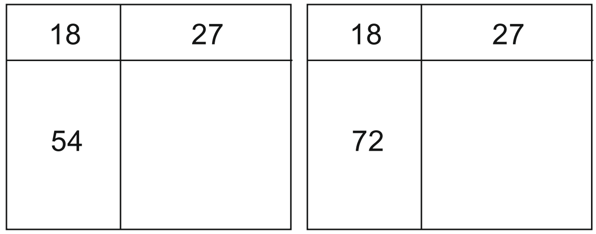
Rodiče všech žáků, kteří byli zapojeni do výzkumu, podepsali informovaný souhlas s testováním dítěte a použitím jeho výsledků pro výzkumné záměry.

## – 4 – 3 PŘEDVÝZKUM

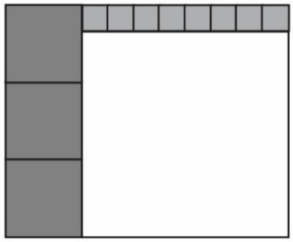
Didaktický test byl sestavován tak, aby obsahoval úlohy rovnicového charakteru – slovní či geometrické úlohy, které je možné řešit sestavením rovnice či soustavy rovnic, ale zároveň je možné je řešit aritmetickými metodami, které jsou přístupné i žákům nižších ročníků. Mým záměrem bylo vybrat většinu úloh školsky netypických, neboť jsem chtěla sledovat žákovskou strategii řešení v neznámé situaci.

Úlohy byly seřazeny tak, aby gradovaly co do náročnosti. Vybrala jsem dvě aritmetické úlohy, jednu slovní úlohu, jednu dynamickou úlohu a dvě geometrické početní úlohy. Test pro předvýzkum obsahoval následujících šest úloh:

1. Když dvě čísla sečteš, dostaneš 15. Když od většího odečteš menší, dostaneš 3. Jaká to jsou čísla?
2. Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?
3. Jolanka je šestkrát mladší než maminka, babička je dvanáctkrát starší než Jolanka. Všem třem dohromady je 95 let. Kolik roků je každé z nich?
4. Otec je o 9 let starší, než je trojnásobek synova věku. Za 17 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?
5. Obdélník na obrázku je rozdělen na tři obdélníky a čtverec. Urči obsah čtverce, jsou-li známy obsahy tří obdélníků (v centimetrech čtverečních). Zapiš výpočet. (Vlevo je varianta pro nižší ročníky a vpravo je varianta pro 9. ročník.)



6. Obdélník na obrázku je rozdělen na 12 čtverců. Délka strany tmavě šedých čtverců je 5 cm. Urči obsah bílého čtverce. Zapiš výpočet.



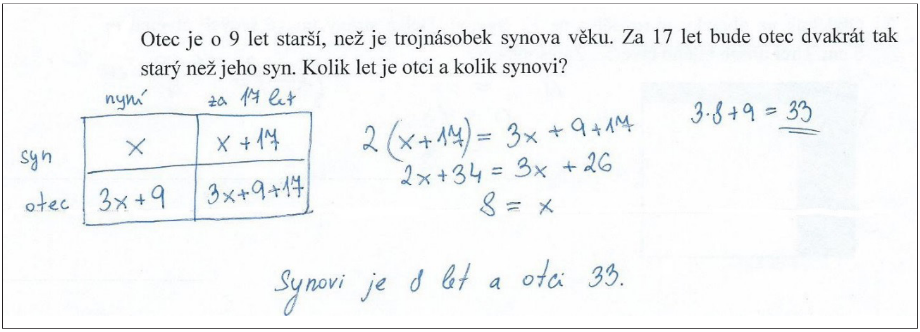
Předvýzkumu se účastnilo 77 žáků získaných na základě dostupnosti z jiných škol, než byly školy v hlavním výzkumu. Z tohoto počtu bylo 20 žáků ze základní školy, 6 žáků ze základní školy s třídami s rozšířenou výukou matematiky, 10 žáků z osmiletého gymnázia a 41 žáků osmiletého gymnázia s třídami s rozšířenou výukou matematiky. 31 žáků bylo ze 6. ročníku, 5 žáků bylo ze 7. ročníku, 6 žáků bylo z 8. ročníku a 35 žáků bylo z 9. ročníku. Struktura žáků byla tedy podobná jako ta, kterou jsem plánovala pro vlastní výzkum. Při vyhodnocování mě zajímala pouze celková úspěšnost žáků v jednotlivých úlohách a případné neočekávané jevy.

*Tab. 20 Procentuální úspěšnost pro jednotlivé úlohy předvýzkumu*

| Úloha | Úspešnost v % |
|---|---|
| 1 | 91 |
| 2 | 77 |
| 3 | 82 |
| 4 | 30 |
| 5 | 13 |
| 6 | 14 |

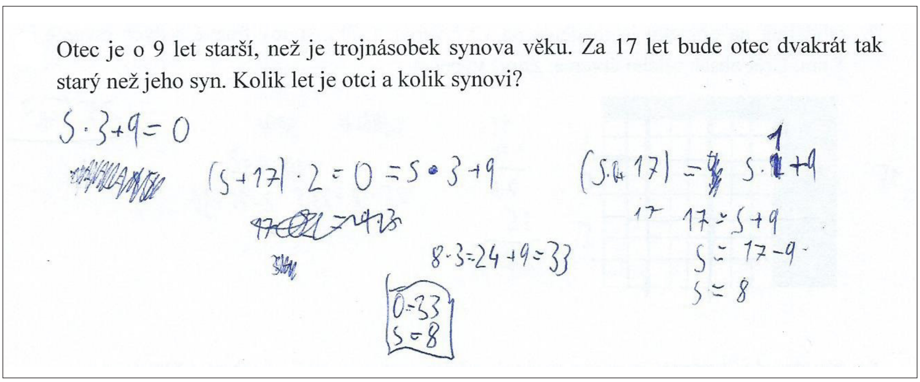
Po provedení předvýzkumu byl ověřen výzkumný nástroj. V didaktickém testu by měly být obsaženy pouze úlohy, jejichž index obtížnosti leží v intervalu $P \in (20,80)$ (Chráska, 1999). Index obtížnosti přitom určuje, jaké procento žáků bylo schopno úlohu úspěšně řešit. Úlohy, pro něž je $P < 20$, jsou považovány za velmi obtížné a úlohy, pro něž je $P > 80$, jsou považovány za velmi jednoduché. Doporučuje se, aby didaktický test začínal jednoduchou úlohou, jejíž účel je motivační.

Z testu jsem se rozhodla vyřadit úlohu 1, neboť byla pro mnoho žáků triviální a řešili ji pamětně. Proto nebylo z písemného řešení zjevné, jakou metodu řešení preferují, a výsledky byly nevypovídající. Druhá úloha v testu zůstala, protože již nebyla pro žáky triviální, nemohli ji řešit pamětně a museli volit jednu z metod – experimentální, aritmetickou či algebraickou. Úloha 3 měla sice také poměrně vysokou úspěšnost, avšak v testu jsem se ji rozhodla nechat, a to z důvodu motivace slabších žáků. Čtvrtá úloha byla pro žáky výrazně náročnější. V testu zůstala, neboť ve způsobech řešení bylo patrné, že žáci volili buď experimentální, nebo algebraickou strategii, a pak bylo vidět, že žáci buď postup znali (např. z Matematické olympiády) a řešili zcela mechanicky, nebo řešení neznali a pak pro ně byl mnohdy problém vyznat se ve vztazích a správně sestavit rovnice. Na Obr. 57 vidíme řešení úlohy matematicky nadanou žákyní[19] 9. ročníku, která si údaje zapsala přehledně do tabulky a poté z nich sestavila rovnici.




*Obr. 57 Algebraicky řešená úloha (pomocí jedné rovnice s jednou neznámou) matematicky nadanou žákyní 9. ročníku*

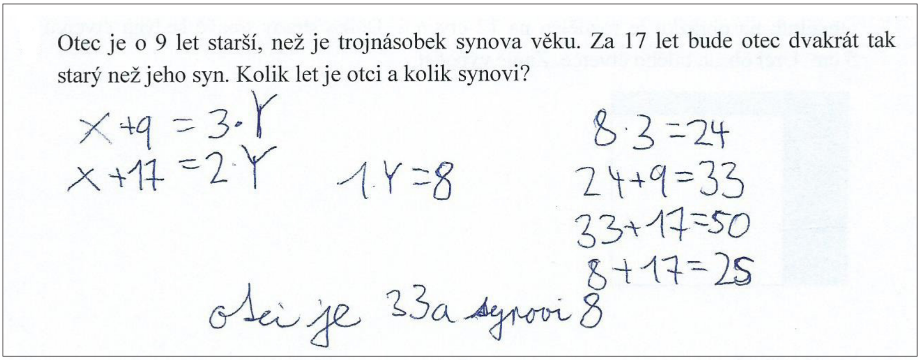
Algebraickou strategii řešení pomocí rovnice nebo soustavy dvou rovnic o dvou neznámých volili i nadaní žáci 6. ročníku. Protože ale učivo neměli systematicky probráno, jejich zápis byl často nekorektní, jak vidíme na Obr. 58. Rovnice (s + 17) · 2 = s · 3 + 9 je nesprávně sestavena, v dalším kroku je s ní provedena chybná úprava. Souhrou těchto dvou pochybení žák dospěl ke správnému výsledku.




*Obr. 58 Úloha s nekorektním postupem řešená soustavou dvou rovnic o dvou neznámých matematicky nadaným žákem 6. ročníku*

19 V rámci předvýzkumu jsem neprováděla rozřazování žáků do skupin podle nadání, pouze v některých případech jsem znala specifikaci žáků.

U této úlohy se vyskytly i další případy špatné úvahy se správným výsledkem. Nejčastěji se vyskytující chyba v úvaze je ukázána na Obr. 59. Ve druhé rovnici nebylo přičteno 17 let k věku syna ($y$). Špatnou úpravou rovnic však žák opět dospěl ke správnému výsledku.


Otec je o 9 let starší, než je trojnásobek synova věku. Za 17 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

$x+9 = 3\cdot Y$
$x+17 = 2\cdot Y$

$1\cdot Y = 8$

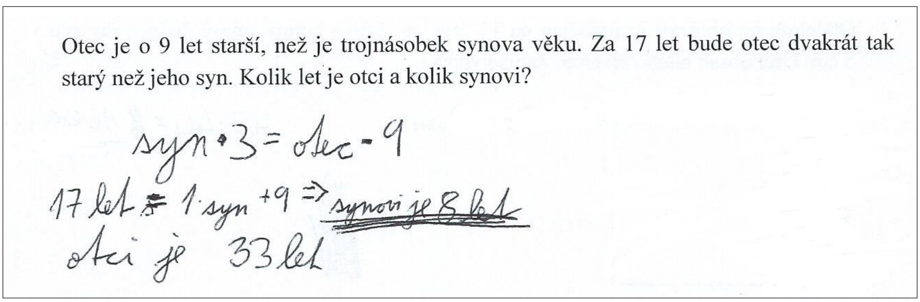
$8\cdot 3 = 24$
$24+9=33$
$33+17=50$
$8+17=25$

otci je 33a synovi 8

*Obr. 59 Pokus o algebraické řešení s nesprávně sestavenou rovnicí a správným výsledkem všeobecně nadaným žákem 6. ročníku*

Z uvedených příkladů se potvrzuje, že při vyhodnocování testů se není možné zaměřovat pouze na výsledek.

Na Obr. 60 matematicky nadaný žák 6. ročníku používá úvahu, že 17 let je součtem věku syna a 9 let ze zadání. Tento vztah opravdu platí, ale není triviální k němu dospět. Vztahy mezi veličinami můžeme ukázat například takto: Za 17 let bude synovi $s + 17$ let a otci $s + 17 + s + 17$ (otec je dvojnásobně stár). Zároveň je otci $3s + 9 + 17$. Když porovnáme obě vyjádření věku otce za 17 let, je zřejmé, že $s + 9 = 17$.


Otec je o 9 let starší, než je trojnásobek synova věku. Za 17 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

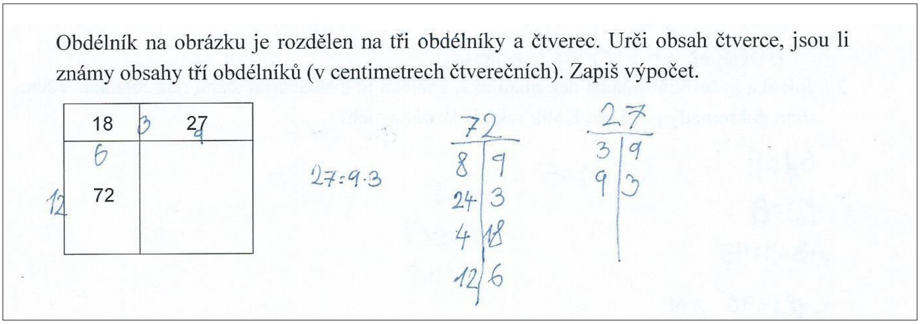
syn · 3 = otec - 9
17 let = 1 · syn + 9 => synovi je 8 let
otci je 33 let

*Obr. 60 Matematicky nadaný žák 6. ročníku využívá k řešení zajímavou úvahu*

Pokud se stalo, že žák napsal přímo vztah $s + 9 = 17$, jako je tomu na Obr. 60, nebylo zřejmé, zda se jedná o zjednodušenou či nespravnou úvahu, nebo zda žák dokázal předchozí vztahy zachytit pouze mentálně, bez zápisu. V takovém případě je nutné v rámci výzkumného řešení zjistit tuto informaci v následném rozhovoru.

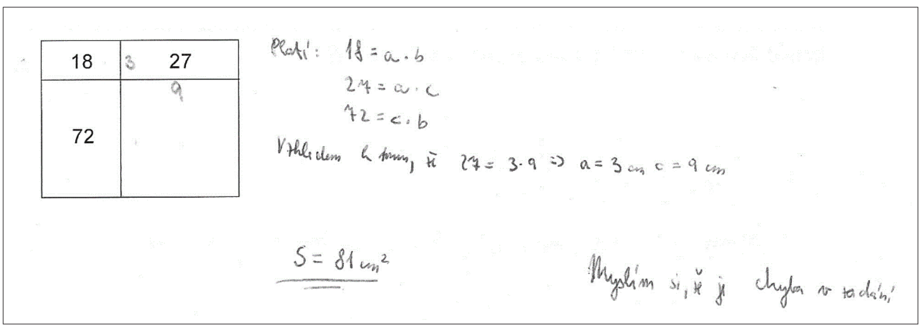
V několika případech se objevilo pamětní experimentální řešení – žáci obvykle začali na věku syna 5 let (jinak by byl otec nesmyslně mlád), zkoušeli vztahy a rychle dospěli ke správnému výsledku. Z tohoto důvodu jsem se rozhodla ve výzkumu zvýšit věk syna tak, aby šlo o dvojciferné číslo a pamětní experimentování nebylo tak jednoduché.

Nejslabších výsledků dosáhli žáci v páté úloze. Výsledky však byly velmi silně ovlivněny tím, že žáci 9. ročníku dostali druhou variantu, která umožňovala pouze algebraické řešení. Někteří z nich se snažili úlohu řešit aritmeticky a když zjistili, že to není možné, úlohu opustili (např. řešení na Obr. 61). Správně sestavit soustavu rovnic a správně ji vyřešit dokázali pouze tři matematicky nadaní žáci 9. ročníku.



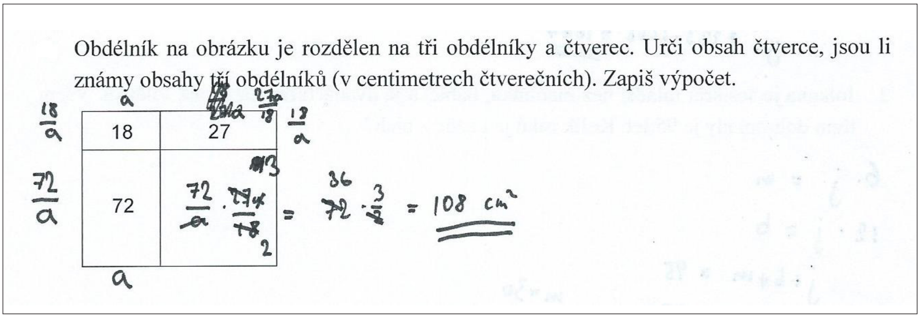

*Obr. 61 Žák 9. ročníku se pokusil řešení najít aritmeticky*

Obdobně postupovala žákyně na Obr. 62. Nejdříve začala algebraickým zápisem, poté postupovala aritmeticky. Když nedokázala úlohu vyřešit, usoudila, že je úloha špatně zadaná. Ani ji nenapadlo, že by strany obdélníků mohly mít iracionální délky.




*Obr. 62 Žákyně 9. ročníku nenalezla správné řešení*

Někteří žáci sestavili soustavu tří rovnic o třech neznámých, ale neuměli ji vyřešit. Vzniklá soustava je totiž v rámci učiva základní školy netypická. Několik matematicky nadaných žáků si nicméně se soustavou poradilo. Na Obr. 63 můžeme sledovat algebraické řešení s velmi ekonomickým zápisem, použité matematicky nadaným žákem 9. ročníku.




*Obr. 63 Ekonomické algebraické řešení matematicky nadaného žáka 9. ročníku*

Do výzkumu jsem z důvodu obtížnosti algebraického výpočtu zařadila pouze první, jednodušší verzi úlohy, která umožňovala aritmetické řešení.

Také šestá úloha byla pro žáky velmi náročná. Přesto jsem se ji rozhodla v testu ponechat, protože někteří matematicky nadaní žáci snadno našli vztahy mezi veličinami a úlohu řešili algebraicky. Úlohu bylo dále možné řešit odhadem nebo aritmeticky. Výsledky úlohy byly zajímavé z toho důvodu, že někteří žáci byli schopni úspěšně řešit úlohu aritmetickou strategií, zatímco jiní volili algebraickou strategii.

## – 4 – 4 TEST A ANALÝZA ÚLOH A PRIORI

Ve vlastním výzkumu bylo použito pět úloh. V tomto oddíle provedu jejich analýzu a priori.

### Úloha 1 (dále U1)

*Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?*

**Možnosti řešení U1**

Jednou z možných **experimentálních strategií** je **strategie pokusu a omylu**, kdy žák vybere dvě čísla, provede s nimi naznačené úkony, a pokud čísla neodpovídají, vybírá další dvě čísla. **Řízené experimentální řešení** mohlo spočívat v tom, že žák našel čísla, která jsou blízká hledaným číslům, a dle výsledku vybraná čísla upravil; např. 8 000 a 2 000, 8 000 + 2 000 = 10 000, 8 000 – 2 000 = 6 000, což je o 666 méně, než je uvedeno v zadání. Nyní tedy stačí většímu číslu přidat 333 a menšímu číslu ubrat 333. Hledaná čísla jsou tedy 8 333 a 1 667.

Další experimentální metoda spočívá ve sledování, jak se chovají součty a rozdíly v menších řádech, a následném transferu výsledku na vyšší řád. Tedy 8 + 2 = 10, 8 – 2 = 6, můžeme se nyní domnívat, že pro dvojciferná čísla se bude jednat o čísla 80 a 20; tedy 80 + 20 = 100, 80 – 20 = 60 a nyní lze usoudit, že se jedná o čísla 83 a 17. Pro trojciferná čísla zkusíme 833 a 177, 833 + 177 = 1 010, 833 – 177 = 656 a druhé číslo musí být 167. Nyní je možné provést zobecnění na jakýkoliv vyšší řád. Metoda se opírá částečně o experimentální řešení a částečně o aritmetické řešení.

Úlohu můžeme řešit **aritmeticky**, když si uvědomíme, že pokud odečteme menší číslo od většího, dostaneme dvojnásobek menšího hledaného čísla. Tj. 10 000 – 6 666 = 3 334, číslo 3 334 je dvojnásobkem menšího z čísel. 3 334 : 2 = 1 667, 10 000 – 1 667 = 8 333. Při použití této metody je nutné provádět netriviální aritmetické operace, jako je sčítání a odčítání čísel s několika přechody přes základ.

Úlohu je také možné řešit **algebraicky**, sestavením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Větší z čísel označíme jako $a$ a menší jako $b$. Pak

$$a + b = 10\,000$$
$$a - b = 6\,666$$

Nejjednodušší je pokračovat sčítací metodou a určit hledaná čísla.

Součástí řešení je také **zkouška správnosti**. Zejména z důvodu náročnosti aritmetických operací je zapsání zkoušky nezbytné. Kontrolujeme dva údaje: 8 333 + 1 667 = 10 000, 8 333 – 1 667 = 6 666, oba údaje souhlasí se zadáním.

**Odpověď U1:** Hledaná čísla jsou 1 667 a 8 333.

## Úloha 2 (dále U2)

*Jolanka je šestkrát mladší než maminka, babička je dvanáctkrát starší než Jolanka. Všem třem dohromady je 95 let. Kolik roků je každé z nich?*

**Možnosti řešení U2**

Úlohu lze řešit **experimentálně, metodou falešného předpokladu**. Zvolím si věk Jolanky, například 10 let, a dopočítám věk ostatních ze zadaných vztahů: maminka by měla 60 let a babička 120 let. Celkově by jim bylo 190 let, což je dvojnásobek proti zadané hodnotě. Věk všech tří musí být proto poloviční: Jolance je 5 let, mamince 30 a babičce 60.

**Aritmeticky** je možné postupovat tak, že lze vypočítat, že všem třem dohromady je stejně, jako je devatenáctinásobek věku Jolanky. Vypočítáme tedy 95 : 19 = 5, a tím získáme věk Jolanky. Věk maminky a babičky dopočítáme ze zadání.

**Algebraicky** postupujeme tak, že označíme jako neznámou věk Jolanky a sestavíme rovnici:

$$x + 6x + 12x = 95$$
$$19x = 95$$
$$x = 5$$

Součástí řešení je opět **zkouška správnosti řešení**. Je nutné vyzkoušet všechny vztahy ze zadání: 5 + 30 + 60 = 95, 5 · 6 = 30, 5 · 12 = 60.

**Odpověď U2:** Jolance je 5 let, mamince 30 let a babičce 60 let.

## Úloha 3 (dále U3)

*Otec je o 5 let starší, než je trojnásobek synova věku. Za 17 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?*

### Možnosti řešení U3

Úlohu je možné řešit **experimentálně**, kdy stanovíme věk syna a dopočítáváme další hodnoty ze vztahů v zadání. Vzhledem k tomu, že musíme prověřovat několik vztahů, je vhodné informace zapisovat do tabulky.

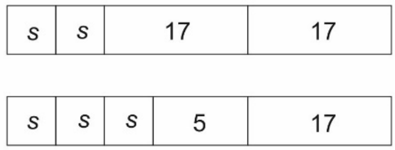
| | | | |
|---|---|---|---|
| Věk syna nyní, $s$ | 6 | 7 | 12 |
| Věk otce nyní, $3s + 5$ | 23 | 26 | 41 |
| Věk syna za 17 let, $s + 17$ | 23 | 24 | 29 |
| Věk otce za 17 let, $2(s + 17)$ | 46 | 48 | 58 |
| Kontrola věku otce | 46 – 23 = 23 | 48 – 26 = 22 | 58 – 41 = 17 |

Z prvních dvou sloupců vidíme, že když zvýšíme věk syna o 1 rok, zmenší se o 1 rok hodnota u kontroly věku otce. Začínáme na rozdílu 23 a rozdíl má být 17, musíme k věku syna přičíst 6 let. Tímto způsobem rychle najdeme správné řešení.

Úlohu je možné řešit také strategií na pomezí **aritmetiky** a **algebry**[20], a to **úvahou**: Za 17 let bude synovi $s + 17$ let a otci $s + 17 + s + 17$ (otec je dvojnásobně stár). Zároveň je mu $3s + 5 + 17$. Když porovnáme obě vyjádření věku otce za 17 let, je zřejmé, že $s + 5 = 17$. Odtud vidíme, že synovi je 12 let, a další hodnoty dopočítáme ze zadaných vztahů.

[20] Neznámá hodnota je sice označena prvním písmenem slova, ale další úvahy jsou aritmetické, nedochází k řešení rovnice.

Uvedené úvahy je možné a účelné opřít o grafické znázornění, které může sloužit jako přímý most mezi aritmetickým způsobem uvažování a algebrou, neboť přímo z obrázku lze sestavit rovnice. Znázorníme věk otce za 17 let dvěma způsoby ukázanými na Obr. 64.




*Obr. 64 Grafické znázornění úlohy 3*

**Algebraicky** můžeme úlohu řešit sestavením **rovnice s jednou neznámou**. Věk syna označíme jako $x$. Věk otce nyní je $3x + 5$. Za 17 let bude platit

$$(3x + 5) + 17 = 2(x + 17)$$

(Všimněme si, že rovnice zcela koresponduje s Obr. 64.)

Řešením je $x = 12$. V případě využití algebraické metody by se správně měly provádět **dvě zkoušky** – pro rovnici a pro slovní úlohu. Ve zkoušce rovnice dosadíme výslednou hodnotu $x = 12$ do sestavené rovnice. Ve zkoušce slovní úlohy zkontrolujeme všechny vztahy ze zadání: Synovi je nyní 12 let, otci $3 \cdot 12 + 5 = 41$ let. Za 17 let bude synovi 29 let a otci 58 let, což je dvojnásobek 29 let.

Také je možné sestavit **soustavu dvou rovnic o dvou neznámých**:

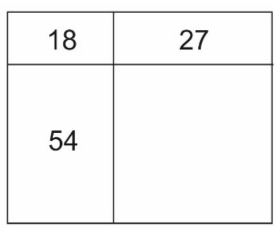
$$o = 3s + 5$$
$$o + 17 = 2(s + 17)$$

Výsledkem jsou hodnoty $s = 12$, $o = 41$. Opět je nutné provést zkoušku soustavy rovnic a také zkoušku slovní úlohy.

**Odpověď U3:** Synovi je 12 let a otci je 41 let.

## Úloha 4 (dále U4)

*Obdélník na obrázku je rozdělen na tři obdélníky a čtverec. Urči obsah čtverce, jsou-li známy obsahy tří obdélníků (v centimetrech čtverečních). Zapiš výpočet.*



### Možnosti řešení U4

Úlohu je možné řešit **aritmeticky**, a to rozkladem obsahů na součin[21]: $18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$, $27 = 3 \cdot 9$, odtud je zřejmé, že rozměry dvou horních obdélníků jsou $3 \cdot 6$ a $3 \cdot 9$, přičemž společná strana má délku 3. Jeden rozměr třetího obdélníku je tedy 6 a druhý $54 : 6 = 9$. Čtverec má tedy stranu délky 9 a jeho obsah je 81. V odpovědi se vrátíme od matematizace k vyjádření obsahu i s jednotkami: Obsah čtverce je 81 cm$^2$.

Lze postupovat také **algebraicky**, a to označením stran: $18 = a \cdot b$, $27 = a \cdot c$, $54 = b \cdot c$. Budeme postupovat dosazovací metodou. Vyjádříme z první rovnice $a = \frac{18}{b}$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$27 = \frac{18}{b} \cdot c$$

$$b = \frac{2}{3}c$$

Neznámou $b$ dosadíme do třetí rovnice:

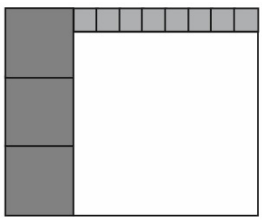
$$54 = \frac{2}{3}c \cdot c$$

$$c^2 = 81$$

**Odpověď U4:** Obsah čtverce je 81 cm$^2$.

## Úloha 5 (dále U5)

*Obdélník na obrázku je rozdělen na 12 čtverců. Délka strany tmavě šedých čtverců je 5 cm. Urči obsah bílého čtverce. Zapiš výpočet.*



### Možnosti řešení U5

Je možné postupovat **aritmeticky**, když vycházíme z faktu, že strany čtverce jsou shodné. Délka strany bílého čtverce je shodná se součtem délek stran osmi světlešedých čtverečků. Odtud je zřejmé, že délka strany tří tmavě šedých čtverců je stejná jako devíti světle šedých čtverců a pro délku strany světlešedých čtverců musí platit $a = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$. Délka strany bílého čtverce je $8a = \frac{40}{3}$, a jeho obsah proto $S = \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{1600}{9}$.

[21] Výpočet zjednodušíme matematizací, což znamená, že budeme pracovat pouze s čísly a nikoli s veličinami.

Na stejné úvaze je založeno také **algebraické řešení** pomocí **rovnice s jednou neznámou**. Jako neznámou můžeme označit délku strany světle šedého čtverečku. Potom platí

$$8x = 15 - x$$
$$9x = 15$$
$$x = \frac{5}{3}$$

Délka strany bílého čtverce je $8x = \frac{40}{3}$ a jeho obsah $S = \frac{1600}{9}$.

**Odpověď U5:** Obsah bílého čtverce je $\frac{1600}{9}$ cm$^2$, což je přibližně 178 cm$^2$.

Je také potřeba udělat přibližnou **kontrolu správnosti**, kdy odmocníme 178 (či bez kalkulačky $\frac{1600}{9}$), výsledek 13,3 má odpovídat délce strany čtverce: 15 – 13,3 = 1,7, všechny hodnoty odpovídají.

Na základě svých zkušeností z předvýzkumu a rovněž na základě prostudované literatury jsem se rozhodla strategie řešení rozlišovat dle sofistikovanosti následujícím způsobem:

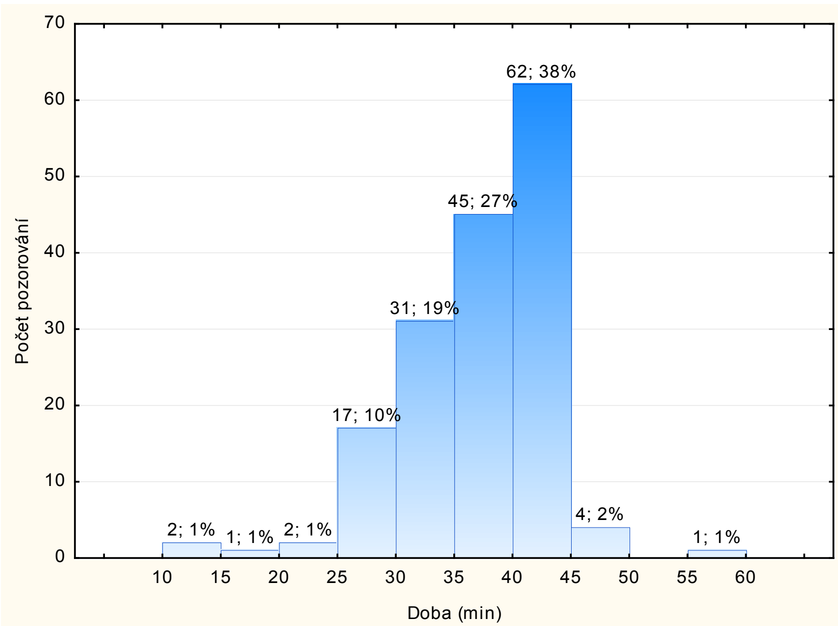
- **Neřízený experiment (metoda pokusu a omylu):** žák experimentálně prověřuje zadané vztahy, postupně se přibližuje výsledku, avšak nehledá mezi jednotlivými řešeními souvislost, která by mu umožnila řešení urychlit.
- **Řízený experiment:** žák experimentálně prověřuje zadané vztahy, po několika krocích si všimne určité zákonitosti, tu využije ke zrychlení řešení.
- **Aritmetické řešení s grafickým znázorněním:** žák využívá grafického znázornění k nalezení vzájemných vztahů, úlohu řeší numericky.
- **Aritmetické řešení bez grafického znázornění:** žák nalezne vztahy mezi veličinami bez obrázku, tj. jeho aritmetické představy jsou na vyšším stupni vývoje.
- **Algebraické řešení:** žák správně označí neznámé, sestaví rovnici či soustavu rovnic a tu správně vyřeší.

Poznámka: Můžeme si všimnout, že u aritmetických řešení je většinou nutné vnímat mnohem více vztahů než u ostatních metod řešení. Aritmetické řešení se více opírá o číselné představy, algebraické řešení je oproti tomu mechaničtější. Z tohoto pohledu by se aritmetické řešení mohlo zdát sofistikovanější než algebraické. Algebraické řešení je však pro žáky náročnější na abstrakci a pokud se algebraická strategie používá s porozuměním (tj. ne pouze v naučených krocích), je toto řešení nejsofistikovanější.

## – 4 – 5 PRŮBĚH VÝZKUMU

Testy jsem žákům zadávala buď sama, nebo je zadávali studenti učitelství, kteří dostali podrobné instrukce, jak postupovat. Žáci test vyplňovali vždy ve škole, a to buď v rámci hodiny matematiky, nebo stranou výuky během vyučování, v několika případech po vyučování. Po napsání testu byl se všemi žáky proveden rozhovor, v němž žák popisoval, jak při řešení úloh uvažoval. Rozhovor vedl výzkumník. Žáci byli dále dotazováni na náročnost úloh a to, zda se s podobnými úlohami setkávají v hodinách matematiky.

Ve většině případů test psali jen vytipovaní žáci, úkolem výzkumníka bylo dozírat na to, aby žáci pracovali samostatně, bez kalkulaček. V několika případech nechal vyučující test psát celou třídu, protože ho zajímalo, jak budou žáci úspěšní v řešení a jaké strategie budou používat. Ke mně se ovšem dostaly pouze testy vytipovaných žáků. Žáci mohli používat volné papíry, které odevzdávali spolu s testem. Na vypracování dostali čas jedné vyučovací hodiny, měli možnost odevzdat dříve, v některých případech o trochu později, doba řešení byla zaznamenávána. Nejrychlejší žáci odevzdávali již po 14 minutách. Průměrně test řešili 39 minut, setkala jsme se však s dobou řešení mnohem kratší i mnohem delší. Rozložení časů můžeme sledovat na Obr. 65.




*Obr. 65 Graf závislosti počtu žáků na době řešení testu*

K psaní testu byli žáci obvykle motivováni tím, že jim bylo sděleno, že byli vybráni jako šikovní v matematice. Žáci se ve většině případů snažili nad úlohami přemýšlet, najít řešení. V rozhovorech poté žáci často uváděli, že je úlohy zaujaly tím, že jsou jiné, než které se řeší na hodinách matematiky. Úlohy z hodin popisovali jako procvičování osvojeného algoritmu, zatímco u úloh z testu měli možnost přemýšlet a hledat originální řešení, aniž by jim někdo přikázal, jak musí postupovat.

Žáci měli možnost klást učiteli v průběhu testování dotazy. Ptali se často na geometrické úlohy, nezřídka na věci, které mohli vyčíst ze zadání. U úlohy 4 se například často dotazovali, v jakých jednotkách jsou uvedené obsahy. Žákům bylo na dotazy odpovězeno, nezabývala jsem se totiž čtenářskou gramotností, ale strategiemi, které žáci volili k řešení.

V průběhu vyhodnocování jsem si žáky očíslovala a toto kódování dále používala při kvalitativním zpracování dat.

## – 4 – 6 ANALÝZA DAT

Jak již bylo řečeno, výzkum má smíšený charakter.

Data, tedy žákovská řešení, byla nejdříve zpracována co do úspěšnosti řešení. Každou úlohu jsem bodovala body: 0 (neřešeno, špatně řešeno), 1 (částečně řešeno), 2 (správně vyřešeno). Zaznamenávala jsem použitou strategii řešení (na základě analýzy úlohy a priori v oddílu 4.4) a všechny dostupné charakteristiky žáka, jak bylo uvedeno výše. Vše jsem zaznamenávala do programu Statistica. Kvantitativní zpracování dat provedla paní doktorka Budíková.

Kromě deskriptivního popisu výsledků výzkumného souboru byly stanoveny také hypotézy popisující vztah mezi různými charakteristikami. U každé z pěti úloh bylo vysloveno následujících pět nulových hypotéz: *$H1_0$. Úspěšnost v úloze nezávisí na typu školy. $H2_0$. Úspěšnost v úloze nezávisí na ročníku. $H3_0$. Úspěšnost v úloze nezávisí na nadání. $H4_0$. Úspěšnost v úloze nezávisí na použité metodě řešení. $H5_0$. Volba metody není závislá na nadání.*

Při zpracování dat byla nejprve použita deskriptivní statistika, s jejíž pomocí byly zjišťovány četnosti bodových hodnocení jednotlivých úloh, relativní četnosti, aritmetický průměr a charakteristiky rozptýlení (rozptyl a směrodatná odchylka). Byl proveden podrobný rozbor řešení jednotlivých úloh, ve kterém byla analyzována schopnost řešit danou aplikační úlohu a preferovaná strategie řešení.

Zjišťovala jsem reliabilitu didaktického testu, a to pomocí Cronbachova koeficientu $\alpha$.

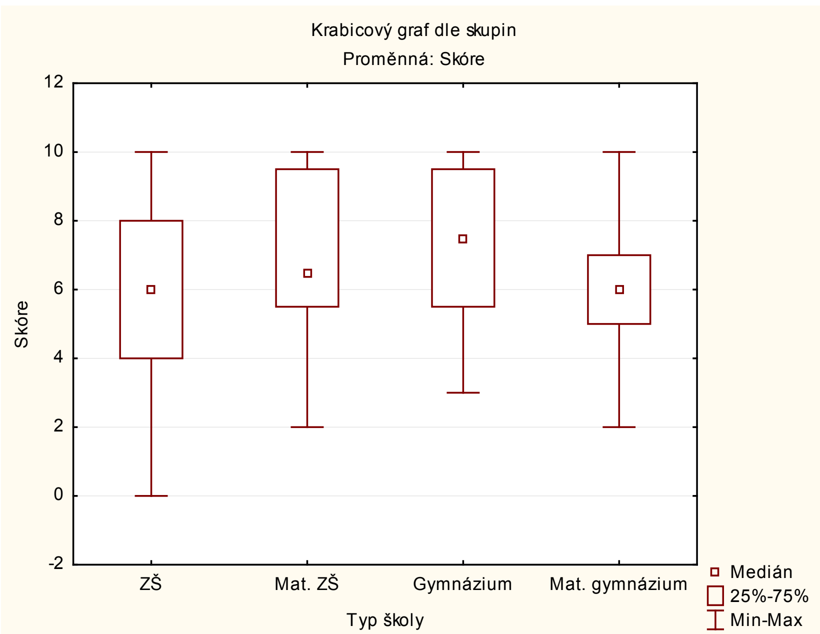
Dále byla pro zjišťování vztahů mezi proměnnými použita statistika induktivní. K ověření, zda rozdíl mezi realizacemi dvou statistik je statisticky významný, tzn. rozdíl není způsoben jenom náhodnými vlivy, používáme testování statistických hypotéz. Statistickou hypotézou rozumíme jakýkoliv předpoklad o rozložení pravděpodobnosti jedné nebo více náhodných veličin (Budíková et al., 2010). Hypotézy, které se vztahovaly k porovnání určitých statistik, byly testovány pomocí testu nezávislosti *chí-kvadrát*. V případě, že rozložení dat nesplňovalo požadavek normality či homogenity rozptylu, byly použity neparametrické metody, jako *Kruskalův-Wallisův test* nebo *Mann-Whitneyův U test*.

Pro získané výsledky byla použita hladina významnosti $p \leq 0{,}05$, což je v pedagogické metodologii standardně používaná hodnota. Znamená to, že riziko chybného přijetí nebo zamítnutí nulové hypotézy je 5 %.

# – 4 – 7 KVANTITATIVNÍ ANALÝZA VÝSLEDKŮ

## – 4 – 7 – 1 Úspěšnost žáků v úlohách

Každá z pěti testových úloh byla bodována body 0 (žák úlohu nevyřešil), 1 (žák úlohu částečně vyřešil – např. se dopracoval k nějakému podstatnému mezivýsledku nebo udělal numerickou chybu), nebo 2 (žák úlohu bezchybně vyřešil). Bylo možné získat maximálně 10 bodů. Žáci v testu dosáhli **průměrného výsledku 6,2 bodů**. Přitom žáci základní školy obdrželi průměrně 6,1 bodů, žáci matematické základní školy 6,9 bodů, žáci gymnázia 7,3 bodů a žáci matematického gymnázia 6,1 bodů. Výsledky jsou znázorněny v krabicovém grafu na Obr. 66.




*Obr. 66 Získaná skóre podle jednotlivých typů škol – krabicový graf*

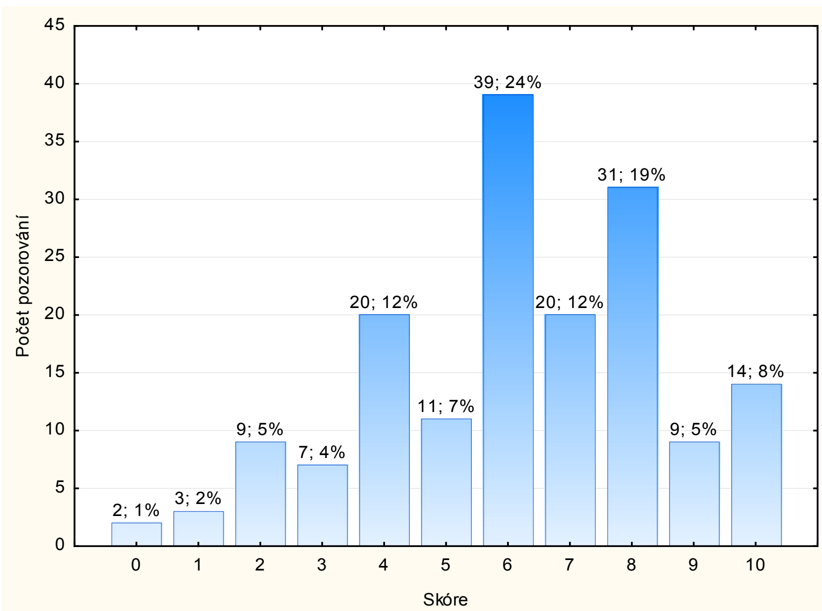
Reliabilitu testu jsem určila pomocí Cronbachova koeficientu $\alpha$, který určuje dolní hranici spolehlivosti testu. Platí pro něj vzorec

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}{s^2}\right)$$

kde $k$ je počet úloh v testu, $s_i^2$ je rozptyl dosažených skóre $i$-té úlohy, $s^2$ je celkový rozptyl dosažených skóre v testu. V pedagogickém výzkumu je obvykle požadován koeficient reliability alespoň 0,8 (Štěpánek, 2009). U testů s počtem úloh menším než 10 bývá však reliabilita nižší, nejvýše 0,6. V našem případě bylo $k = 5, \sum_{i=1}^{k} s_i^2 = 3{,}35, s = 2{,}52$ a Cronbachův koeficient $\alpha$ vyšel 0,59. Nízká reliabilita testu je způsobena malým počtem úloh a také tím, že se jedná o školsky netypické úlohy, a není tudíž testována žádná konkrétní znalost nebo dovednost. V případě nižšího koeficientu reliability nelze výsledky testu pokládat za spolehlivý ukazatel obecných jevů, ale test může dobře posloužit k diagnostikování konkrétních nedostatků (Štěpánek, 2009). Celkové výsledky mého didaktického testu je tedy nutné brát s rezervou, nebylo by například možné tvrdit, že matematicky nadaní žáci dosahují v tomto testu lepších výsledků. Soustředím se však na přístupy k řešení jednotlivých úloh a těžiště vyhodnocování bude v kvalitativní analýze žákovských řešení.

Dva žáci ve vzorku obdrželi skóre 0 bodů, oba byli jedničkáři ze stejné základní školy. Plného počtu bodů dosáhlo 14 žáků, z toho 9 ze základní školy, 2 z matematické základní školy, 2 z gymnázia a 1 z matematického gymnázia. Musíme mít však na paměti, že ve vzorku bylo pouze 8 žáků z matematické základní školy a 8 žáků ze všeobecného gymnázia.

Graf četností pro proměnnou Skóre je na Obr. 67.




*Obr. 67 Sloupkový diagram proměnné Skóre*

Úspěšnost žáků v jednotlivých úlohách je uvedena v Tab. 21.

*Tab. 21 Úspěšnost žáků v jednotlivých úlohách testu*

| **Úloha** | **Úspěšnost (v %)** |
|---|---|
| U1 | 72 |
| U2 | 85 |
| U3 | 41 |
| U4 | 71 |
| U5 | 21 |

## – 4 – 7 – 2 Testování hypotéz

### Zkoumání závislosti úspěchu v U1 na různých faktorech

**1. Typ školy:**

(3 kategorie: ZŠ – 89 žáků, mat. ZŠ a gymnázium – 15 žáků, mat. gymnázium – 54 žáků). Z důvodu malého počtu žáků ve skupině gymnázium a matematická ZŠ byly tyto skupiny sloučeny (vznikla tak skupina o 16 žácích, lépe srovnatelná počtem žáků s dalšími dvěma skupinami). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 7 žáků, kteří úlohu 1 buď neřešili, nebo špatně pochopili zadání, či ji vyřešili pouze částečně[22].

*Tab. 22 Procento úspěšných žáků podle jednotlivých typů škol*

| **Typ školy** | **Úspěch** |
|---|---|
| ZŠ | 69,05 % |
| Mat. ZŠ a gymnázium. | 66,67 % |
| Mat. gymnázium. | 92,59 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H1_0$:** *Úspěšnost v U1 nezávisí na typu školy* (3 kategorie).

**$H1_1$:** *Úspěšnost v U1 závisí na typu školy* (3 kategorie).

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[23] (p-hodnota: 0,0009; Cramérův koeficient[24] = 0,2969).

[22] Bez tohoto zásahu by nebylo možné provést statistické výpočty. Vybráni byli jen ti žáci, kteří se pokusili o řešení, řešili zadanou úlohu (tj. nepozměnili smysl zadání) a byli v úloze buď úspěšní (2 b) nebo neúspěšní (0 b).

[23] Hodnota testové statistiky = 13,9359; Počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0009; Cramérův koeficient = 0,2969

[24] Cramérův koeficient vyjadřuje intenzitu závislosti; 0 – nezávislost, 1 – závislost

Závislost mezi úspěchem v úloze 1 a typem školy **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Při řešení U1 byli nejúspěšnější žáci matematického gymnázia, jejichž úspěšnost byla více než 90 %.

**2. Ročník:**

(4 kategorie: 6. ročník – 49 žáků, 7. ročník – 28 žáků, 8. ročník – 19 žáků, 9. ročník – 62 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 7 žáků, kteří úlohu 1 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 23 Procento úspěšných žáků v jednotlivých ročnících*

| **Ročník** | **Úspěch** |
|---|---|
| 6. | 71,43 % |
| 7. | 50,00 % |
| 8. | 78,95 % |
| 9. | 87,10 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H2_0$:** *Úspěšnost v U1 nezávisí na ročníku.*

**$H2_1$:** *Úspěšnost v U1 závisí na ročníku.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[25] (p-hodnota: 0,0023; Cramérův koeficient = 0,3033).

Závislost mezi úspěchem v úloze 1 a ročníkem **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Nejvíce úspěšní byli při řešení úlohy 1 žáci 9. ročníku. Zajímavé je, že žáci 6. ročníku dosáhli velmi obstojného výsledku a nejméně se dařilo žákům 7. ročníku. V kvalitativní analýze se pokusím najít příčinu.

**3. Nadání:**

(3 kategorie: bez nadání – 79 žáků, všeob. nadání – 52 žáků, mat. nadání – 27 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 7 žáků, kteří úlohu 1 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 24 Procento úspěšných žáků podle nadání*

| **Nadání** | **Úspěch** |
|---|---|
| Bez nadání | 63,29 % |
| Všeob. nadání | 84,62 % |
| Mat. nadání | 88,89 % |

[25] Hodnota testové statistiky = 14,533; Počet stupňů volnosti = 3; p-hodnota = 0,0023; Cramérův koeficient = 0,3033

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H3_0$:** *Úspěšnost v U1 nezávisí na nadání.*

**$H3_1$:** *Úspěšnost v U1 závisí na nadání.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[26] (p-hodnota: 0,0041; Cramérův koeficient = 0,2641).

Závislost mezi úspěchem v úloze 1 a nadáním **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Nejvíce úspěšní byli při řešení úlohy 1 matematicky nadaní žáci.

### 4. Strategie řešení:

(3 kategorie: aritmeticky[27] – 69 žáků, algebraicky – 66 žáků, experimentem – 18 žáků). Ze souboru bylo vyloučeno 12 žáků, kteří úlohu 1 buď neřešili, špatně pochopili zadání či ji vyřešili pouze částečně.

*Tab. 25 Procento úspěšných žáků podle zvolené strategie řešení*

| **Strategie** | **Úspěch** |
|---|---|
| Aritmeticky | 71,01 % |
| Algebraicky | 87,88 % |
| Experimentem | 61,11 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H4_0$:** *Úspěšnost v U1 nezávisí na strategii.*

**$H4_1$:** *Úspěšnost v U1 závisí na strategii.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[28] (p-hodnota: 0,015; Cramérův koeficient = 0,2344).

Závislost mezi úspěchem v úloze 1 a strategií **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Žáci, kteří zvolili algebraickou strategii, byli nejčastěji úspěšní.

### 5. Volba strategie v závislosti na nadání:

Nadání žáka: 3 varianty – bez nadání, všeobecné nadání, matematické nadání.

Strategie řešení: 4 varianty – aritmeticky (sloučeny varianty aritmeticky, aritmeticky pamětně, aritmeticky graficky), algebraicky, experimentem, neřešeno (sloučeny varianty nepochopil zadání, neřešeno).

[26] Hodnota testové statistiky = 11,017; Počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0041; Cramérův koeficient = 0,2641

[27] Byly sloučeny varianty aritmeticky, aritmeticky pamětně a aritmeticky graficky.

[28] Hodnota testové statistiky = 8,4028; Počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,015; Cramérův koeficient = 0,2344

**$H5_0$:** *Volba strategie při řešení U1 nezávisí na nadání žáka.*

**$H5_1$:** *Volba strategie při řešení U1 závisí na nadání žáka.*

*Tab. 26 Kontingenční tabulka simultánních četností a sloupcově podmíněných relativních četností*

| | **Kontingenční tabulka** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Strategie U1 upravené | **Bez nadání** | **Všeob. nadání** | **Mat. nadání** | **Řádk. součty** |
| Četnost | **Aritmeticky** | 38 | 25 | 9 | 72 |
| Sloupc. četn. | | 46,34 % | 45,45 % | 32,14 % | |
| Četnost | **Algebraicky** | 30 | 21 | 19 | 70 |
| Sloupc. četn. | | 36,59 % | 38,18 % | 67,86 % | |
| Četnost | **Experimentem** | 11 | 7 | 0 | 18 |
| Sloupc. četn. | | 13,41 % | 12,73 % | 0,00 % | |
| Četnost | **Neřešeno** | 3 | 2 | 0 | 5 |
| Sloupc. četn. | | 3,66 % | 3,64 % | 0,00 % | |
| Četnost | **Vš. skup.** | 82 | 55 | 28 | 165 |

Pearsonův chí-kvadrát test nezávislosti **nezamítá nulovou hypotézu**[29] na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota = 0,0914).

Z kontingenční tabulky (Tab. 26) je patrné, že žáci bez nadání a žáci všeobecně nadaní nejčastěji volili aritmetickou metodu, zatímco matematicky nadaní žáci nejčastěji použili algebraickou metodu. Rozdíly ale nejsou statisticky významné.

**Shrnutí výsledků pro U1**

Úlohu 1 dokázalo **bezchybně vyřešit** 118 žáků, tj. **72 % žáků**. 7 žáků ji vyřešilo částečně. Patřila k jednodušším úlohám. Splňovala předpoklady vzhledem k typu školy (nejvyšší úspěšnost pro matematické gymnázium), k ročníku (vyšší úspěšnost v 8. a 9. ročníku) a vzhledem k nadání (nejúspěšnější byli matematicky nadaní žáci). Osobně se domnívám, že se jedná o typ úlohy, který se běžně řeší na matematicky zaměřených školách, avšak na některých základních školách se žáci s úlohou podobné náročnosti nesetkávají. Při volbě algebraického řešení vzniká školsky typická soustava rovnic, což je podle mého názoru důvod, proč byli úspěšnější žáci, kteří se rozhodli pro algebraickou strategii.

[29] Testová statistika Pearsonova chí-kvadrát testu nezávislosti: 10,9032; počet stupňů volnosti: 6; příslušná p-hodnota = 0,0914

**1. Typ školy:**

(3 kategorie: ZŠ – 93 žáků, mat. ZŠ a gymnázium – 16 žáků, mat. gymnázium – 55 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace byl vyloučen 1 žák, který úlohu 2 vyřešil pouze částečně.

*Tab. 27 Procento úspěšných žáků podle jednotlivých typů škol*

| Typ školy | Úspěch |
|---|---|
| ZŠ | 83,87 % |
| Mat. ZŠ a gymnázium | 87,50 % |
| Mat. gymnázium | 89,09 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H6_0$:** *Úspěšnost v U2 nezávisí na typu školy* (3 kategorie).

**$H6_1$:** *Úspěšnost v U2 závisí na typu školy* (3 kategorie).

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[30] (p-hodnota: 0,6653).

Závislost mezi úspěchem v úloze 2 a typem školy **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Můžeme konstatovat, že žáci ze všech typů škol byli srovnatelně úspěšní.

**2. Ročník:**

(4 kategorie: 6. ročník – 50 žáků, 7. ročník – 31 žáků, 8. ročník – 19 žáků, 9. ročník – 64 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace byl vyloučen 1 žák, který úlohu 2 vyřešil pouze částečně.

*Tab. 28 Procento úspěšných žáků v jednotlivých ročnících*

| Ročník | Úspěch |
|---|---|
| 6. | 70,00 % |
| 7. | 87,10 % |
| 8. | 94,74 % |
| 9. | 95,31 % |

30 Hodnota testové statistiky = 0,8152; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,6653; Cramérův koeficient = 0,0705

Testování hypotézy o nezávislosti

**H7$_0$:** *Úspěšnost v U2 nezávisí na ročníku.*

**H7$_1$:** *Úspěšnost v U2 závisí na ročníku.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[31] (p-hodnota: 0,0009, Cramérův koeficient = 0,3167).

Závislost mezi úspěchem v úloze 2 a ročníkem **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Slabších výsledků dosáhli žáci 6. ročníku.

**3. Nadání:**

(3 kategorie: bez nadání – 79 žáků, všeob. nadání – 52 žáků, mat. nadání – 27 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 7 žáků, kteří úlohu 2 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 29 Procento úspěšných žáků podle nadání*

| **Nadání** | **Úspěch** |
|---|---|
| Bez nadání | 82,72 % |
| Všeob. nadání | 85,45 % |
| Mat. nadání | 96,43 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**H8$_0$:** *Úspěšnost v U2 nezávisí na nadání.*

**H8$_1$:** *Úspěšnost v U2 závisí na nadání.*

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[32] (p-hodnota: 0,196).

Závislost mezi úspěchem v úloze 2 a nadáním **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05.

**4. Strategie řešení:**

(3 kategorie: aritmeticky – 36 žáků, algebraicky – 77 žáků, experimentem – 43 žáků). Ze souboru bylo vyloučeno 9 žáků, kteří úlohu 2 buď neřešili, špatně uvažovali či ji vyřešili pouze částečně.

[31] Hodnota testové statistiky = 16,4526; počet stupňů volnosti = 3; p-hodnota = 0,0009; Cramérův koeficient = 0,3167

[32] Hodnota testové statistiky = 3,2635; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,196; Cramérův koeficient = 0,1411

*Tab. 30 Procento úspěšných žáků podle zvolené strategie*

| Strategie | Úspěch |
|---|---|
| Aritmeticky | 83,33 % |
| Algebraicky | 90,91 % |
| Experimentem | 95,35 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H9_0$:** *Úspěšnost v U2 nezávisí na strategii.*

**$H9_1$:** *Úspěšnost v U2 závisí na strategii.*

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[33] (p-hodnota: 0,1917).

Závislost mezi úspěchem v úloze 2 a strategií **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05.

**5. Volba strategie v závislosti na nadání:**

Strategie řešení: 4 varianty – aritmeticky (sloučeny varianty aritmeticky, aritmeticky graficky), algebraicky, experimentem, neřešeno (sloučeny varianty špatná úvaha, neřešeno).

**$H10_0$:** *Volba strategie při řešení U2 nezávisí na nadání.*

**$H10_1$:** *Volba strategie při řešení U2 závisí na nadání.*

*Tab. 31 Kontingenční tabulka simultánních četností a sloupcově podmíněných relativních četností*

| | **Kontingenční tabulka** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Strategie U2 upravené | **Bez nadání** | **Všeob. nadání** | **Mat. nadání** | **Řádk. součty** |
| Četnost | **Aritmeticky** | 17 | 12 | 7 | 36 |
| Sloupc. četn. | | 20,73 % | 21,82 % | 25,00 % | |
| Četnost | **Algebraicky** | 36 | 23 | 19 | 78 |
| Sloupc. četn. | | 43,90 % | 41,82 % | 67,86 % | |
| Četnost | **Experimentem** | 26 | 15 | 2 | 43 |
| Sloupc. četn. | | 31,71 % | 27,27 % | 7,14 % | |
| Četnost | **Neřešeno** | 3 | 5 | 0 | 8 |
| Sloupc. četn. | | 3,66 % | 9,09 % | 0,00 % | |
| Četnost | **Vš. skup.** | 82 | 55 | 28 | 165 |

[33] Hodnota testové statistiky = 3,3032; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,1917; Cramérův koeficient = 0,1455

Pearsonův chí-kvadrát test nezávislosti **nezamítá nulovou hypotézu**[34] na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota: 0,0679). Všechny tři skupiny žáků volily nejčastěji algebraickou metodu řešení.

**Shrnutí výsledků pro U2**

Úlohu 2 **vyřešilo bezchybně** 141 žáků, tj. **85 % žáků**. Šlo o nejjednodušší úlohu, v testu plnila motivační roli. Neodlišovala skupiny žáků, s výjimkou skupin rozdělených podle ročníků, kdy žáci 6. ročníku byli v řešení nejméně úspěšní, zřejmě kvůli nižší matematické zkušenosti.

## Zkoumání závislosti úspěchu v U3 na různých faktorech

**1. Typ školy:**

(3 kategorie: ZŠ – 91 žáků, mat. ZŠ a gymnázium – 16 žáků, mat. gymnázium – 54 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace byli vyloučeni 4 žáci, kteří úlohu 3 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 32 Procento úspěšných žáků podle jednotlivých typů škol*

| Typ školy | Úspěch |
|---|---|
| ZŠ | 42,86 % |
| Mat. ZŠ a gymnázium | 43,75 % |
| Mat. gymnázium | 40,74 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H11_0$:** *Úspěšnost v U3 nezávisí na typu školy* (3 kategorie).

**$H11_1$:** *Úspěšnost v U3 závisí na typu školy* (3 kategorie).

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[35] (p-hodnota: 0,9613).

Závislost mezi úspěchem v úloze 3 a typem školy **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05.

[34] Testová statistika Pearsonova chí-kvadrát testu nezávislosti: 11,7453; počet stupňů volnosti: 6; příslušná p-hodnota = 0,0679

[35] Hodnota testové statistiky = 0,0789; Počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,9613

**2. Ročník:**

(4 kategorie: 6. ročník – 49 žáků, 7. ročník – 30 žáků, 8. ročník – 19 žáků, 9. ročník – 63 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace byli vyloučeni 4 žáci, kteří úlohu 3 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 33 Procento úspěšných žáků v jednotlivých ročnících*

| Ročník | Úspěch |
|---|---|
| 6. | 18,37 % |
| 7. | 36,67 % |
| 8. | 52,63 % |
| 9. | 60,32 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**H12$_0$:** *Úspěšnost v úloze 3 nezávisí na ročníku.*

**H12$_1$:** *Úspěšnost v úloze 3 závisí na ročníku.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[36] (p-hodnota: 0,0001; Cramérův koeficient = 0,3621).

Závislost mezi úspěchem v úloze 3 a ročníkem **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. V úloze byli nejméně úspěšní žáci 6. ročníku, kteří mohli k řešení vybrat pouze experimentální strategii. Vztahy v úloze jsou totiž příliš složité pro řešení aritmetickou strategií. Žáci 9. ročníku byli v řešení nejúspěšnější. Měli k dispozici experimentální strategii a také algebraickou strategii.

**3. Nadání:**

(3 kategorie: bez nadání – 81 žáků, všeob. nadání – 53 žáků, mat. nadání – 27 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace byli vyloučeni 4 žáci, kteří úlohu 3 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 34 Procento úspěšných žáků podle nadání*

| Nadání | Úspěch |
|---|---|
| Bez nadání | 40,74 % |
| Všeob. nadání | 30,19 % |
| Mat. nadání | 70,37 % |

[36] Hodnota testové statistiky = 21,1077; Počet stupňů volnosti = 3; p-hodnota = 0,0001; Cramérův koeficient = 0,3621.

Testování hypotézy o nezávislosti

**H13$_0$:** *Úspěšnost v U3 nezávisí na nadání.*

**H13$_1$:** *Úspěšnost v U3 závisí na nadání.*

Chí-kvadrát test nezávisloti zamítá nulovou hypotézu[37] (p-hodnota: 0,0025; Cramérův koeficient = 0,2729).

Závislost mezi úspěchem v úloze 3 a nadáním **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. V úloze byli nejúspěšnější žáci matematicky nadaní. Někteří z nich mají s podobnými úlohami zkušenost z matematických soutěží, někteří se s nimi setkávají ve výuce matematiky, některým umožnily rozsáhlé matematické představy úlohu vyřešit i bez předchozí zkušenosti.

## 4. Strategie řešení:

(2 kategorie: algebraicky – 74 žáků, experimentem – 50 žáků). Ze souboru bylo vyloučeno 41 žáků, kteří úlohu 3 neřešili či vyřešili pouze částečně.

*Tab. 35 Procento úspěšných žáků podle použité metody*

| **Strategie** | **Úspěch** |
|---|---|
| Algebraicky | 45,95 % |
| Experimentem | 68,00 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**H14$_0$:** *Úspěšnost v U3 nezávisí na strategii.*

**H14$_1$:** *Úspěšnost v U3 závisí na strategii.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[38] (p-hodnota: 0,0000; Cramérův koeficient = 0,5051).

Závislost mezi úspěchem v úloze 3 a metodou **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. V řešení byli úspěšnější ti žáci, kteří zvolili experimentální metodu. Více než polovina žáků, kteří zvolili algebraickou metodu, nebyla schopna řešení dovést do úspěšného konce. Důvod tohoto jevu se pokusím najít v kvalitativní analýze.

## 5. Volba strategie v závislosti na nadání:

Strategie řešení: 3 varianty – algebraicky, experimentem, neřešeno

[37] Hodnota testové statistiky = 11,9871; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0025; Cramérův koeficient = 0,2729.

[38] Hodnota testové statistiky = 41,0749; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0000; Cramérův koeficient = 0,5051.

**H15$_0$:** *Volba strategie řešení U3 nezávisí na nadání.*

**H15$_1$:** *Volba strategie řešení U3 závisí na nadání.*

*Tab. 36 Kontingenční tabulka simultánních četností a sloupcově podmíněných relativních četností*

| | **Kontingenční tabulka** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Strategie U3 | **Bez nadání** | **Všeob. nadání** | **Mat. nadání** | **Řádk. součty** |
| Četnost | **Neřešeno** | 21 | 13 | 3 | 37 |
| Sloupc. četn. | | 25,61 % | 23,64 % | 10,71 % | |
| Četnost | **Algebraicky** | 27 | 27 | 22 | 76 |
| Sloupc. četn. | | 32,93 % | 49,09 % | 78,57 % | |
| Četnost | **Experiment** | 34 | 15 | 3 | 52 |
| Sloupc. četn. | | 41,46 % | 27,27 % | 10,71 % | |
| Četnost | **Vš. skup.** | 82 | 55 | 28 | 165 |

Pearsonův chí-kvadrát test nezávislosti **zamítá nulovou hypotézu**[39] na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota = 0,001).

Z kontingenční tabulky (Tab. 36) je zřejmé, že žáci bez nadání nejčastěji k řešení volili experimentální strategii, žáci nadaní a matematicky nadaní nejčastěji volili algebraickou strategii.

**Shrnutí výsledků U3**

Úlohu 3 **vyřešilo správně** 68 žáků, tj. **41 % žáků**. Úloha byla náročná pro všechny skupiny žáků, ale dobře odlišovala matematicky nadané žáky od jinak nadaných a ostatních žáků. Osobně ale soudím, že tito žáci měli větší úspěch v důsledku rozsáhlejší zkušenosti s uvedeným typem úloh. Někteří z nich se s tímto typem úloh mohli setkat ve škole (největší kumulace matematicky nadaných žáků byla na víceletých gymnáziích se zaměřením na výuku matematiky) nebo také při řešení Matematické olympiády. Žáci byli úspěšnější v případě, že k řešení vybrali experimentální strategii. V algebraické strategii řada z nich selhávala, a to i přesto, že se nejčastěji jednalo o žáky 9. ročníku, kteří mají příslušné učivo probráno.

Z hlediska výběru strategie volili nenadaní žáci nejčastěji experimentální strategii a matematicky nadaní žáci ve velké většině volili algebraickou strategii.

[39] Testová statistika Pearsonova chí-kvadrát testu nezávislosti: 18,4583; počet stupňů volnosti: 4; příslušná p-hodnota = 0,001.

**1. Typ školy:**

(3 kategorie: ZŠ – 89 žáků, mat. ZŠ a gymnázium – 14 žáků, mat. gymnázium – 53 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 9 žáků, kteří úlohu 4 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 37 Procento úspěšných žáků podle jednotlivých typů škol*

| **Typ školy** | **Úspěch** |
|---|---|
| ZŠ | 79,78 % |
| Mat. ZŠ a gymnázium | 100,00 % |
| Mat. gymnázium | 60,38 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H16_0$:** *Úspěšnost v U4 nezávisí na typu školy* (3 kategorie).

**$H16_1$:** *Úspěšnost v U4 závisí na typu školy* (3 kategorie).

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[40] (p-hodnota: 0,0028; Cramérův koeficient = 0,2749).

Závislost mezi úspěchem v úloze 4 a typem školy **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. V úloze excelovali žáci matematické základní školy a všeobecného gymnázia. Nejméně úspěšní byli žáci matematického gymnázia. Žáci matematického gymnázia se často pokoušeli k řešení přistupovat algebraicky, mnohdy neúspěšně. Výsledky u žáků matematické základní školy a víceletého gymnázia však mohou být ovlivněny malým počtem zkoumaných žáků.

**2. Ročník:**

(4 kategorie: 6. ročník – 49 žáků, 7. ročník – 28 žáků, 8. ročník – 19 žáků, 9. ročník – 60 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 9 žáků, kteří úlohu 4 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 38 Procento úspěšných žáků v jednotlivých ročnících*

| **Ročník** | **Úspěch** |
|---|---|
| 6. | 65,31 % |
| 7. | 89,29 % |
| 8. | 84,21 % |
| 9. | 73,33 % |

[40] Hodnota testové statistiky = 11,7931; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0028; Cramérův koeficient = 0,2749

Testování hypotézy o nezávislosti

**H19$_0$:** *Úspěšnost v U4 nezávisí na ročníku.*

**H19$_1$:** *Úspěšnost v U4 závisí na ročníku.*

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[41] (p-hodnota: 0,0916).

Závislost mezi úspěchem v úloze 4 a ročníkem **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05.

**3. Nadání:**

(3 kategorie: bez nadání – 79 žáků, všeob. nadání – 51 žáků, mat. nadání – 26 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 9 žáků, kteří úlohu 4 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 39 Procento úspěšných žáků podle nadání*

| **Nadání** | **Úspěch** |
|---|---|
| Bez nadání | 82,28 % |
| Všeob. nadání | 70,59 % |
| Mat. nadání | 61,54 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**H18$_0$:** *Úspěšnost v U4 nezávisí na nadání.*

**H18$_1$:** *Úspěšnost v U4 závisí na nadání.*

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[42] (p-hodnota: 0,0716).

Závislost mezi úspěchem v úloze 4 a nadáním **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Lze si však všimnout zajímavého fenoménu, sice že žáci bez nadání byli v úloze 4 úspěšnější než žáci matematicky nadaní. Roli mohl sehrát fakt, že mnoho matematicky nadaných žáků se úlohu pokusilo řešit algebraicky, ale selhali.

**4. Strategie řešení:**

(3 kategorie: aritmeticky – 13 žáků, algebraicky – 17 žáků, aritmeticky pomocí společných dělitelů – 109 žáků). Ze souboru bylo vyloučeno 26 žáků, kteří úlohu 4 buď neřešili, či vyřešili pouze částečně.

[41] Hodnota testové statistiky = 6,4519; počet stupňů volnosti = 3; p-hodnota = 0,0916; Cramérův koeficient = 0,2034

[42] Hodnota testové statistiky = 5,2746; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0716; Cramérův koeficient = 0,1839

*Tab. 40 Procento úspěšných žáků podle použité strategie*

| Strategie | Úspěch |
|---|---|
| Aritmeticky | 30,77 % |
| Algebraicky | 35,29 % |
| Aritmeticky pomocí společných dělitelů | 98,17 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H19_0$:** *Úspěšnost v U4 nezávisí na strategii.*

**$H19_1$:** *Úspěšnost v U4 závisí na strategii.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[43] (p-hodnota: 0,0000; Cramérův koeficient = 0,7313).

Závislost mezi úspěchem v úloze 4 a metodou **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. Naprostá většina žáků, kteří zvolili aritmetickou metodu s využitím společných dělitelů, byla v řešení úspěšná. Žáci, kteří zvolili algebraickou metodu nebo jinou aritmetickou metodu, v přibližně 65 % selhali.

**5. Závislost volby strategie na nadání:**

Strategie řešení: 4 varianty – aritmeticky, aritmeticky společný dělitel, algebraicky, neřešeno.

**$H20_0$:** *Volba strategie při řešení U4 nezávisí na nadání.*

**$H20_1$:** *Volba strategie při řešení U4 závisí na nadání.*

*Tab. 41 Kontingenční tabulka simultánních četností a sloupcově podmíněných relativních četností*

| | Kontingenční tabulka | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Strategie U4 | **Bez nadání** | **Všeob. nadání** | **Mat. nadání** | **Řádk. součty** |
| Četnost | **Neřešeno** | 8 | 6 | 3 | 17 |
| Sloupc. četn. | | 9,76 % | 10,91 % | 10,71 % | |
| Četnost | **Aritmeticky spol. děl.** | 66 | 36 | 12 | 114 |
| Sloupc. četn. | | 80,49 % | 65,45 % | 42,86 % | |
| Četnost | **Algebraicky** | 1 | 5 | 13 | 19 |
| Sloupc. četn. | | 1,22 % | 9,09 % | 46,43 % | |
| Četnost | **Aritmeticky** | 7 | 8 | 0 | 15 |
| Sloupc. četn. | | 8,54 % | 14,55 % | 0,00 % | |
| Četnost | **Vš. skup.** | 82 | 55 | 28 | 165 |

[43] Hodnota testové statistiky = 74,3348; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0000; Cramérův koeficient = 0,7313

Pearsonův chí-kvadrát test nezávislosti **zamítá nulovou hypotézu**[44] na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota = 0,0000).

Z kontingenční tabulky (Tab. 41) je patrné, že nenadaní žáci a všeobecně nadaní žáci nejčastěji volili aritmetickou strategii, matematicky nadaní žáci nejčastěji volili algebraickou strategii řešení.

**Shrnutí výsledků U4**

Úlohu 4 dokázalo **správně řešit** 117 žáků, tj. **71 % žáků**. Předpokladem úspěchu nebyl ani tak ročník nebo nadání, ale spíš volba strategie. Pokud žáci zvolili způsob řešení založený na hledání společných dělitelů, byli téměř vždy úspěšní. Pokud žáci zvolili algebraickou strategii, mnohdy selhali. Přitom algebraickou strategii volili nejčastěji matematicky nadaní žáci.

## Zkoumání závislosti úspěchu v U5 na různých faktorech

**1. Typ školy:**

(3 kategorie: ZŠ – 68 žáků, mat. ZŠ a gymnázium – 10 žáků, mat. gymnázium – 46 žáků). Kvůli možnosti porovnání s výsledky pro úlohy 1–4 bylo vyloučeno 41 žáků, kteří úlohu 5 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 42 Procento úspěšných žáků podle jednotlivých typů škol*

| Typ školy | Úspěch |
|---|---|
| ZŠ | 30,88 % |
| Mat. ZŠ a gymnázium | 70,00 % |
| Mat. gymnázium | 15,22 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H21_0$:** *Úspěšnost v U5 nezávisí na typu školy* (3 kategorie).

**$H21_1$:** *Úspěšnost v U5 závisí na typu školy* (3 kategorie).

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[45] (p-hodnota: 0,0018; Cramérův koeficient = 0,32).

Závislost mezi úspěchem v úloze 5 a typem školy **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. V úloze excelovali žáci matematické základní školy a všeobecného gymnázia. Žáci z matematického gymnázia dosáhli nejslabšího výsledku.

[44] Testová statistika Pearsonova chí-kvadrát testu nezávislosti: 46,3248; počet stupňů volnosti: 6; příslušná p-hodnota = 0,0000

[45] Hodnota testové statistiky = 12,6931; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,0018; Cramérův koeficient = 0,32

Dále uvidíme, že tento fakt může souviset s preferovanou strategií. Stejně jako v případě U4 se jednalo o školsky netypickou úlohu, na niž nejsou žáci na žádném typu školy trénováni.

**2. Ročník:**

(4 kategorie: 6. ročník – 32 žáků, 7. ročník – 20 žáků, 8. ročník – 14 žáků, 9. ročník – 58 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 41 žáků, kteří úlohu 5 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 43 Procento úspěšných žáků v jednotlivých ročnících*

| **Ročník** | **Úspěch** |
|---|---|
| 6. | 3,13 % |
| 7. | 30,00 % |
| 8. | 42,86 % |
| 9. | 37,93 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H22_0$:** *Úspěšnost v U5 nezávisí na ročníku.*

**$H22_1$:** *Úspěšnost v U5 závisí na ročníku.*

Chí-kvadrát test nezávislosti zamítá nulovou hypotézu[46] (p-hodnota: 0,0027; Cramérův koeficient = 0,3379).

Závislost mezi úspěchem v úloze 5 a ročníkem **je prokazatelná** na hladině významnosti 0,05. U žáků 6. ročníku se jako nepřekonatelný problém ukázaly operace se zlomky, které ještě nemají dostatečně probrané.

**3. Nadání:**

(3 kategorie: bez nadání – 57 žáků, všeob. nadání – 43 žáků, mat. nadání – 24 žáků). Kvůli splnění podmínek dobré aproximace bylo vyloučeno 41 žáků, kteří úlohu 5 vyřešili pouze částečně.

*Tab. 44 Procento úspěšných žáků podle nadání*

| **Nadání** | **Úspěch** |
|---|---|
| Bez nadání | 29,82 % |
| Všeob. nadání | 23,26 % |
| Mat. nadání | 33,33 % |

[46] Hodnota testové statistiky = 14,1591; počet stupňů volnosti = 3; p-hodnota = 0,0027; Cramérův koeficient = 0,3379

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H23_0$:** *Úspěšnost v U5 nezávisí na nadání.*

**$H23_1$:** *Úspěšnost v U5 závisí na nadání.*

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[47] (p-hodnota: 0,636).

Závislost mezi úspěchem v úloze 5 a nadáním **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05.

**4. Strategie řešení:**

(3 kategorie: aritmeticky – 30 žáků, algebraicky – 18 žáků, odhadem – 26 žáků). Ze souboru bylo vyloučeno 91 žáků, kteří úlohu 5 neřešili vůbec či vyřešili pouze částečně.

*Tab. 45 Procento úspěšných žáků podle zvolené strategie*

| Strategie | Úspěch |
|---|---|
| Aritmeticky | 46,67 % |
| Algebraicky | 66,67 % |
| Odhadem | 34,62 % |

Testování hypotézy o nezávislosti

**$H24_0$:** *Úspěšnost v U5 nezávisí na strategii.*

**$H24_1$:** *Úspěšnost v U5 závisí na strategii.*

Chí-kvadrát test nezávislosti nezamítá nulovou hypotézu[48] (p-hodnota: 0,1113).

Závislost mezi úspěchem v úloze 5 a strategií **není prokazatelná** na hladině významnosti 0,05.

**5. Závislost volby strategie na nadání:**

Strategie řešení: 4 varianty – aritmeticky, algebraicky, odhadem, neřešeno (sloučeny varianty špatná úvaha, špatně přečtené zadání, neřešeno).

**$H25_0$:** *Volba strategie při řešení U5 nezávisí na nadání.*

**$H25_1$:** *Volba strategie při řešení U5 závisí na nadání.*

[47] Hodnota testové statistiky = 0,9052; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,636; Cramérův koeficient = 0,0854

[48] Hodnota testové statistiky = 4,3915; počet stupňů volnosti = 2; p-hodnota = 0,1113; Cramérův koeficient = 0,2436

*Tab. 46 Kontingenční tabulka simultánních četností a sloupcově podmíněných relativních četností*

| | Kontingenční tabulka | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Strategie U5 upravené | **Bez nadání** | **Všeob. nadání** | **Mat. nadání** | **Řádk. součty** |
| Četnost | **Aritmeticky** | 24 | 15 | 7 | 46 |
| Sloupc. četn. | | 29,27 % | 27,27 % | 25,00 % | |
| Četnost | **Algebraicky** | 7 | 5 | 12 | 24 |
| Sloupc. četn. | | 8,54 % | 9,09 % | 42,86 % | |
| Četnost | **Odhadem** | 31 | 13 | 0 | 44 |
| Sloupc. četn. | | 37,80 % | 23,64 % | 0,00 % | |
| Četnost | **Neřešeno** | 20 | 22 | 9 | 51 |
| Sloupc. četn. | | 24,39 % | 40,00 % | 32,14 % | |
| Četnost | **Vš. skup.** | 82 | 55 | 28 | 165 |

Pearsonův chí-kvadrát test nezávislosti **zamítá nulovou hypotézu**[49] na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota = 0,00001).

Matematicky nadaní žáci byli jedinou skupinou žáků, která u této úlohy volila převážně algebraickou strategii. Mnoho matematicky nadaných žáků však úlohu také nechalo zcela bez řešení.

**Shrnutí výsledků U5**

Úlohu 5 dokázalo **správně vyřešit** 35 žáků, tj. **21 % žáků**. Dalších 41 % žáků úlohu vyřešilo částečně, což nejčastěji znamenalo, že dokázali určit délku strany nejmenšího čtverce. Úloha byla pro žáky velmi náročná ze dvou důvodů. V prvé řadě se jim špatně hledaly vztahy mezi jednotlivými délkami. Dále byl pro mnoho žáků velkým problémem výskyt zlomků. Úloha byla ze všech nejnáročnější. Větší úspěšnost měli žáci, kteří použili algebraickou strategii řešení.

Algebraickou strategii řešení nejčastěji volili matematicky nadaní žáci. Tato skupina byla v řešení nejúspěšnější, ale nijak výrazně.

### – 4 – 7 – 3 Provádění zkoušek správnosti

Většina žáků zkoušky vůbec neprováděla, jak je patrné z Tab. 47. Žáci v rozhovorech často uváděli, že vyučující zkoušky také nedělá, nevyžaduje to po nich. Objevovaly se však i tyto odpovědi: „Paní učitelka po nás chce, abychom dělali zkoušky. Ale já

[49] Testová statistika Pearsonova chí-kvadrát testu nezávislosti: 32,8203; počet stupňů volnosti: 6; příslušná p-hodnota = 0,00001

nechci, bojím se je dělat, protože většinou v nich udělám chybu, a to mě úplně rozhodí.“ Nebo: „Zkoušku nedělám, zbytečně mě zdržuje. Když mi to vyjde pěkně, zkoušku prostě nedělám.“ „Pěkný“ výsledek je pro žáky celé číslo, neboť s celým číslem ve výsledku je koncipována většina úloh řešených na základní škole.

Část žáků v rozhovoru uvedla, že zkoušku provádí u některých úloh pouze v duchu. Z testu to tedy patrné nebylo.

*Tab. 47 Provádění zkoušky*

| | **Tabulka četností: Zkoušky** | |
|---|---|---|
| Kategorie | Četnost | Relativní četnost (%) |
| Neprovedena | 106 | 64,2 |
| V duchu | 31 | 18,8 |
| Provedena | 28 | 17,0 |

## – 4 – 7 – 4 Shrnutí výsledků

Získané výsledky pro jednotlivé úlohy uvedu souhrnně v jedné tabulce. V Tab. 48 vidíme, že u každé úlohy se projevily jiné závislosti mezi sledovanými kategoriemi. Jako nejméně vhodná pro testování nadání se jeví **úloha 2**, u níž úspěšnost závisela pouze na ročníku. V tomto případě můžeme zřejmě sledovat souvislost s vybaveností matematickým aparátem u žáků jednotlivých ročníků. Úloha byla pro žáky jednoduchá a v testu plnila motivační roli. Jako relevantní z hlediska testování nadání se jeví **úloha 1**, u níž se potvrdily všechny hypotézy. Umožňovala žákům použít strategii aritmetickou, experimentální i algebraickou. Mnoho žáků, zejména vyšších ročníků, zvolilo algebraickou strategii. Vzhledem k tomu, že vznikla jednoduchá a školsky typická soustava rovnic, žáci ji většinou byli schopni řešit bez chyby. Úspěšnost v **úloze 3** závisela na ročníku, nadání a velmi silná závislost se objevila u zvolené strategie řešení. Tato úloha je specifická tím, že žák buď zná tento typ úloh (tyto úlohy se např. často vyskytují v matematických soutěžích) a pak celkem mechanicky použije algebraický postup, nebo se s tímto typem úlohy nesetkal a pak nejčastěji volí experiment, pokud se o řešení vůbec pokusí. Nalezení algebraických vztahů je totiž pro nezkušeného řešitele náročné. Z tohoto důvodu byli nejúspěšnější ti žáci, kteří postupovali experimentálně. Zajímavé výsledky jsem obdržela u **úlohy 4**, u níž úspěšnost velmi silně závisela na volbě strategie. Nejúspěšnější byli žáci, kteří zvolili aritmetickou strategii založenou na hledání společných dělitelů. Selhávali žáci 9. ročníku, kteří postupovali algebraicky. Vzniklá soustava rovnic totiž není školsky typická. Algebraický postup nejčastěji volili matematicky nadaní žáci a žáci matematického gymnázia. **Úloha 5** byla pro žáky velmi náročná. Prokázala se u ní závislost úspěšnosti na ročníku, avšak zejména z toho důvodu, že v úloze se objevují operace se zlomky, které zatím žáci 6. ročníku nemají probrané. Dále se prokázala závislost na typu školy, nejúspěšnější byli žáci všeobecného gymnázia.

*Tab. 48 Souhrnné výsledky pro zkoumané závislosti*

| **Faktor** | Úloha | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Typ školy** | p = 0,0034 | p = 0,6653 | p = 0,9613 | p = 0,0028 | p = 0,0018 |
| | V = 0,2725 | V = 0,0705 | V = 00221 | V = 0,2749 | V = 0,3200 |
| **Ročník** | p = 0,0023 | p = 0,0009 | p = 0,0001 | p = 0,0916 | p = 0,0027 |
| | V = 0,3033 | V = 0,3167 | V = 0,3621 | V = 0,2034 | V = 0,3379 |
| **Nadání** | p = 0,0041 | p = 0,1960 | p = 0,0025 | p = 0,0716 | p = 0,6360 |
| | V = 0,2641 | V = 0,1411 | V = 0,2729 | V = 0,1839 | V = 0,0854 |
| **Strategie řešení** | p = 0,0150 | p = 0,1917 | p = 0,0000 | p = 0,0000 | p = 0,1113 |
| | V = 0,2344 | V = 0,1455 | V = 0,5051 | V = 0,7313 | V = 0,2436 |
| **Úspěšnost** | 71,5 % | 85,5 % | 41,2 % | 70,9 % | 21,2 % |

**Legenda:**

p … p-hodnota testu nezávislosti

V … Cramérův koeficient (nabývá hodnot mezi 0 a 1, čím je bližší 1, tím je silnější závislost mezi dvěma sledovanými proměnnými)

Zvýrazněná políčka jsou u těch faktorů, kde se na hladině významnosti 0,05 prokázala závislost s úspěšností řešení příslušné úlohy.

Algebraické postupy byly pro žáky výhodné v úloze 1, kdy bylo poměrně jednoduché sestavit soustavu rovnic a také řešení soustavy bylo jednoduché. V dalších případech bylo použití algebraické metody pro žáky spíše kontraproduktivní. Algebraický postup je pro mnoho žáků mechanická záležitost. Žáci jsou mnohdy schopni osvojit si algebraické postupy u typizovaných úloh, které se probírají ve škole. Postup přitom ovládají krok po kroku, aniž by si uvědomovali vztahy mezi neznámými. To se projeví u úloh, které nejsou školsky typické a u nichž žák nedokáže využít mechanicky naučený postup.

### Úspěšnost kategorií sledovaných faktorů v jednotlivých úlohách

V Tab. 49 můžeme porovnat, která kategorie byla u jednotlivých úloh a faktorů nejúspěšnější. U nejúspěšnější kategorie je vždy uveden také procentuální výsledek úspěšnosti. Například v případě nadání vidíme, že nejčastěji byli nejúspěšnější matematicky nadaní žáci, i když ve většině případů ne tak výrazně, jak bychom očekávali. Z ročníků měly největší úspěšnost 8. a 9. ročník, což je způsobeno větší vybaveností matematickým aparátem a větší zkušeností. Přestože se jednalo o algebraické úlohy, nebyly algebraické strategie zdaleka u všech úloh ty nejspolehlivější. Z toho bychom se měli ve výuce matematiky ponaučit a mít na mysli, že je s žáky potřeba projít všechny stupně řešení úloh, od experimentálních přes aritmetické až po algebraické. I poté, co žáci dostanou k dispozici algebraickou strategii, by měli být stále vedeni k používání celého spektra strategií, protože někdy mohou být pro žáky výhodnější ty strategie, které vnímáme jako méně sofistikované.

*Tab. 49 Úspěšnost kategorií sledovaných faktorů v jednotlivých úlohách*

| **Faktor** | Úloha 1 | Úloha 2 | Úloha 3 | Úloha 4 | Úloha 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Typ školy** | Mat. gym., 90,91 % | Mat. gym., 89,09 % | Gym., 50,00 % | Mat. ZŠ, 100 % | Gym., 62,50 % |
| **Ročník** | 9. ročník, 83,08 % | 8. ročník, 94,74 % | 9. ročník, 58,46 % | 8. ročník, 84,21 % | 9. ročník, 33,85 % |
| **Nadání** | Mat. nadání, 85,71 % | Mat. nadání, 96,43 % | Mat. nadání, 67,86 % | Bez nadání, 79,27 % | Mat. nadání, 28,57 % |
| **Strategie** | Algebraicky, 82,86 % | Experimentem, 95,35 % | Experimentem, 67,86 % | Ar. SD, 93,86 % | Algebraicky, 50,00 % |

# – 4 – 8 KVALITATIVNÍ ANALÝZA VÝSLEDKŮ

V tomto oddíle se budu zabývat kvalitativní analýzou přístupů žáků jednotlivých ročníků k řešení u jednotlivých úloh.

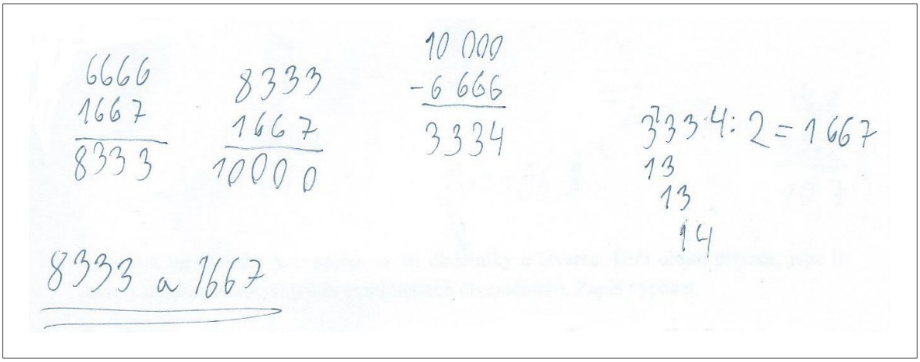
## – 4 – 8 – 1 Postupy volené žáky u jednotlivých úloh

### Postupy volené žáky v U1

*Tab. 50 Úspěšnost žáků v U1 vzhledem k ročníku a volené strategii*

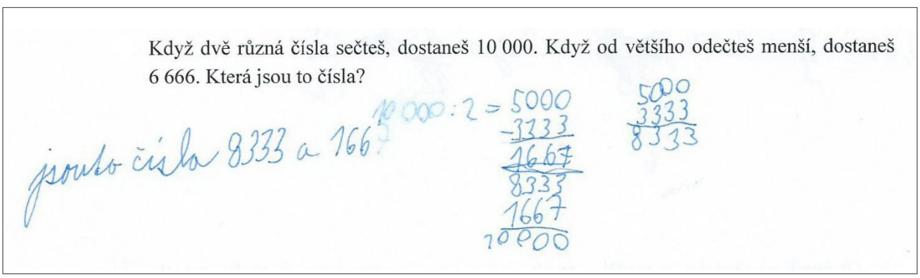
| | **6. ročník** | | **7. ročník** | | **8. ročník** | | **9. ročník** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1 – vyřešil<br>0 – nevyřešil** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **Experimentálně** | 4 | 0 | 5 | 4 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| **Aritmeticky pamětně** | 0 | 4 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **Aritmeticky** | 26 | 9 | 9 | 7 | 8 | 1 | 4 | 4 |
| **Aritmeticky s grafickým znázorněním** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Algebraicky** | 4 | 1 | 0 | 2 | 6 | 3 | 48 | 6 |
| **Nepochopeno zadání** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Neřešeno** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **Celkem** | **35** | **15** | **14** | **17** | **15** | **4** | **56** | **11** |

U žáků 6. ročníku se nejčastěji objevila aritmetická metoda, jako je tomu na Obr. 68. Žák postupoval aritmeticky, a to tak, že od 10 000 odečetl 6 666, výsledek vydělil dvěma, a tím získal menší z čísel. Druhé z čísel získal sečtením tohoto výsledku a čísla 6 666. V uvedeném případě žák provedl také zkoušku jednoho ze zadaných údajů, a to součet výsledků, který má činit 10 000. Přepokládám, že za zkoušku druhého z údajů považoval součet 6 666 + 1 667. Provádění zkoušek byla výjimka, naprostá většina žáků zkoušky neprováděla.



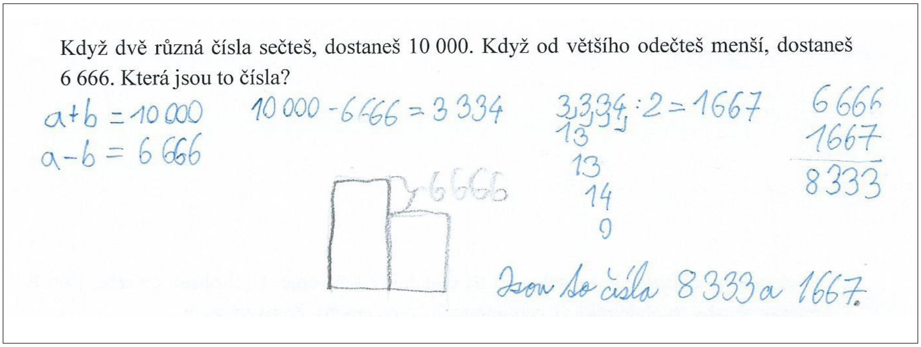

*Obr. 68 Nejčastěji použitá aritmetická strategie.*
*Bystrý žák, 6. ročník, MZŠ (žák 71)*

Ojediněle jsem se setkala také s poněkud odlišným způsobem uvažování, jak je vidět na Obr. 69. Žák uvažoval tak, že polovina z 10 000 je 5 000 a polovina z 6 666 je 3 333. Když tedy jednou k 5 000 přičteme 3 333 a podruhé od čísla 5 000 odečteme 3 333, dostaneme hledaná čísla. Zde můžeme sledovat neúhledný a neurovnaný zápis, úvahy nejsou postupně zapisovány, spíše je nahodile zachycován tok myšlenek. V rámci jednoho sloupce je provedena část výpočtu a také část zkoušky.



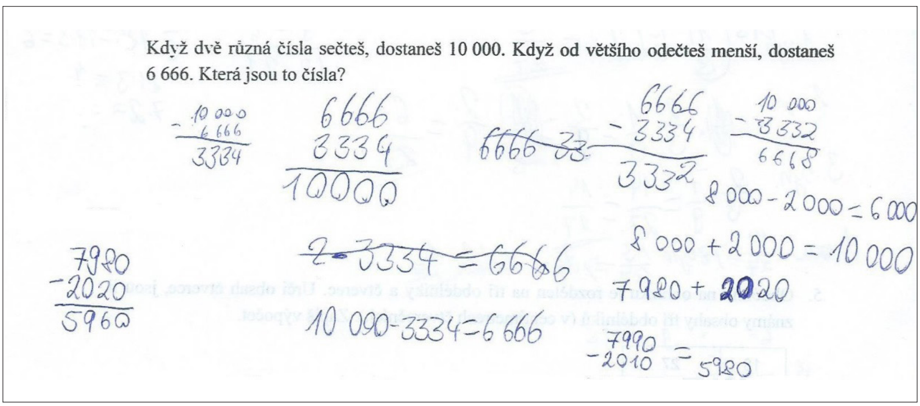

*Obr. 69 Neobvyklý aritmetický postup.*
*Všeobecně nadaný žák, nediagnostikovaný, 6. ročník, MG (žák 120)*

Pouze v jednom případě byla aritmetická představa podpořena grafickým znázorněním (Obr. 70). Žák začíná algebraickým zápisem, avšak pokračuje aritmeticky.



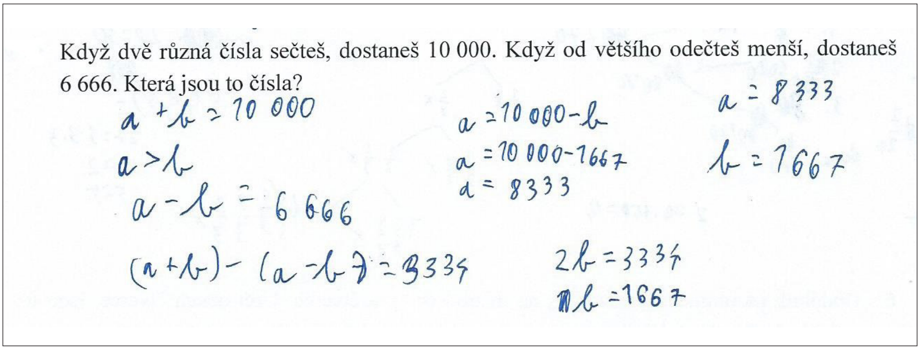

*Obr. 70 Aritmetické řešení podpořené grafickým znázorněním.*
*Bystrý žák, 6. ročník, MG (žák 121)*

Žáci 6. ročníku v několika případech využili také experimentální metodu řešení. Tato metoda se však obvykle bohužel vyznačovala velkou nahodilostí, jak je také vidět na Obr. 71. Žák na něm nejdříve zkoušel vyjít ze zadaných čísel a prováděl s nimi různé operace. Pokusy však nevedly k cíli. Po určité době se rozhodl experimentovat. Začal čísly 8 000 a 2 000. Rozdíl těchto čísel neodpovídal požadavku, začal tedy čísla měnit. Vydal se ale nesprávným směrem, číslo 8 000 zmenšoval a číslo 2 000 zvětšoval. Nakonec úlohu ponechal nevyřešenou.




*Obr. 71 Pokus o experimentální řešení.*
*Bystrý žák, 6. ročník, G (žák 60)*

U žáků 6. ročníku jsem se setkala také s korektním algebraickým řešením, jak vidíme na Obr. 72. Je však poznat, že žák nemá zatím osvojen postup řešení soustavy rovnic, který se vyučuje na základní škole. Žák nejdříve odečetl rozdíl od součtu, odtud určil hodnotu *b*. Poté ze součtu vyjádřil neznámou *a* a po dosazení *b* získal výsledek.

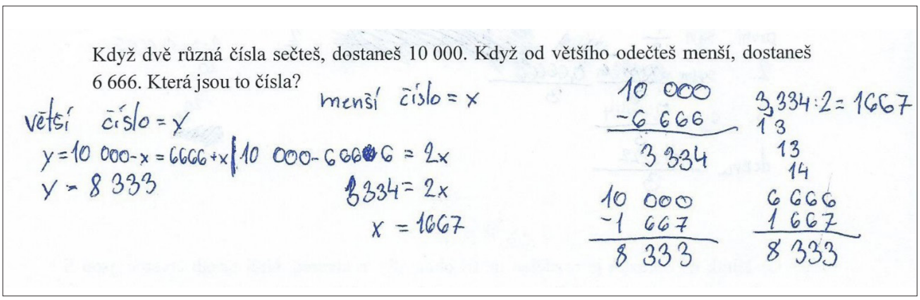


Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

$a + b = 10\,000$
$a > b$
$a - b = 6\,666$
$(a+b) - (a-b) = 3334$
$2b = 3334$
$b = 1667$
$a = 10\,000 - b$
$a = 10\,000 - 1667$
$a = 8333$
$a = 8333$
$b = 1667$

*Obr. 72 Algebraické řešení.*
*Všeobecně nadaný žák, nediagnostikovaný, 6. ročník, MG (žák 112)*

Také na Obr. 73 můžeme sledovat algebraické řešení nadané žákyně 6. ročníku. Ta vycházela z myšlenky, že pro jedno z čísel platí, že je rovno 10 000 – *x* a současně 6 666 + *x*.



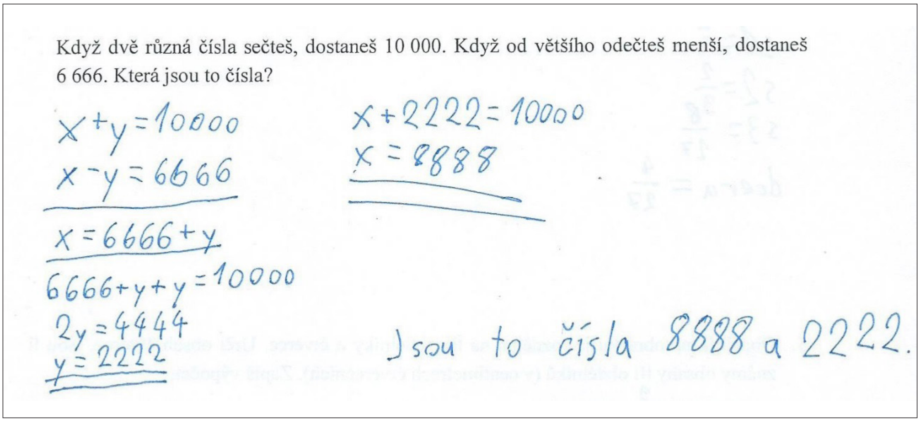
Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

větší číslo = y
menší číslo = x
$y = 10\,000 - x = 6666 + x$ | $10\,000 - 6666 = 2x$
$3334 = 2x$
$x = 1667$
$y = 8\,333$

$10\,000 - 6\,666 = 3\,334$
$3334 : 2 = 1667$
$10\,000 - 1\,667 = 8\,333$
$6\,666 + 1\,667 = 8\,333$

*Obr. 73 Algebraický postup.*
*Všeobecně nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 6. ročník, MG (žák 119)*

Řešení žáků 7. ročníku byla obdobná jako u žáků 6. ročníku. Na Obr. 74 vidíme algebraické řešení žáka s nesprávným aritmetickým výpočtem a nesprávným výsledkem. Jelikož nebyla provedena zkouška, chyba nebyla odhalena. Je ale nutno podotknout, že v tomto případě se jedná o chybu, která by s nejvyšší pravděpodobností byla zopakována i ve zkoušce.



Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

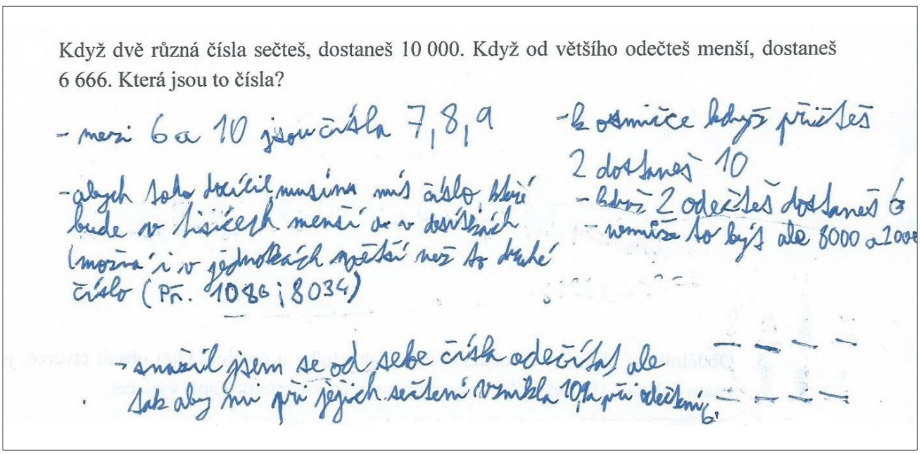
$x + y = 10000$
$x - y = 6666$
$x = 6666 + y$
$6666 + y + y = 10000$
$2y = 4444$
$y = 2222$

$x + 2222 = 10000$
$x = 8888$

Jsou to čísla 8888 a 2222.

*Obr. 74 Algebraické řešení s numerickou chybou.*
*Matematicky nadaný žák, nediagnostikovaný, 7. ročník, ZŠ (žák 19)*

Žák se na Obr. 75 snažil využít logickou úvahu a chtěl použít analogii s chováním čísel nižších řádů. Bohužel myšlenku nedokázal dovést do konce. V rozhovoru žák uvedl, že je pravidelným řešitelem Matematické olympiády. V této matematické soutěži je od žáků vyžadováno, aby popisovali postup řešení. Je tedy vidět, že tento požadavek měl na žáka vliv a přesahoval i do běžných hodin matematiky.

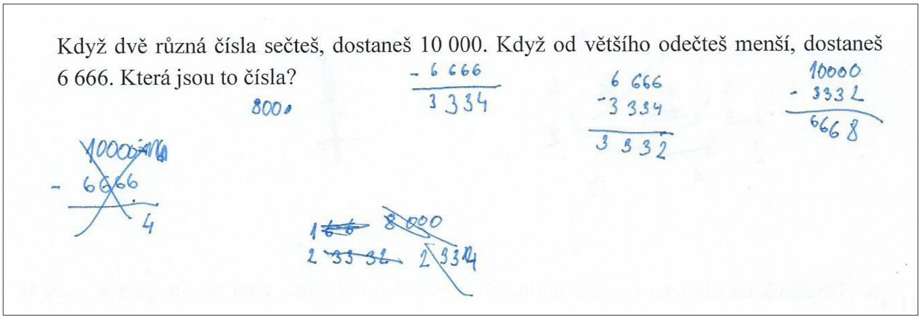


Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

- mezi 6 a 10 jsou čísla 7, 8, 9
- abych toho docílil musím mít číslo které bude v tisících menší a v desítkách (možná i v jednotkách) větší než to druhé číslo (Př. 1086; 8034)
- k osmičce když přičteš 2 dostaneš 10
- když 2 odečteš dostaneš 6
- nemůže to být ale 8000 a 2000
- snažil jsem se od sebe čísla odečítat ale tak aby mi při jejich sečtení vznikla 10 a při odečtení 6.

*Obr. 75 Pokus o řešení analogií s čísly nižších řádů.*
*Jedničkář, 7. ročník, ZŠ, řešitel Matematické olympiády (žák 22)*

Někteří žáci hledali různé vztahy mezi čísly, ale nedokázali najít žádný, který by je přivedl k řešení, jak vidíme na Obr. 76.


Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

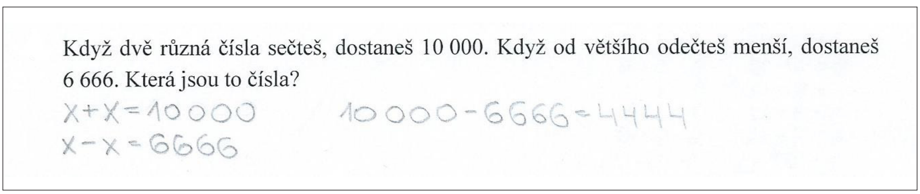


*Obr. 76 Neúspěšný pokus o řešení. Jedničkář, 7. ročník, ZŠ (žák 63)*

V 8. ročníku úlohu vyřešilo správně 15 žáků, převažovala aritmetická strategie. Úlohu nedokázali vyřešit 4 žáci.

Oproti nižším ročníkům zcela chyběla experimentální strategie. Aritmetická strategie byla zastoupena v podstatě stejně jako algebraická.

Na Obr. 77 žákyně volila algebraický způsob zápisu, kdy jako neznámou $x$ označila obě hledané hodnoty. To odpovídá prvnímu stupni přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen dle Rogerse a Novotné (2003): Řešitel používá jedno písmeno k označení více neznámých, písmeno je pro něj označení jakékoli obecné neznámé. Jak je patrné z Obr. 77, řešitel pod písmenem mnohdy nevidí kvantitu. Žákyně dále pokračovala aritmeticky, ale s výpočtem si neporadila.

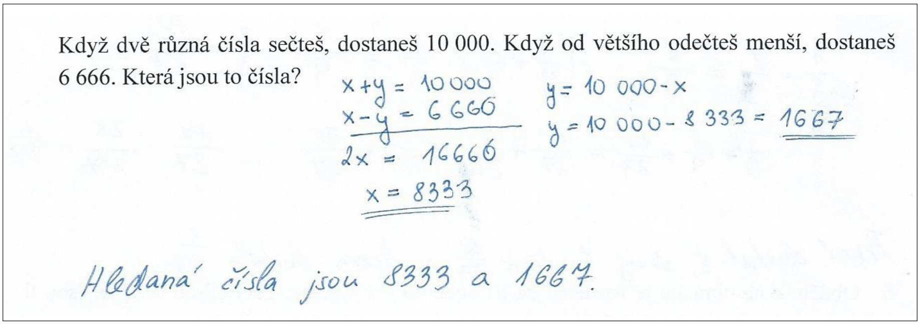

Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?



*Obr. 77 Neúspěšný pokus o algebraické řešení. Jedničkářka, 8. ročník, ZŠ (žák 57)*

V 9. ročníku úlohu správně vyřešilo 54 žáků, nejčastěji algebraickou strategií.

U 9. ročníku již byl u některých žáků patrný mnohem přehlednější způsob zápisu (viz Obr. 78), což je způsobeno tím, že učivo soustav rovnic o více neznámých se probírá v 9. ročníku. Zkoušku žáci stále neprováděli, případně ji provedli jen v duchu.



Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

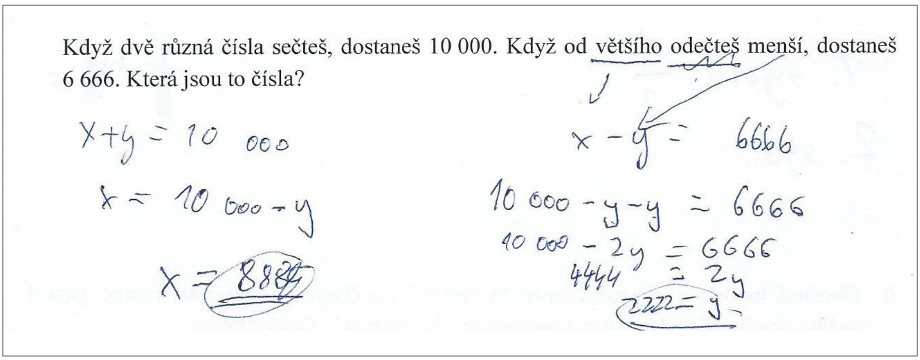
$x + y = 10\,000$
$x - y = 6\,660$
$2x = 16\,660$
$x = 8333$

$y = 10\,000 - x$
$y = 10\,000 - 8\,333 = 1667$

Hledaná čísla jsou 8333 a 1667.

*Obr. 78 Korektně algebraicky vyřešená úloha.*
*Matematicky nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 9. ročník, MG (žák 130)*

I nadále jsem se setkávala s problémy při aritmetických výpočtech, podpořenými tím, že žáci neprováděli zkoušku. Na Obr. 79 se žák dopustil chyb 10 000 – 6 666 = = 4 444 a 10 000 – 2 222 = 8 888. Tento typ chyby by pravděpodobně nebyl odhalen zkouškou.



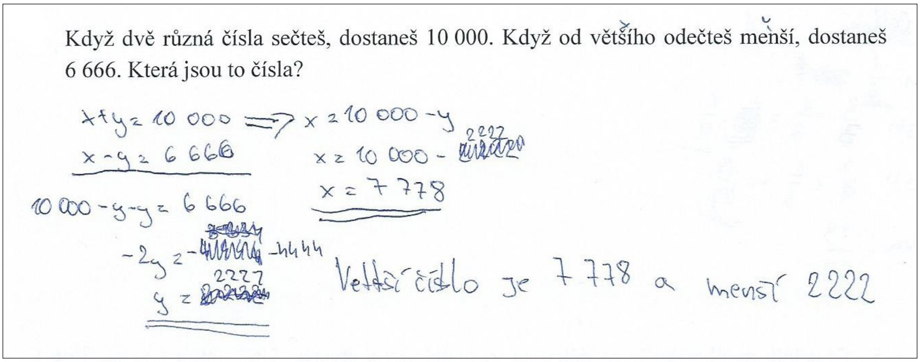
Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

$x + y = 10\,000$
$x = 10\,000 - y$
$x = 8888$

$x - y = 6666$
$10\,000 - y - y = 6666$
$10\,000 - 2y = 6666$
$4444 = 2y$
$2222 = y$

*Obr. 79 Algebraické řešení s numerickou chybou.*
*Všeobecně nadaný žák, nediagnostikovaný, 9. ročník, MG (žák 134)*

Na Obr. 80 žák rovněž udělal chybu 10 000 – 6 666 = 4 444, ale přitom si správně uvědomil, že 10 000 – 2 222 = 7 778.




*Obr. 80 Algebraické řešení s numerickou chybou.*
*Nediagnostikovaný žák, logický typ, 9. ročník, ZŠ (žák 76)*

Nyní se mohu pokusit odpovědět na otázku, proč v U1 byli úspěšní žáci 9. ročníku a nedařilo se žákům 7. ročníku. Když se podíváme do Tab. 50, vidíme, že žáci 9. ročníku nejčastěji používali algebraickou strategii a byli v ní úspěšní. Znalost matematického aparátu jim tedy umožnila zdárné řešení úlohy. Žáci 7. ročníku ve velkém procentu selhávali při aritmetickém, algebraickém i experimentálním postupu. Osobně bych tomu nepřisuzovala význam, který by bylo potřeba zobecnit, jednalo se spíše o shodu náhod.

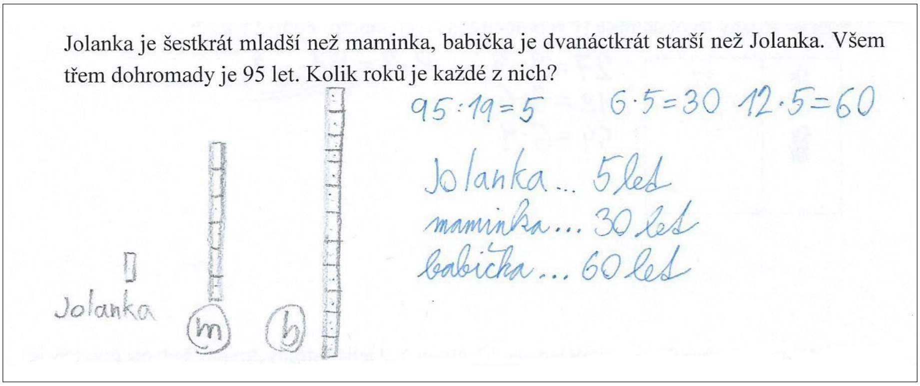
## Postupy volené žáky v U2

*Tab. 51 Úspěšnost žáků v U2 vzhledem k ročníku a volené strategii*

| | **6. ročník** | | **7. ročník** | | **8. ročník** | | **9. ročník** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1 – vyřešil**<br>**0 – nevyřešil** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **Experimentálně** | 21 | 1 | 14 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 |
| **Aritmeticky graficky** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Aritmeticky** | 12 | 3 | 8 | 2 | 5 | 1 | 4 | 0 |
| **Algebraicky** | 1 | 5 | 5 | 0 | 13 | 0 | 51 | 3 |
| **Špatná úvaha** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Neřešeno** | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Celkem** | **35** | **15** | **27** | **4** | **18** | **1** | **61** | **4** |

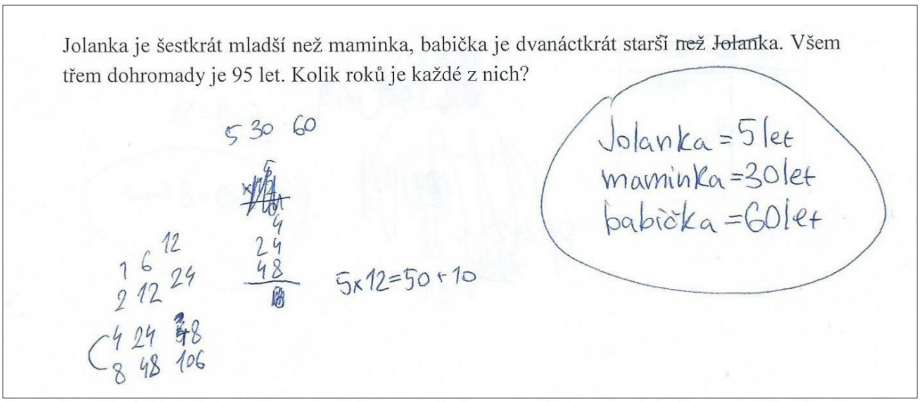
Úlohu správně vyřešilo 35 žáků 6. ročníku a převažovalo experimentální řešení.

Nejčastěji jsem se setkávala s aritmetickým postupem 95 : 19 = 5, 5 · 6 = 30, 5 · 12 = 60. V jednom případě byla tato úvaha opřena o grafické znázornění. To vidíme na Obr. 81.



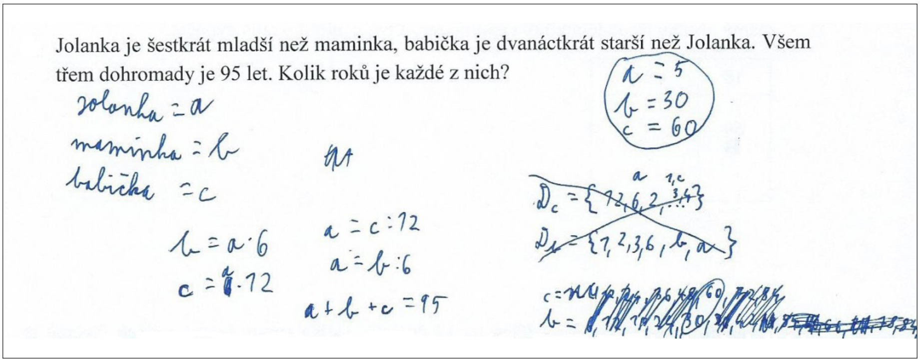

*Obr. 81 Aritmetické řešení s grafickým znázorněním.*
*Bystrý žák, 6. ročník, MG (žák 121)*

Objevilo se také řešení na pomezí aritmetické a experimentální strategie, vycházející z principu metody falešného předpokladu. Žákyně vycházela z poměru 1 : 6 : 12, tento poměr rozšiřovala, až došla k součtu 95. Zajímavé je sledovat, jak žákyně zdvojovala, a když hledaný součet přesáhla, vracela se k nižším hodnotám (Obr. 82).



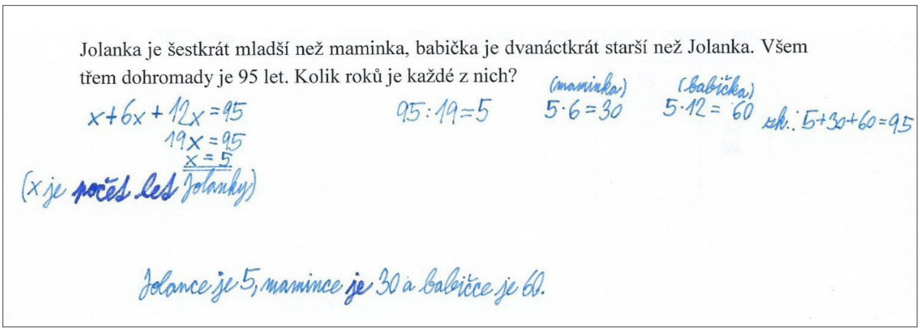

*Obr. 82 Úloha řešená řízeným experimentem.*
*Všeobecně nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 6. ročník, ZŠ (žák 20)*

Velmi častá byla v případě této úlohy experimentální strategie. Žáci si určovali věk Jolanky a poté kontrolovali vztahy, několikrát se stalo, že zvolili věk 5 let hned napoprvé – řekli si, že Jolance by mohlo být tak kolem 5 let. Na Obr. 83 vidíme, jak se žák nejdříve pokusil zapsat algebraicky vztahy, poté se snažil najít nějakou zákonitost a nakonec úlohu vyřešil metodou pokusu a omylu.



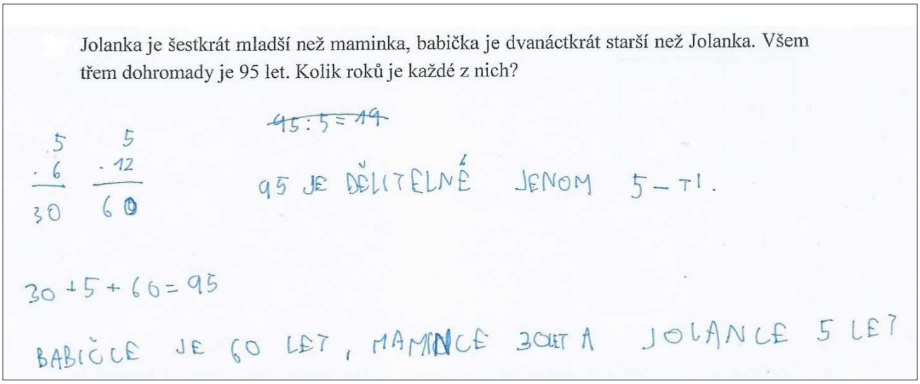

*Obr. 83 Experimentálně vyřešená úloha. Bystrý žák, 6. ročník, MG (žák 112)*

Nezřídka se objevila i algebraická strategie. Na Obr. 84 vidíme správné označení neznámé, sestavení rovnice a její vyřešení matematicky nadaným žákem 6. ročníku. Provedl i zkoušku správnosti – prověřil součet věků a také poměry věků (5 · 6 = 30, 5 · 12 = 60).




*Obr. 84 Úloha vyřešená pomocí jedné rovnice s jednou neznámou. Matematicky nadaný žák, nediagnostikovaný, 6. ročník, MG (žák 122)*

V 7. ročníku úlohu vyřešilo správně 27 žáků, převažovala experimentální strategie. Většinou bohužel bylo experimentování nahodilé nebo postupné, avšak nebylo systematicky zapisováno tak, aby z něj bylo možné rychleji určit výsledek. Jeden žák opřel experimentování o logickou úvahu (číslo 95 je dělitelné pouze pěti – také třinácti, ale toto číslo zjevně není ani jedním z věků) a díky tomu našel okamžitě řešení (Obr. 85).


Jolanka je šestkrát mladší než maminka, babička je dvanáctkrát starší než Jolanka. Všem třem dohromady je 95 let. Kolik roků je každé z nich?

~~95 : 5 = 19~~

$$\begin{array}{r} 5 \\ \cdot\ 6 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \cdot\ 12 \\ \hline 60 \end{array}$$

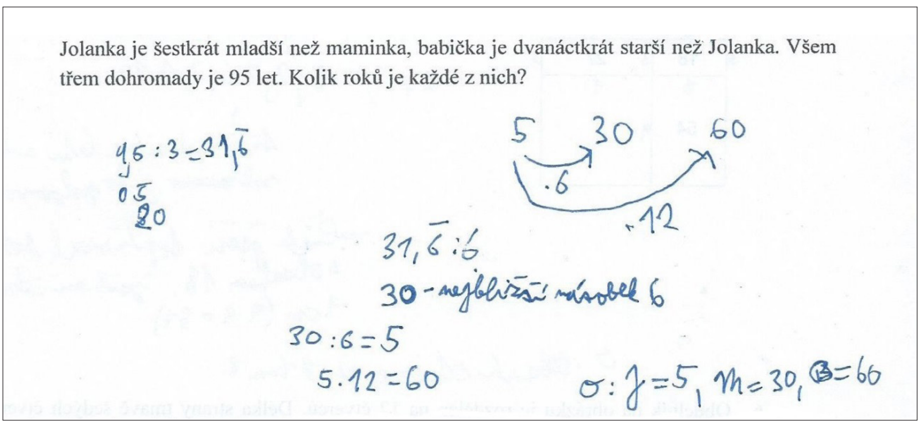
95 JE DĚLITELNÉ JENOM 5-TI.

30 + 5 + 60 = 95

BABIČCE JE 60 LET, MAMINCE 30 LET A JOLANCE 5 LET

*Obr. 85 Úloha řešená neobvyklou logickou úvahou. Bystrý žák, 7. ročník, ZŠ (žák 10)*

V některých případech bylo řešení postaveno na špatné úvaze. Například na Obr. 86 žák určil aritmetický průměr věků všech tří žen a s tímto číslem dále pracoval. Dále pokračoval úvahou, neboť si uvědomil, že hledá celočíselný násobek čísla 6. Aritmetickému průměru nejbližší násobek šesti je číslo 30. Pak už snadno dopočítal ostatní hodnoty. Aritmetický průměr se však nevztahuje ani k jednomu hledanému číslu. Není jasné, co žáka vedlo k použití tohoto postupu, zda to nebyla zkušenost z jiného typu úlohy, která se aritmetickým průměrem řešila ve škole. Řešení je ukázkou případu, kdy nesprávná úvaha pomůže žákovi najít správný výsledek. Při opravování takových řešení musí být učitel obzvláště obezřetný, protože se může snadno stát, že nesprávnou úvahu přehlédne, řešení bude hodnotit jako korektní a žák nedostane zpětnou vazbu. Může se tím i utvrdit v přesvědčení oprávněnosti svého postupu.


Jolanka je šestkrát mladší než maminka, babička je dvanáctkrát starší než Jolanka. Všem třem dohromady je 95 let. Kolik roků je každé z nich?

$95 : 3 = 31,\overline{6}$
05
20

5 $\xrightarrow{\cdot 6}$ 30, 5 $\xrightarrow{\cdot 12}$ 60

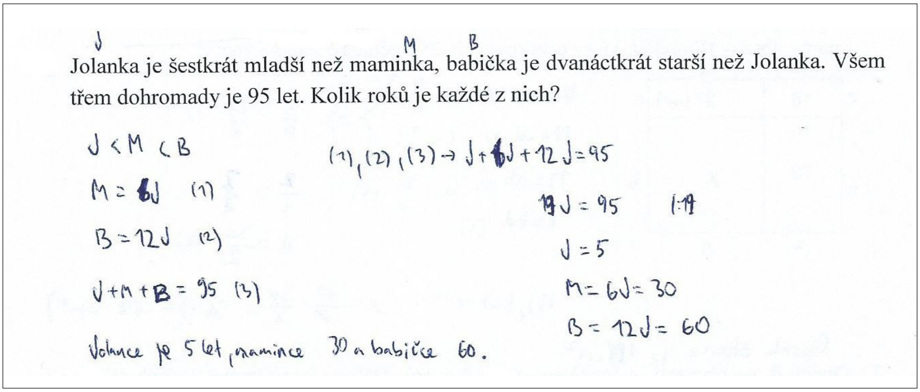
$31,\overline{6} : 6$
30 - nejbližší násobek 6
30 : 6 = 5
5 . 12 = 60
o: J = 5, M = 30, B = 60

*Obr. 86 Úloha řešená nesprávným postupem.*
*Jedničkář, 7. ročník, ZŠ, řešitel Matematické olympiády (žák 22)*

V 8. ročníku úlohu vyřešilo správně 18 žáků, převažovala algebraická strategie.

Rovnice o jedné neznámé se obvykle žáci učí řešit v 8. ročníku. Je patrné, že žáci v případě této jednoduché úlohy ustupovali od experimentální strategie, a naopak přibývá těch, kteří využívali algebraickou strategii. Několik žáků stále dalo přednost aritmetické strategie.

V 9. ročníku úlohu vyřešilo správně 61 žáků, převažovala algebraická strategie. Žáci 9. ročníku nejčastěji volili řešení pomocí jedné rovnice s jednou neznámou nebo také pomocí soustavy rovnic, jak je patrné na Obr. 87. Všimněme si, že žákovi je bližší označení neznámých pomocí prvního písmene slova než standardní značení *x*, *y*, *z*.


J M B

Jolanka je šestkrát mladší než maminka, babička je dvanáctkrát starší než Jolanka. Všem třem dohromady je 95 let. Kolik roků je každé z nich?

J < M < B

M = 6J (1)

B = 12J (2)

J + M + B = 95 (3)

(1), (2), (3) → J + 6J + 12J = 95

19J = 95 | :19

J = 5

M = 6J = 30

B = 12J = 60

Jolance je 5 let, mamince 30 a babičce 60.

*Obr. 87 Úloha řešená soustavou rovnic.*
*Matematicky nadaný žák, nediagnostikovaný, 9. ročník, MG (žák 146)*

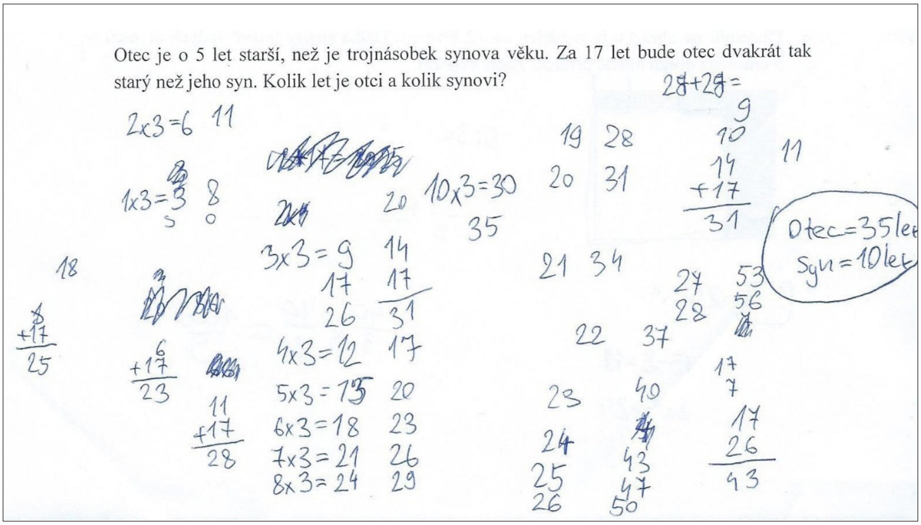
## Postupy volené žáky v U3

*Tab. 52 Úspěšnost žáků v U3 vzhledem k ročníku a volené strategii*

| | 6. ročník | | 7. ročník | | 8. ročník | | 9. ročník | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1 – vyřešil**<br>**0 – nevyřešil** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **Experimentálně** | 8 | 9 | 10 | 6 | 7 | 1 | 9 | 2 |
| **Algebraicky** | 2 | 8 | 1 | 5 | 3 | 7 | 29 | 21 |
| **Neřešeno** | 0 | 23 | 0 | 9 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| **Celkem** | **10** | **40** | **11** | **20** | **10** | **9** | **38** | **27** |

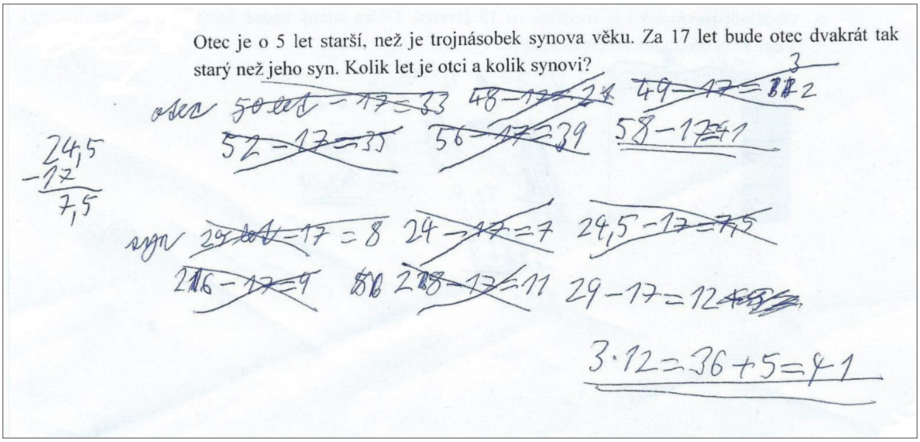
Úlohu správně vyřešilo 10 žáků 6. ročníku, nejčastěji experimentální strategií. 40 žáků úlohu nezvládlo vyřešit, nejčastěji se ani nepokoušeli řešení hledat nebo velmi rychle skončili po několika neúspěšných pokusech. Někteří učitelé se vyjádřili k neúspěšnosti žáků 6. ročníku v této úloze. Jako argument uvedli, že žáci ještě nemají probráno učivo o rovnicích, a proto úlohu nemohli řešit. Je zřejmé, že v souvislosti s úlohou o nealgebraickém způsobu řešení vůbec neuvažovali.

Vzhledem k tomu, že se jedná o úlohu s náročnými vztahy a také dvěma časovými hladinami, je pochopitelné, že žáci 6. ročníku nejčastěji volili experimentální strategii. Bohužel, experimentování často nebylo řízené, a z tohoto důvodu mnoho žáků řešení nenašlo nebo určilo špatné hodnoty, jak je vidět na Obr. 88. Opět je nutné zopakovat, že absence zkoušky způsobila, že chyba nebyla odhalena.



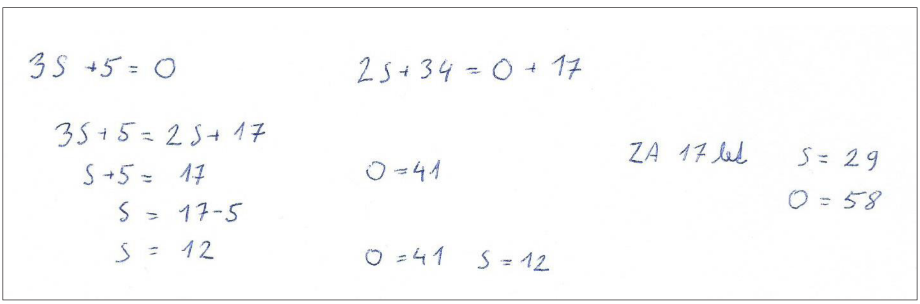

*Obr. 88 Úloha řešená neřízeným experimentem.*
*Všeobecně nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 6. ročník, ZŠ (žák 20)*

Za částečně řízený experiment lze považovat řešení na Obr. 89. Žák začal určitým věkem otce za 17 let (50 let) a dopočítal věk syna za 17 let (25 let). U obou odečetl 17 let a pro výsledné hodnoty pamětně kontroloval vztah $o = 3s + 5$. Nejdříve snížil věk otce, poté jej začal zvyšovat, u hodnoty $o = 49$ pochopil, že věk otce za 17 let nemůže být liché číslo, a liché číslo již nezkoušel. Dopočítal se správných hodnot, ale odpověď nezapsal.




*Obr. 89 Částečně řízený experiment.*
*Bystrý žák, 6. ročník, ZŠ, řešitel MO (žák 21)*

Dva žáci 6. ročníku dokázali úlohu korektně algebraicky vyřešit. Oba byli nadaní (jeden žák matematicky a jedna žákyně všeobecně). Na Obr. 90 vidíme řešení žákyně 6. ročníku pomocí soustavy rovnic. V rozhovoru uvedla, že s rovnicemi se už někde setkala (nedokázala přesně uvést kdy a jak), ale systematicky je s ní nikdo neprobíral. Tomu odpovídá zápis, který není z hlediska řešení soustavy rovnic zcela korektní. Přesto je výpočet bezchybný. Osobně se přikláním k variantě, že se jedná o řešení na pomezí aritmetické úvahy a algebry, kdy žákyně zapisuje zkráceně vztahy mezi veličinami (sestavení jedné rovnice ze dvou původních rovnic), ale poté již postupuje algebraicky. Všimněme si, že výsledek není příliš zvýrazněn.



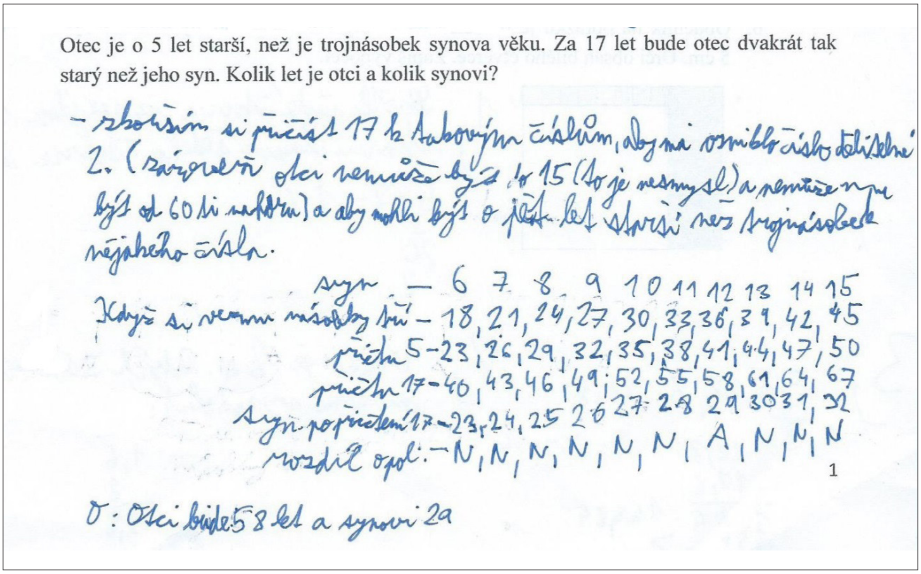

*Obr. 90 Algebraické řešení úlohy.*
*Všeobecně nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 6. ročník, MG (žák 107)*

Lze si všimnout, že v případě U3 nebyla použita aritmetická strategie. To je pochopitelné vzhledem ke komplikovanosti vztahů. Opravdu je daleko jednodušší označit neznámé a vytvořit rovnice nežli se pokoušet hledat vztahy na základě úvahy. Aritmetická strategie nebyla využita ani u vyšších ročníků.

V 7. ročníku úlohu vyřešilo správně 11 žáků, nejčastěji experimentální strategií. 20 žáků úlohu nezvládlo vyřešit.

V 7. ročníku stále převládala experimentální strategie, častěji neřízená. V některých školách se žáci seznamují s rovnicemi již v 7. ročníku, avšak zatím nedošlo ke krystalizaci, a učivo je tudíž špatně využitelné. Žáci, kteří se o algebraické řešení pokusili, vesměs selhali.

Originální řešení je uvedeno na Obr. 91, kde se žák pohybuje na pomezí logických úvah a řízeného experimentu. Odpověď nicméně neudává správně, protože dotaz byl na věk otce a syna „nyní“.



Otec je o 5 let starší, než je trojnásobek synova věku. Za 17 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

– zkusím si přičíst 17 k takovým číslům, aby mi vyšlo číslo dělitelné 2. (zároveň otci nemůže být do 15 (to je nesmysl) a nemůže mu být od 60 a nahoru) a aby mohli být o pět let starší než trojnásobek nějakého čísla.

syn – 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Když si vezmu násobky tří – 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45

přičtu 5 – 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50

přičtu 17 – 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67

syn po přičtení 17 – 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

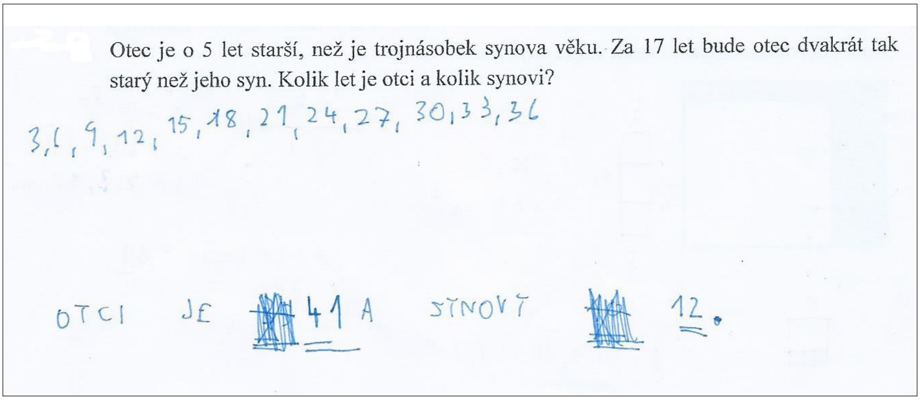
rozdíl opl: – N, N, N, N, N, N, A, N, N, N

1

O: Otci bude 58 let a synovi 29

*Obr. 91 Experimentální řešení s použitím úvahy.*
*Jedničkář, 6. ročník, ZŠ, řešitel MO (žák 22)*

Několikrát jsem se setkala s vypisováním násobků 3 a pamětním prověřováním vztahů, viz Obr. 92 (žák se dopustil pravopisné chyby ve slově „synovi“).




*Obr. 92 Experimentální řešení s využitím násobků.*
*Jedničkář, 7. ročník, ZŠ (žák 10)*

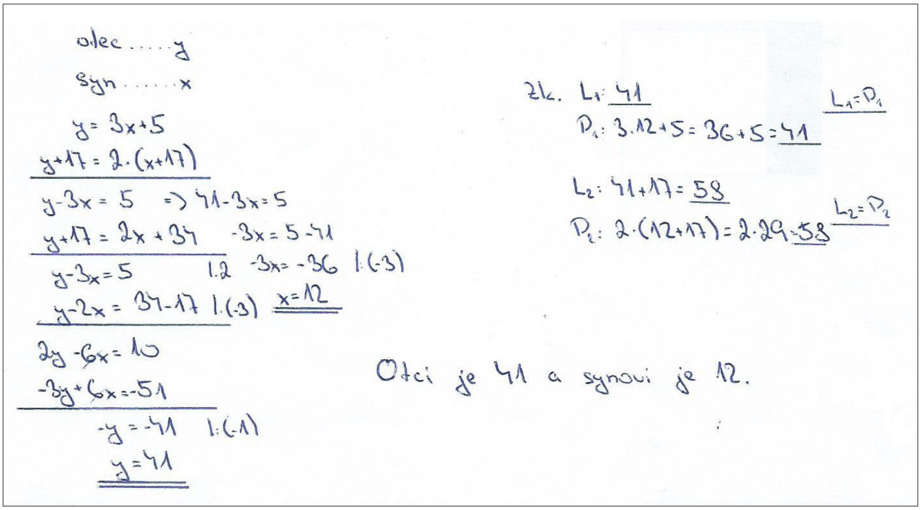
V 8. ročníku úlohu zvládlo vyřešit 10 žáků, u těchto úspěšných řešitelů stále převažovala experimentální metoda. Úlohu nevyřešilo 9 žáků 8. ročníku, většina z nich se pokusila o algebraické řešení. Ve 2. pololetí 8. ročníku by již většina žáků měla mít probráno učivo o rovnicích a také slovní úlohy k nim vedoucí, avšak soustavy rovnic zatím ne. U dané úlohy však bylo možné sestavit jednu rovnici o jedné neznámé, jak jsme viděli dříve.

Žáci 9. ročníku vyřešili úlohu správně ve 38 případech, úlohu nevyřešilo 27 žáků, v obou případech jednoznačně převažovala algebraická metoda.

Ve druhém pololetí 9. ročníku již mají žáci probráno učivo soustav rovnic o více neznámých. Ne všichni však dokážou efektivně tyto postupy aplikovat na slovní úlohy. Zejména dynamické úlohy jsou pro ně náročné. Žáci mají problémy s určením neznámých, případně neznámé určí správně, ale nedokážou sestavit rovnice.

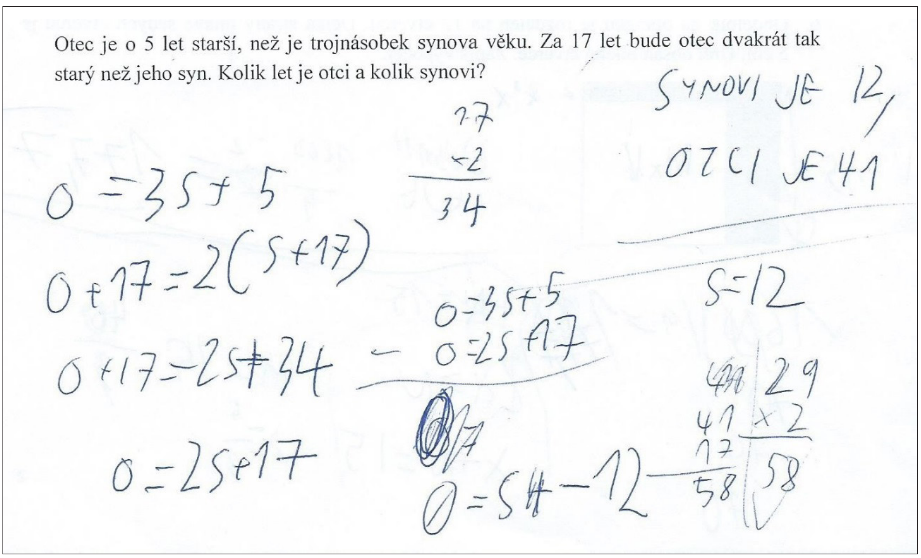
U některých žáků bylo patrné, že mají postup řešení U3 zautomatizovaný, postupují v naučených krocích. Například na Obr. 93 vidíme postup žákyně 9. ročníku. Uvedla, že podobné úlohy řešila při přípravě na přijímací zkoušky. U této žákyně bylo patrné, že většinu postupů má osvojenu velmi mechanicky, avšak když narazila na úlohu, se kterou se doposud nesetkala, nebyla schopna objevit řešení.

Žákyně uvádí také zkoušku, ale pouze zkoušku soustavy rovnic. Důležitější ze zkoušek, zkoušku slovní úlohy, neprovedla.



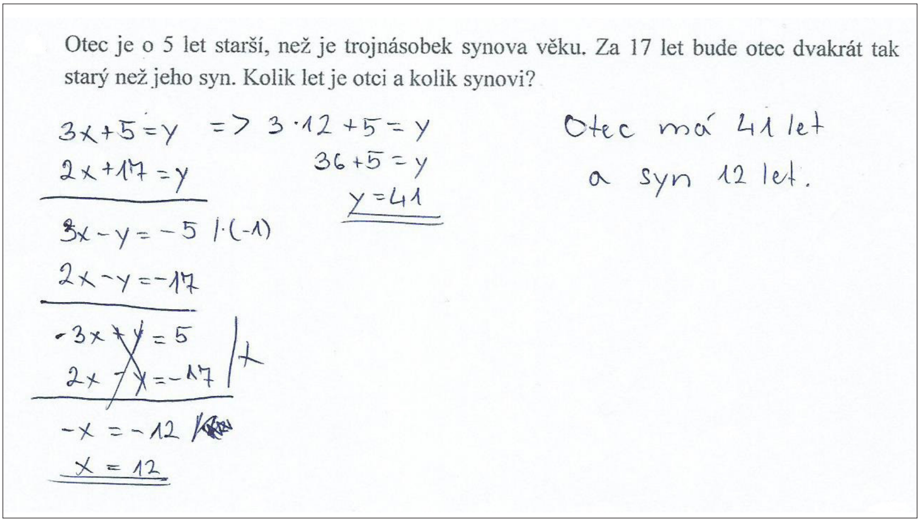

*Obr. 93 Algebraicky řešená úloha. Jedničkářka, 9. ročník, ZŠ (žák 27)*

Na Obr. 94 je ukázka řešení žáka s Aspergerovým syndromem. Jeho specifikem byla vysoká rychlost řešení a menší schopnost provádět zápisy přehledným způsobem. Tento žák navštěvoval Montessori třídu v rámci základní školy, což pro něj bylo výhodné z toho hlediska, že mohl v matematice postupovat vlastním tempem.




*Obr. 94 Algebraické řešení pomocí soustavy rovnic.*
*Matematicky nadaný žák, nediagnostikovaný, 9. ročník, ZŠ, AS (žák 18)*

Často jsem se setkala se špatnou úvahou, která vedla k sestavení soustavy rovnic, při jejichž vyřešení žák získal správný výsledek (Obr. 95). Druhá rovnice by měla být správně ve tvaru 2 ($x$ + 17) = $y$ + 17.


Otec je o 5 let starší, než je trojnásobek synova věku. Za 17 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

$3x+5=y \Rightarrow 3\cdot 12+5=y$

$2x+17=y \qquad 36+5=y$

$y=41$

$3x-y=-5 \quad /\cdot(-1)$

$2x-y=-17$

$-3x+y=5$

$2x-y=-17 \quad /+$

$-x=-12 \quad /\cdot(-1)$

$x=12$

Otec má 41 let a syn 12 let.

*Obr. 95 Algebraické řešení se špatně sestavenou rovnicí.*
*Jedničkářka, 9. ročník, ZŠ (žák 17)*

Někteří žáci uvedli, že uvedený typ úlohy znají z hodin matematiky, někdy z Matematické olympiády nebo přijímacích zkoušek. Mnozí žáci ale sdělili, že s podobnou úlohou se poprvé setkali až v tomto testu.

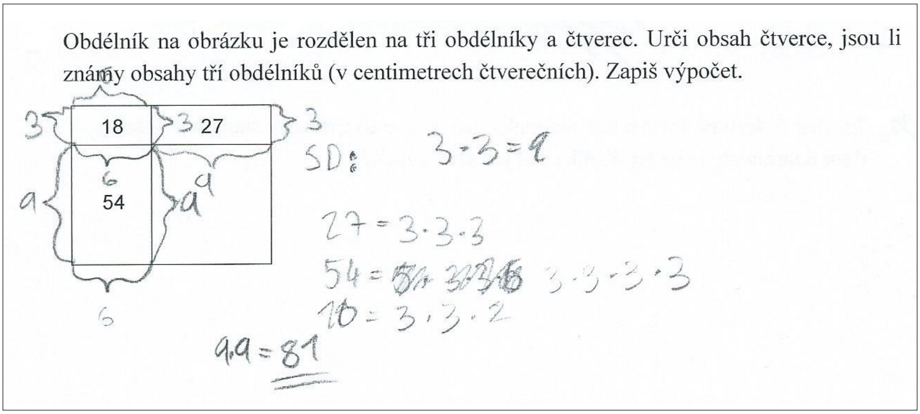
Nyní mohu odpovědět na otázku, proč žáci, kteří zvolili algebraické řešení, byli v nadpoloviční většině neúspěšní. Hlavním problémem bylo pro žáky sestavení rovnice nebo soustavy rovnic.

## Postupy volené žáky v U4

*Tab. 53 Úspěšnost žáků v U4 podle ročníku a podle volené strategie*

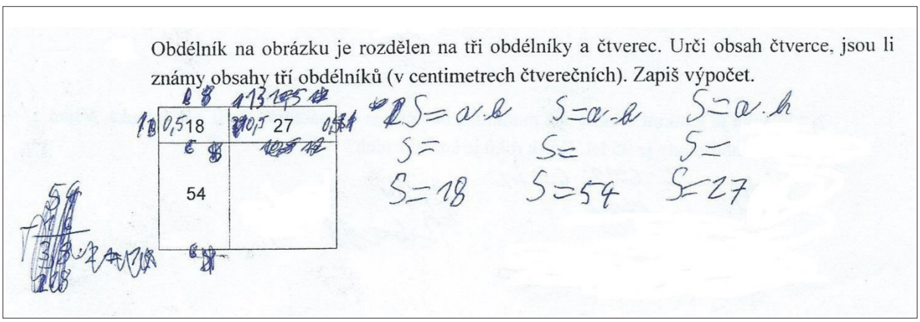
| | **6. ročník** | | **7. ročník** | | **8. ročník** | | **9. ročník** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1 – vyřešil<br>0 – nevyřešil** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **Aritmeticky (SD)** | 30 | 3 | 24 | 2 | 16 | 0 | 37 | 2 |
| **Aritm. (jinak)** | 2 | 7 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **Algebraicky** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 13 |
| **Neřešeno** | 0 | 8 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 5 |
| **Celkem** | **32** | **18** | **25** | **6** | **16** | **3** | **44** | **21** |

Úlohu správně vyřešilo 32 žáků 6. ročníku, všichni aritmeticky. Úlohu nevyřešilo 18 žáků. Nejčastěji použitým postupem bylo hledání společných dělitelů dvojic čísel 18 a 27, 18 a 54. Žáci, kteří zvolili tento postup, měli vysokou úspěšnost. Žák na Obr. 96 provedl prvočíselné rozklady zadaných čísel; udělal chybu v rozkladu čísla 54, nicméně výsledek to neovlivnilo. Zapsal pouze číselný výsledek, neuvedl odpověď s jednotkou.



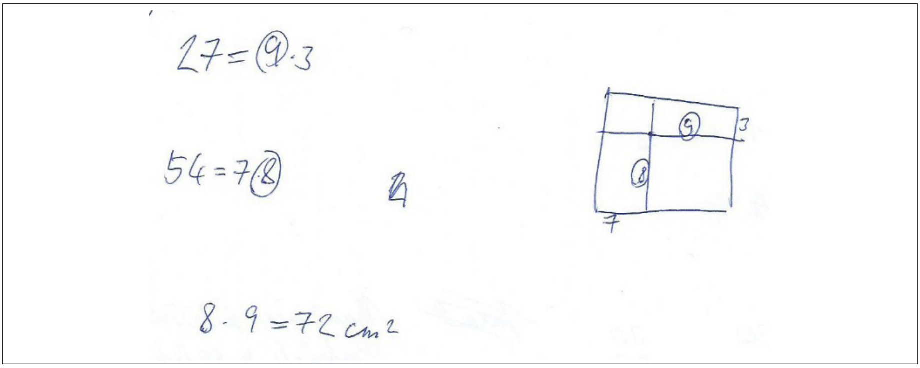

*Obr. 96 Aritmetické řešení založené na hledání společných dělitelů.*
*Bystrý žák, 6. ročník, G (žák 5)*

Žáci používali i jiné aritmetické postupy, někdy úspěšně, někdy méně úspěšně. Na Obr. 97 žák ztroskotal na naučené poučce $S = a \cdot b$, kterou zapsal stejně pro všechny tři obdélníky a nedokázal najít hledané součiny. Jedná se o příklad formální znalosti výpočtu obsahu obdélníka.



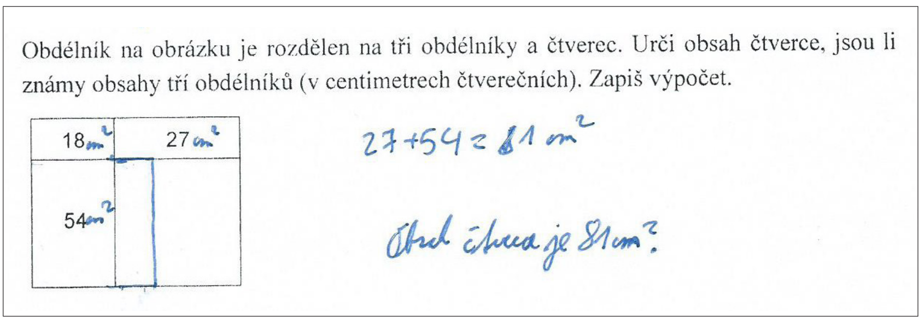

*Obr. 97 Pokus o řešení na základě vzorce pro obsah obdélníku.*
*Bystrý žák, 6. ročník, ZŠ, řešitel MO (žák 21)*

Žáci 7. ročníku úlohu vyřešili správně ve 25 případech, vždy aritmeticky. 6 žáků úlohu nevyřešilo. Převažovala metoda řešení pomocí společných dělitelů. Někteří žáci nepřišli na princip řešení. Žák 7. ročníku udělal na Obr. 98 aritmetickou i logickou chybu. Při řešení vůbec nebral v úvahu obdélník s obsahem 18 cm$^2$, rozložil pouze čísla 27 a 54 a u čísla 54 udělal chybu. Nezarazilo ho ani to, že čtverec by měl mít všechny strany shodné.




*Obr. 98 Řešení s numerickou chybou i chybou v úvaze.*
*Jedničkář, 7. ročník, ZŠ (žák 7)*

V několika případech jsem se setkala s řešením uvedeným na Obr. 99. Žák postupoval tak, že si do menšího čtverce zakreslil obdélník o obsahu 27 cm$^2$ a předpokládal, že zbylá část ve čtverci by měla odpovídat obdélníku obsahu 54 cm$^2$. O svojí úvaze se však nijak nepřesvědčil, matematicky ji neodůvodnil. Jednalo se pouze o hypotézu, která nebyla dokázána. Z tohoto důvodu jsem uvedené řešení považovala pouze za částečně správné.

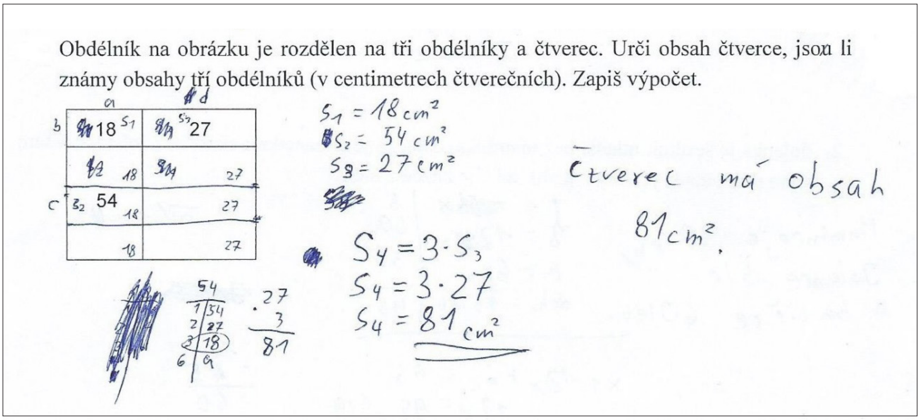



*Obr. 99 Řešení pomocí odhadu. Bystrý žák, 7. ročník, ZŠ (žák 25)*

Poznamenejme, že zápis 27 + 54 = 81 $cm^2$ není správný, i když je pochopitelný a žák mu rozumí. Výpočet by měl být buď zcela matematizovaný, tj. bez jednotek, jednotky se pak píší až do odpovědi, nebo by měly být jednotky všude, tj. 27 $cm^2$ + 54 $cm^2$ = 81 $cm^2$.

V 8. ročníku úlohu vyřešilo 16 žáků, všichni aritmeticky. 3 žáci úlohu nevyřešili.

Originální řešení je na Obr. 100. Žákyně na něm vychází z faktu, že 54 je trojnásobek 18. Odtud je zřejmé, že do spodního čtverce se vejdou tři obdélníky 18 $cm^2$ a do čtverce se vejdou tři obdélníky 27 $cm^2$. Oproti řešení na Obr. 99 se nejedná o odhadování, ale o logickou dedukci.




*Obr. 100 Řešení založené na hledání společného dělitele čísel 18 a 54. Jedničkářka, 8. ročník, ZŠ (žák 36)*

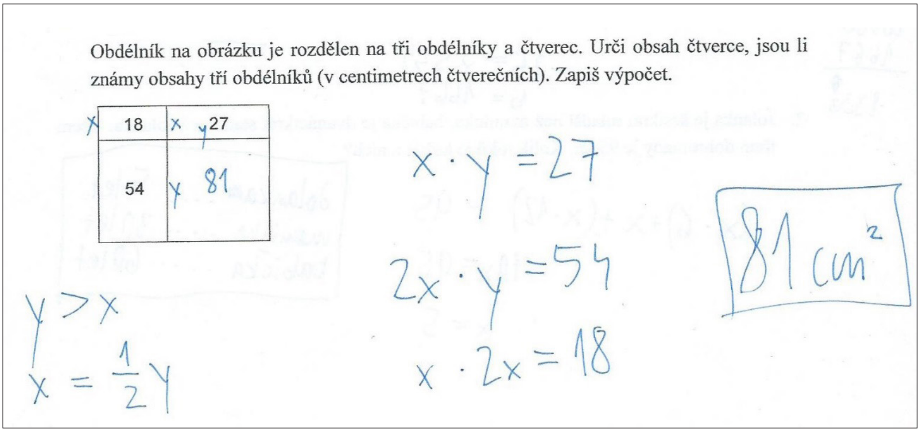
Situace se změnila u žáků 9. ročníku. Našli se žáci, kteří se úlohu rozhodli řešit primárně algebraicky. Někteří selhali při sestavování rovnic nebo při jejich řešení a vrátili se k aritmetické strategii, jiní úlohu nevyřešenou opustili a nesnažili se hledat jiné řešení. Úlohu vyřešilo 44 žáků, nevyřešilo ji 21 žáků.

Na výsledcích jsou zajímavé dvě věci:

1) Oproti nižším ročníkům se zvýšil počet neúspěšných žáků. To přisuzuji faktu, že žáci 9. ročníku jsou již vybaveni aparátem řešení soustav rovnic a mnozí se jej rozhodli použít. Protože se však jedná o velmi netypickou soustavu rovnic, se kterou se žáci většinou na základní škole nesetkají, mnoho z nich přirozeně selhalo. Je ale k zamyšlení, proč tolik z nich řešení vzdalo, aniž by se pokusili postupovat aritmeticky. Jedním z faktorů by mohlo být to, že když se zavede algebraická strategie, někteří učitele ji od žáků vyžadují a žáci si zvyknou, že méně sofistikovaný postup již používat nemají.

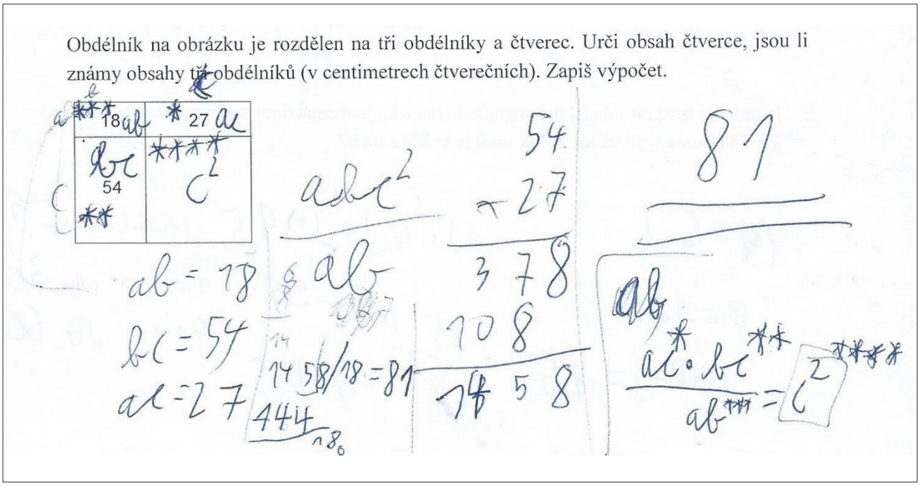
2) Zvýšil se také počet žáků, kteří řešení vůbec nezkoušeli. Jsem přesvědčena, že to nemohlo být způsobeno chybějící motivací, neboť se jednalo o žáky vybrané, kteří si na řešení dávali opravdu záležet. Opět bych to přisuzovala znalosti algebraické strategie – pokud žák vyhodnotí, že úlohu nezvládne řešit algebraicky, nepokouší se aplikovat jednodušší způsoby řešení.

Na Obr. 101 je uvedeno ojedinělé a netypické řešení na pomezí aritmetiky a algebry. Když pomineme chybu na začátku řešení ($x = \frac{1}{2}y$, žák si zapomněl označit třetí stranu, neboť $x = \frac{1}{2}z$ platí), žák vyšel z úvahy, že 54 = 2 · 27, a proto také obsah jednoho z obdélníků je dvojnásobný než druhý. Protože uvažované obdélníky mají jednu stranu shodnou, známe poměr délek druhých stran. Z těchto vztahů lze snadno dopočítat délku strany čtverce.




*Obr. 101 Řešení na pomezí aritmetiky a algebry.*
*Bystrý žák, 9. ročník, ZŠ (žák 57)*

Na Obr. 102 je uvedeno algebraické řešení žáka s Aspergerovým syndromem. Našel algebraický vzorec, který bylo možné upravit na $c^2$ a v němž znal všechny údaje. Vidíme zcela ojedinělý případ žáka, který se na základní škole nachází na konceptuální úrovni porozumění algebraickým postupům. Je zřejmé, že jeho uvažování je brilantní, ale zápis je naprosto chaotický.




*Obr. 102 Neobvyklé algebraické řešení úlohy.*
*Matematicky nadaný žák, nediagnostikovaný, 9. ročník, ZŠ, AS (žák 18)*

Uvedená úloha byla specifická tím, že naprostá většina žáků se s podobným typem úlohy ještě nikdy nesetkala. Mohli jsme tedy pozorovat originální přístupy žáků, kteří většinou ze školy neznali potřebné postupy. Ukázalo se, že v našich žácích (a to i žácích běžných základních škol) se skrývá značná schopnost matematické dedukce. To znamená, že v mnoha případech žáci zdůvodňovali svá rozhodnutí, aby bylo patrné, že postupy jen neodhadovali, ale uvažovali v logických návaznostech.

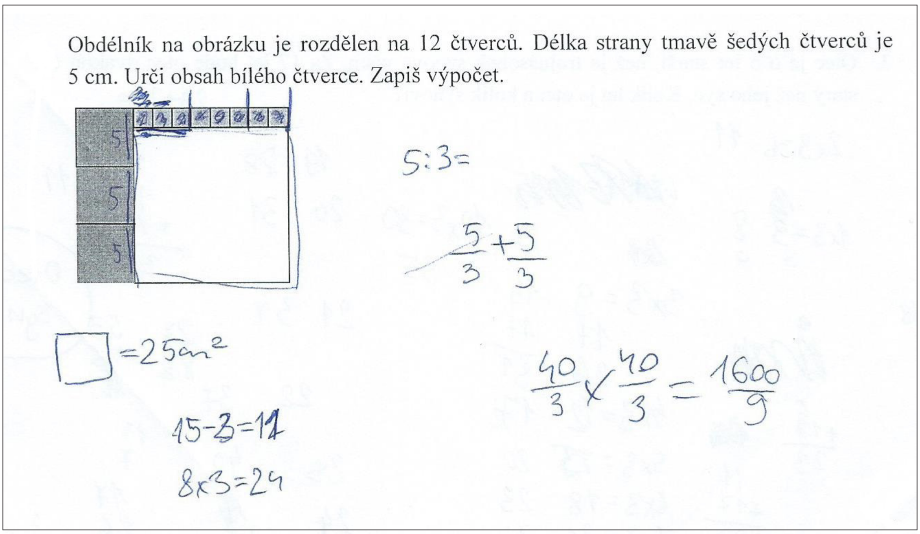
## Postupy žáků volené v U5

*Tab. 54 Úspěšnost žáků v U5 podle ročníku a podle volené strategie*

| | **6. ročník** | | **7. ročník** | | **8. ročník** | | **9. ročník** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1 – vyřešil**<br>**0 – nevyřešil** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **Odhadem** | 0 | 14 | 2 | 10 | 0 | 3 | 7 | 8 |
| **Aritmeticky** | 1 | 13 | 2 | 10 | 4 | 3 | 7 | 6 |
| **Algebraicky** | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 8 | 9 |
| **Neřešeno** | 0 | 17 | 0 | 4 | 0 | 3 | 0 | 15 |
| **Špatná úvaha** | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 |
| **Špatně přečtené zadání** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| **Celkem** | **1** | **49** | **6** | **25** | **6** | **13** | **15** | **43** |

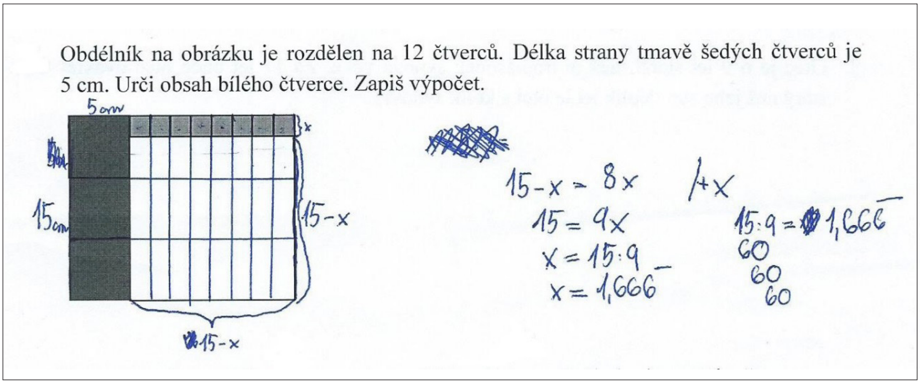
Úlohu dokázal správně vyřešit jediný žák 6. ročníku. Jako obrovský problém se u této úlohy ukázaly zlomky, které vycházely jako mezivýsledky. Žáci 6. ročníku nemají učivo o zlomcích z velké míry probráno, umí pracovat se zlomkem jako částí celku, ale nikoli se zlomkem jakožto číslem. Mohli zlomek upravit na periodické číslo, ale pokud si tuto možnost neuvědomili, nebo o ní ani nevěděli, jejich řešení v tomto místě většinou skončilo. Částečně úlohu vyřešilo 18 žáků, tj. dopracovali se k délce strany malého šedého čtverce $a = \frac{5}{3}$, dál nepokračovali. Úlohu nevyřešilo 31 žáků.

Jediná žákyně, která zvládla úlohu vyřešit až do konce, postupovala aritmeticky (Obr. 103). Jednalo se o žákyni navštěvující Montessori třídu. Svůj postup popsala v rozhovoru po napsání testu. Nejdříve logickou úvahou určila velikost strany malého šedého čtverce, a to $\frac{5}{3}$. Zde se zarazila, protože se zlomky ještě pracovat neuměla, a přemýšlela, jak by situaci mohla vyřešit. Nakonec se dle svých slov rozhodla postupovat zcela intuitivně, vynásobila $\frac{5}{3}$ osmi a řekla si, že to bude asi $\frac{40}{3}$. Nakonec určila obsah bílého čtverce vynásobením $\frac{40}{3} \cdot \frac{40}{3}$ a opět, jak uvedla, odhadla, že by to mohlo být $\frac{1600}{9}$. Odpověď nezapsala, ale její přístup k výpočtu byl obdivuhodný. Osobně se domnívám, že její určování součinů zlomků nebylo pouhé hádání. Důvodem je používání pomůcek při výuce zlomků v Montessori pedagogice (nejčastěji Montessori zlomkové věže), díky nimž žáci získávají o zlomcích velmi dobré představy.



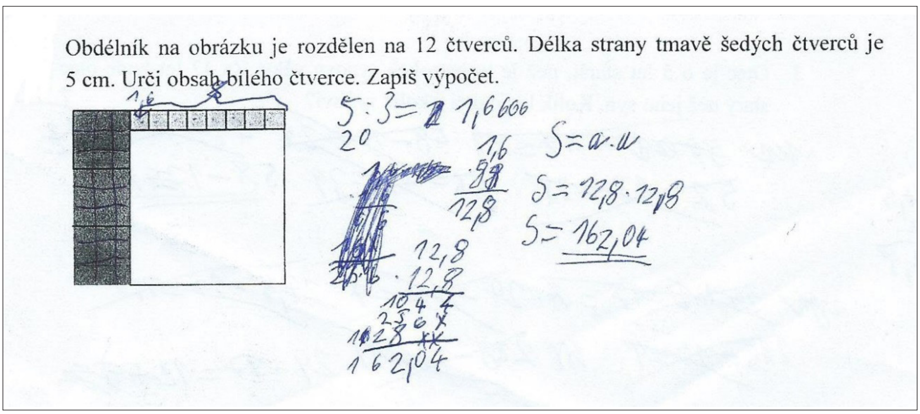

*Obr. 103 Aritmetické řešení úlohy.*
*Všeobecně nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 6. ročník, ZŠ (žák 20)*

Žáci 6. ročníku byli v některých případech schopni k úloze přistoupit algebraicky, jako na Obr. 104. Žákyně označila stranu malého šedého čtverce jako neznámou, správně sestavila a vyřešila rovnici. Se získaným výsledkem už ale dál nepracovala.




*Obr. 104 Algebraicky řešená úloha.*
*Všeobecně nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 6. ročník, MG (žák 119)*

Žáci velmi často postupovali způsobem odhadování, jako na Obr. 105. Žák odhadl, že malý šedý čtverec má třetinovou délku oproti straně většího šedého čtverce, avšak nepřesvědčil se o tom výpočtem. Poté nepřesně zaokrouhlil číslo $1{,}\overline{6}$ na 1,6 a určil výslednou hodnotu s velkou chybou (obsah čtverce je přibližně 178 $cm^2$).

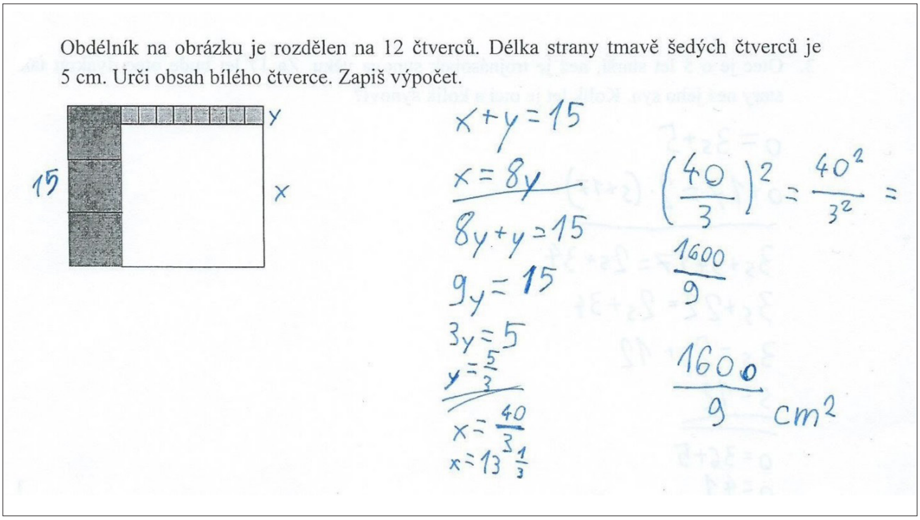



*Obr. 105 Řešení odhadem s nepřesným zaokrouhlením.*
*Jedničkář, 6. ročník, ZŠ, řešitel MO (žák 21)*

Rozhodnout, zda žák postupoval aritmeticky nebo odhadem, bylo mnohdy možné jen na základě rozhovoru.

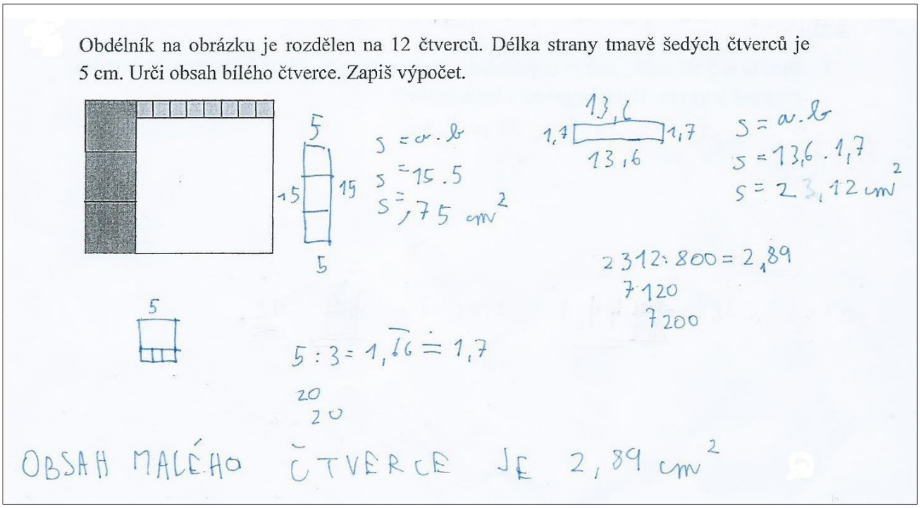
V 7. ročníku se zvýšil počet žáků, kteří byli schopni úlohu vyřešit až do konce. Bylo jich 6.

Na Obr. 106 vidíme bezchybné algebraické řešení žáka 7. ročníku pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Ve výpočtu skutečně (kromě zkoušky) nic nechybí – označení neznámých, správné zapsání rovnic pod sebe, určení výsledku ve tvaru zlomku, zapsání odpovědi. Žák navíc správně výpočet matematizoval a k jednotce se vrátil až v odpovědi. Žák neznal postup řešení ze školy.




*Obr. 106 Řešení úlohy soustavou rovnic.*
*Všeobecně nadaný žák, nediagnostikovaný, 7. ročník, ZŠ (žák 19)*

U některých žáků se stalo, že si nepřečetli zadání pozorně a určili jiný údaj, než byl požadován. Na Obr. 107 žák odhadem určil délku strany malého šedého čtverce. Jako výsledek uvedl obsah tohoto čtverečku, ale dopracoval se k němu velkou oklikou – místo aby vynásobil 1,67 · 1,67, určil nejdříve obsah celého světle šedého pásu a poté obtížným dělením trojciferným číslem (nechtěl zřejmě dělit desetinné číslo 23,12) určil hledaný obsah.

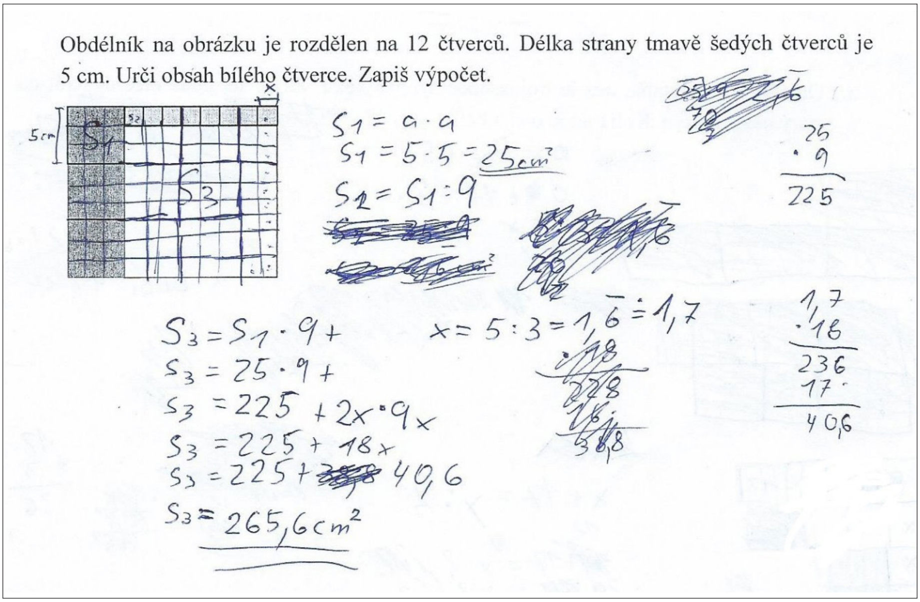



*Obr. 107 Složité řešení úlohy s odpovědí na jinou otázku.*
*Bystrý žák, 7. ročník, ZŠ (žák 10)*

V 8. ročníku úlohu vyřešilo správně 6 žáků a dalších 5 žáků dospělo k délce strany nejmenšího čtverce. 8 žáků úlohu nevyřešilo vůbec.

Stále převažoval počet žáků, kteří řešení nenalezli, případně nalezli pouze částečně. Přitom žáci 8. ročníku jsou oproti nižším ročníkům vybaveni aparátem řešení rovnic, a mají tedy lepší předpoklady ke správnému sestavení rovnice.

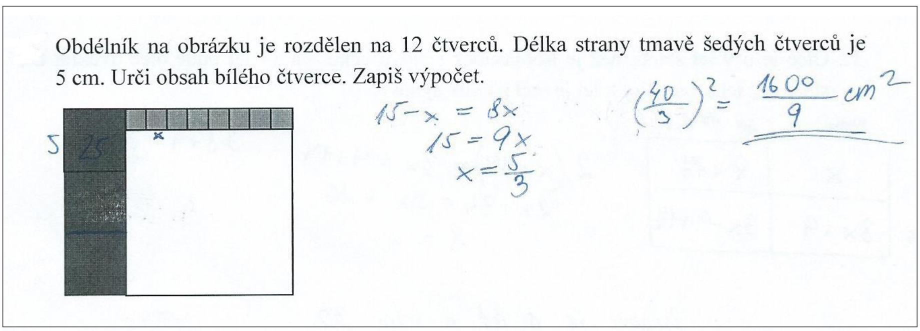
Aritmetické řešení založené více na odhadování než na úvaze vidíme na Obr. 108. Žákyně na něm nejdříve rozparcelovala celý obdélník podle nejmenšího čtverce, poté určovala jeho obsah jakožto obsah devíti větších šedých čtverců a zbylého obdélníkového pásu. Přečetla si ale nepozorně zadání a určila obsah celého obdélníku.




*Obr. 108 Aritmetické řešení s odpovědí na jinou otázku.*
*Jedničkářka, 8. ročník, ZŠ (žák 36)*

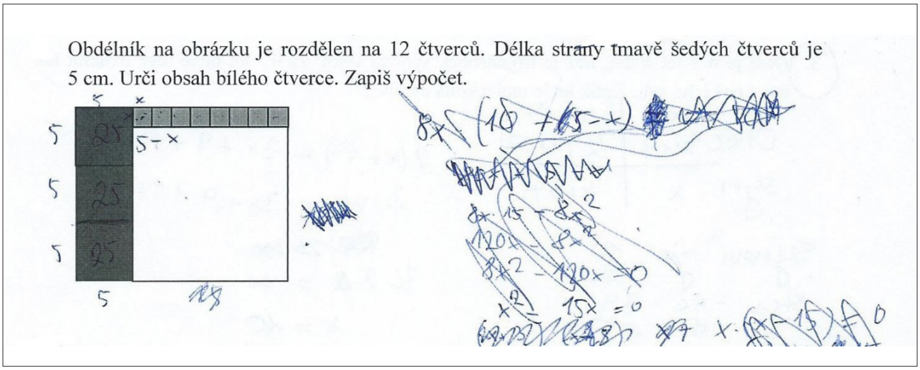
V 9. ročníku úlohu vyřešilo správně 22 žáků. 7 žáků dospělo k délce nejmenšího čtverce. Přibylo žáků, kteří zvolili algebraické řešení, řada z nich bohužel nezvládla správně sestavit rovnice, případně je vyřešit. Mnoho žáků se o řešení také vůbec nepokusilo.

Někteří žáci 9. ročníku byli schopni přímočarého algebraického řešení (Obr. 109).



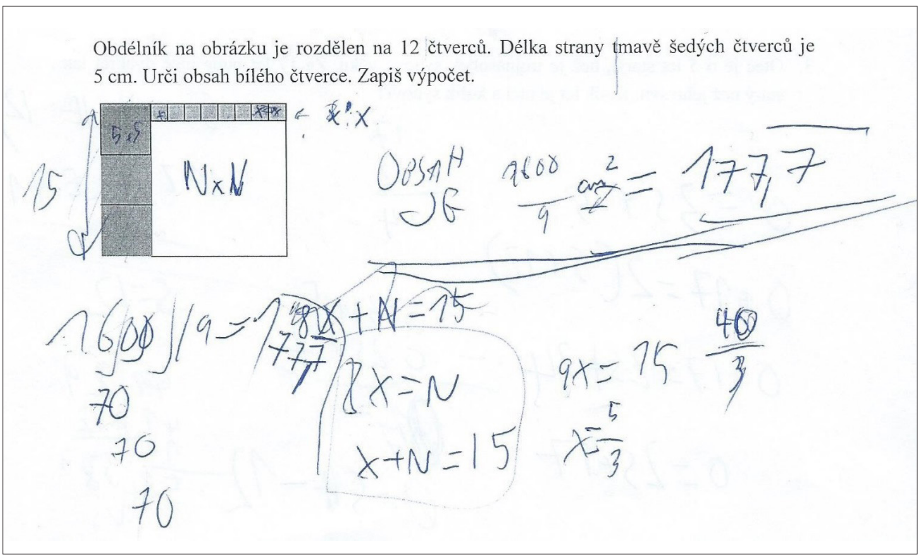

*Obr. 109 Algebraicky řešená úloha.*
*Matematicky nadaná žákyně, nediagnostikovaná, 9. ročník, MG (žák 130)*

Někteří žáci 9. ročníku měli problém objevit vztahy mezi délkami stran a nebyli proto schopni sestavit rovnice, jako je tomu na Obr. 110.




*Obr. 110 Pokus o algebraické řešení. Bystrý žák, 9. ročník, MG (žák 135)*

Uveďme opět pro zajímavost řešení žáka s Aspergerovým syndromem, který si k řešení vybral soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Výpočet je jako vždy v jeho případě bezchybný, ale zápis je nesouvislý, informace nenásledují chronologicky tak, jak byly zapisovány.




*Obr. 111 Algebraické řešení úlohy s chaotickým zápisem.*
*Matematicky nadaný žák s Aspergerovým syndromem, nediagnostikovaný, 9. ročník, ZŠ, (žák 18)*

Úloha 5 byla opět vhodná z toho hlediska, že dobře diferencovala žáky podle matematických schopností. Mnoho žáků se o řešení vůbec nepokusilo. Za velmi úspěšné můžeme považovat několik žáků 6. ročníku, a to i ty, kteří našli jen částečně řešení. Bylo vidět, že se nad problémem umí zamyslet a přes neznalost potřebného aparátu hledat řešení.

Jako méně sofistikovaná u této úlohy musí být hodnocena metoda pomocí odhadu. Žáci si totiž nemohli být jisti, že jejich předpoklad je oprávněný. Mnohem sofistikovanější je metoda aritmetická, kdy si žák zdůvodnil velikost malého šedého čtverce.

Co se týká algebraické strategie, viděli jsme, že ji úspěšně používali žáci již od 6. ročníku, i když jejich počet byl pochopitelně velmi malý. Na druhou stranu, žáci 9. ročníku tuto metodu volili mnohem častěji, ale většinou neúspěšně. Znalost aparátu řešení soustav rovnic jim příliš nepomohla k jejímu efektivnímu použití.

## – 4 – 8 – 2 Vybrané skupiny žáků

### Žáci, kteří získali plný počet bodů

Plný počet bodů v testu získalo 14 žáků. Z hlediska nadání 6 z nich bylo bez diagnostikovaného nadání, 4 byli všeobecně nadaní (z toho 2 diagnotikováni v PPP) a 4 matematicky nadaní (z toho 1 diagnostikován v PPP). Žádný z žáků nebyl z 6. ročníku, pouze jeden byl ze 7. ročníku, nejvíce žáků bylo z 9. ročníku. Zde můžeme zřejmě sledovat trend schopností vzrůstajících s vyšším ročníkem, které jsou dány větší matematickou zkušeností a širším spektrem matematického aparátu.

Z hlediska mé charakteristiky žáků (Tab. 19) se mezi žáky s plným počtem bodů objevili jedničkáři (jednič.), žáci bez zájmu o výuku matematiky, žák lenivý, s ADHD, s Aspergerovým syndromem (AS), s logickým myšlením, extrémně nadaná žákyně (extr. n.), viz Tab. 55. Většina těchto žáků potřebovala k řešení kratší než průměrný čas.

*Tab. 55 Žáci, kteří v testu obdrželi 10 bodů*

| Typ školy | Ročník | Pohl. | Nadání | Specif. | Čas | U1 | U2 | U3 | U4 | U5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ZŠ | 7 | Dívka | Bez | Jednič. | 45‘ | Ar. | Ar. | Exp. | Ar. | Ar. |
| ZŠ | 8 | Dívka | Bez | Jednič. | 35‘ | Alg. | Alg. | Exp. | Ar. | Alg. |
| ZŠ | 8 | Chlapec | Všeob. | | 34‘ | Ar. | Alg. | Alg. | Ar. | Ar. |
| M ZŠ | 8 | Chlapec | Všeob. | Lenivý | 37‘ | Ar. | Alg. | Alg. | Ar. | Ar. |
| G | 8 | Dívka | Všeob. | | 35‘ | Alg. | Alg. | Alg. | Ar. | Alg. |
| ZŠ | 9 | Chlapec | Bez | Bystrý, bez zájmu | 40‘ | Exp. | Alg. | Alg. | Ar. | Alg. |
| ZŠ | 9 | Chlapec | Bez | Bystrý | 40‘ | Alg. | Alg. | Ex. | Ar. | Odh. |
| ZŠ | 9 | Chlapec | Bez | Jednič. | 35‘ | Alg. | Alg. | Exp. | Ar. | Odh. |
| ZŠ | 9 | Chlapec | Bez | ADHD | 45‘ | Alg. | Alg. | Alg. | Ar. | Odh. |
| ZŠ | 9 | Chlapec | Mat. | AS | 15‘ | Alg. | Alg. | Alg. | Alg. | Alg. |
| ZŠ | 9 | Dívka | Mat. | Bez zájmu | 35‘ | Ar. | Exp. | Exp. | Ar. | Ar. |
| M ZŠ | 9 | Chlapec | Mat. | | 30‘ | Ar. | Ar. | Alg. | Ar. | Ar. |
| G | 9 | Chlapec | Všeob. | | 32‘ | Alg. | Alg. | Alg. | Ar. | Odh. |
| MG | 9 | Dívka | Mat. | Extr. n. | 30‘ | Alg. | Alg. | Alg. | Ar. | Alg. |

Všimněme si například toho, že matematicky nadaná žákyně 9. ročníku bez zájmu o výuku matematiky používala méně sofistikované strategie, ani jednou nepoužila algebraickou strategii. Naopak chlapec s ADHD třikrát využil algebraickou strategii. U řešení byl nesoustředěný, což se projevilo delším časem potřebným k řešení.

Dobře se uplatnili jedničkáři bez diagnostikovaného nadání. Tyto děti jsou zpravidla vnímány jako snaživé, ochotné osvojovat si postupy. To jim umožnilo uspět i v netradičně formulovaných úlohách. Do skupiny jedničkářů spadá také jediná žákyně 7. ročníku. Jak je vidět, vystačila si zcela bez algebraických postupů.

### Žáci s poruchou autistického spektra

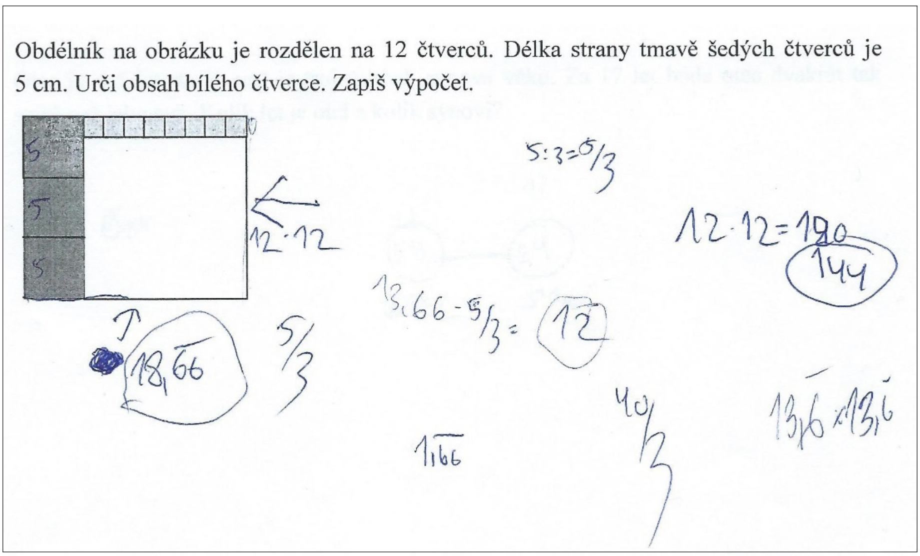
Ve vzorku žáků se objevili tři žáci s poruchou autistického spektra. Dva z nich měli Aspergerův syndrom a oba byli matematicky nadaní, nediagnostikovaní. Jeden z těchto žáků navštěvoval 7. ročník v matematicky zaměřené základní škole, druhý chodil do 9. ročníku základní školy, do Montessori třídy. Třetí žák měl autismus a byl nediagnostikovaný, vyučujícím označený jako bystrý, navštěvoval 6. ročník běžné základní školy.

*Tab. 56 Žáci s poruchou autistického spektra*

| Typ školy | Ročník | Pohl. | Nadání | Specif. | Čas | U1 | U2 | U3 | U4 | U5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ZŠ | 7 | Chlapec | Mat. | AS | 14‘ | Ar. | Ar. | Exp. | Ar. | Částečně Ar. |
| ZŠ | 9 | Chlapec | Mat. | AS | 15‘ | Alg. | Alg. | Alg. | Alg. | Alg. |
| ZŠ | 6 | Chlapec | Bystrý | Autismus | 25‘ | Ne[50] | Exp. | Ne | Ne | Ne |

Oba žáci s Aspergerovým syndromem byli v testu velmi úspěšní, oba jej vyřešili v extrémně krátkém čase. To obecně odpovídá schopnosti lidí s Aspergerovým syndromem neobvykle rychle provádět aritmetické výpočty. Žák 9. ročníku získal plný počet bodů a ukázky jeho řešení jsme již měli možnost vidět (např. Obr. 111). Z nich bylo patrné, že žák používá velmi nezvyklé a nečekané algebraické postupy a má značný problém srozumitelně zapsat postup. Probrat řešení s ním nebylo možné, protože rozhovor téměř okamžitě ukončil.

Žák 7. ročníku získal 9 bodů, v U5 nedotáhl řešení do konce. Také u něj jsem se setkala s nedostatečným zápisem, kdy většinou zapsal pouze výsledek (pamětní řešení), nebo uvedl nesrozumitelný zápis. Jako ukázku uvádím řešení 5. úlohy (Obr. 112).




*Obr. 112 Ukázka řešení úlohy žákem 7. ročníku s Aspergerovým syndromem*

[50] V případě U1 se pokusil o experimentální řešení, ale úlohu nevyřešil, u úloh U3 až U5 nezapsal žádný postup řešení.

Na Obr. 112 vidíme, že žák uvádí mnoho různých čísel, aniž by sdělil jejich význam. Mezi těmito čísly se vyskytuje číslo (délka strany malého čtverce) a o kousek dál zápis tohoto zlomku číslem periodickým $1{,}\overline{66}$. Dále vidíme , což je délka strany zkoumaného čtverce. Dle mého názoru udělal chybu ve výpočtu
(zapsal $13{,}\overline{66}$), výpočet $13{,}\overline{66} \times 13{,}\overline{66}$ by už byl hledaný obsah.

Výsledky, které jsem od dvou žáků s Aspergerovým syndromem získala, se s teorií shodují v rychlosti provádění aritmetických úkonů, v neobvyklosti postupu, avšak rozcházejí se s teorií v tvrzení, že žáci s Aspergerovým syndromem nejsou úspěšní v řešení problémových úloh. Žáci, kteří se výzkumu účastnili, se k řešení problémových úloh postavili originálně a byli v nich úspěšní. Problém u nich byl se zápisem postupu.

Žák s autismem získal pouze 2 body, správně vyřešil jen druhou úlohu, a to experimentální strategií. Dle učitele se v hodinách matematiky projevoval jako žák bystrý, v testu však z nějakého neznámého důvodu selhal. Příčinou by mohla být napíklad rigidita myšlení dětí (a lidí) s autismem, které se mechanicky naučí opakování určitých postupů, ale v nových situacích a problémových úlohách neumí pružně reagovat.

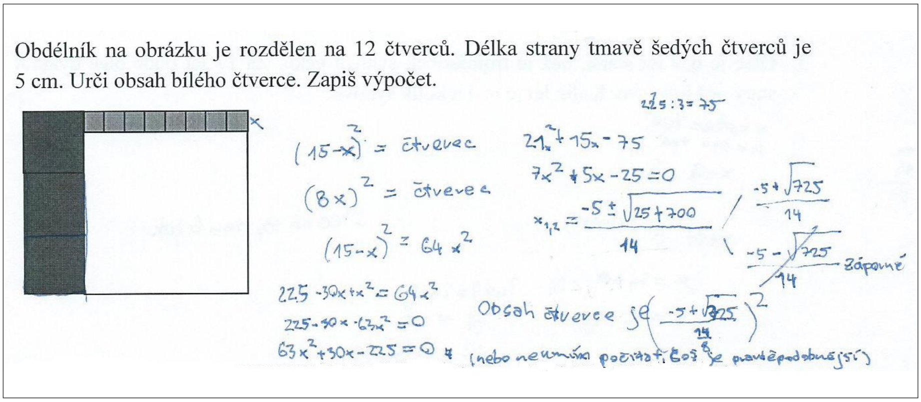
### Žáci extrémně matematicky nadaní

Čtyři žáci 9. ročníku matematického gymnázia byli svými učiteli označeni jako extrémně matematicky nadaní. Tři z těchto žáků byli chlapci, dívka byla jedna.

*Tab. 57 Extrémně nadaní žáci*

| **Pohlaví** | **Čas** | **Počet bodů** | **U1** | **U2** | **U3** | **U4** | **U5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dívka | 30‘ | 10 | Alg. | Alg. | Alg. | Ar. | Alg. |
| Chlapec | 35‘ | 8 | Alg. | Alg. | Alg. | Alg. | Ne |
| Chlapec | 32‘ | 8 | Alg. | Alg. | Alg. | Částečně alg. | Částečně alg. |
| Chlapec | 35‘ | 8 | Alg. | Alg. | Alg. | Alg. | Ne |

U těchto žáků převažovalo algebraické řešení. Pouze dívka byla schopna získat plný počet bodů, každý z chlapců udělal v testu nějakou chybu a jeden žák neřešil poslední úlohu. Chlapci obdrželi 8 bodů. Chyby u těchto žáků ale mnohdy pramení z příliš složitého způsobu myšlení. Například na Obr. 113 můžeme sledovat řešení páté úlohy jednoho z žáků. Postupoval složitěji, než bylo nutné – neurčoval délky sousedních stran bílého čtverce, ale jeho obsah. Tím mu vznikla kvadratická rovnice. Dopustil se chyby, když celou rovnici krátil třemi. Tím získal špatné kořeny. Jeden z kořenů označil jako záporný a dál se jím nezabýval. Druhý kořen označil jako délku strany čtverce, ale zdál se mu podezřelý, neboť je iracionální – což vyjádřil větou „nebo neumím počítat“.




*Obr. 113 Řešení U5 extrémně nadaným žákem*

## – 4 – 9 SHRNUTÍ A DISKUSE

V úvodu výzkumného šetření jsem si položila čtyři výzkumné otázky a nyní na ně odpovím.

O1. *Jakého průměrného výsledku dosáhli žáci v jednotlivých úlohách testu?*

Nejvyššího průměrného výsledku dosáhli žáci dle očekávání u úlohy 2, která plnila roli motivační. Její úspěšnost byla 85 % a pro žáky byla velmi jednoduchá.

Výborných výsledků žáci dosáhli také v případě úlohy 1, jejíž úspěšnost byla 72 %. Úloha již není zcela školsky typická, obsahuje netriviální aritmetické operace (sčítání a odčítání velkých čísel s několika přechody přes základ). Žáci ji proto nemohli řešit ve většině případů pamětně, museli zvolit některou ze sofistikovanějších strategií a zapsat si výpočet. U této úlohy se potvrdily všechny vyslovené hypotézy. Domnívám se, že tato úloha by byla vhodná do testu pro rozlišení žáků podle jejich nadání. Jediné riziko, které v případě této úlohy vidím, je to, že žáci, kteří chodí do tříd s rozšířenou výukou matematiky, mohou znát postup řešení z hodin matematiky, a postupují tedy mechanicky, zatímco žáci běžných základních škol se s tímto typem úlohy nemusí během výuky setkat.

Rovněž v případě úlohy 4 byla vysoká úspěšnost, 71 %. Tato úloha byla specifická tím, že vlastně zcela obrátila výsledky žáků vzhledem k očekávání dle nadání nebo typu školy. To znamená, že v této úloze byli nejúspěšnější žáci běžných základních škol a žáci, kteří nebyli označeni jako nadaní. Klíčem k zodpovězení otázky, jak se to mohlo stát, je volba strategie řešení. Žáci, kteří jsou nejméně vyzbrojeni matematickým aparátem, neznají řešení pomocí rovnice nebo soustavy rovnic, vybrali aritmetické řešení založené na hledání společných dělitelů. Tato metoda měla více než 90% úspěšnost. Díky této úloze si můžeme uvědomit, jak je ošemetné očekávat, že o výsledcích v matematice rozhodují schopnosti žáka a nadání. Někdy může být dominantní zcela jiný faktor, který o úspěšnosti rozhodne. Úloha by byla nevhodná pro rozlišování žáků podle nadání.

Úloha 3, dynamická slovní úloha, měla dle očekávání nižší úspěšnost, 41 %. Nejúspěšnější v ní byli žáci 9. ročníku, matematicky nadaní žáci a žáci, kteří zvolili experimentální strategii řešení. Problém s touto úlohou byl opět v tom, že někteří žáci byli evidentně vytrénováni na postup řešení, zatímco jiní se s úlohou nikdy nesetkali.

Úloha 5 měla nejnižší úspěšnost, 21 %. Celkovou úspěšnost snižoval výsledek žáků 6. ročníku, kteří se nedokázali překlenout přes zlomky. Zlomky však byly překážkou i pro žáky vyšších ročníků. Vypadalo to, jako by se žáci zalekli, když uviděli racionální číslo, a úlohu opustili nevyřešenou. Důvodem může být fakt, že žáci se mnohem častěji setkávají s úlohami, v nichž pracují pouze s celými čísly (s racionálními čísly se prakticky setkají pouze v tematickém celku racionální čísla).

O2. *Jakého průměrného výsledku dosáhli žáci v jednotlivých úlohách testu vzhledem k ročníku?*

Závislost na ročníku byla silná u všech úloh s výjimkou U4. Žáci 6. ročníku byli znevýhodněni omezeným matematickým aparátem. V případě čtvrté úlohy zřejmě opět sehrálo roli to, že žáci nižších ročníků neovládají algebraickou strategii a k řešení si vybrali hledání společných dělitelů.

O3. *Jakého průměrného výsledku dosáhli žáci v jednotlivých úlohách testu vzhledem k nadání?*

Matematicky nadaní žáci byli s výjimkou U4, v níž se snažili uplatňovat algebraickou strategii, nejúspěšnější ve všech úlohách, většinou však jejich výsledky nebyly výrazně lepší než například u žáků běžných základních škol. Tento jev může mít několik příčin, osobně vnímám tyto důvody:

- Matematicky nadaní žáci se dopouštějí chyb numerických i logických. To snižuje jejich skóre v písemném testování.
- Matematicky nadaní žáci často prokazují komplexní myšlení a globální plánování, vybírají si někdy zbytečně složitý způsob výpočtu, to je časově zdržuje a zvyšuje riziko numerické chyby.
- Matematicky nadaní žáci používali sofistikovanější metody řešení, velice často vybírali algebraickou metodu. Pokud v řešení selhali, nebyli většinou ochotni přistoupit k méně sofistikovaným metodám.
- Nemohu pominout ani faktor výběru nadaných žáků, kdy nadání bylo posuzováno učiteli na základě subjektivního názoru o tom, jak se nadaný žák projevuje.

O4. *Jaké strategie řešení budou žáci volit vzhledem k nadání?*

Závislost výběru strategie na nadání žáka se projevila, a to zejména u matematicky nadaných žáků. Ti v úlohách volili sofistikovanější metody řešení, velice často algebraickou metodu. To však mnohdy snížilo jejich úspěšnost.

Domnívám se, že úspěšnost u úlohy 1 a 3 by mohla být vyšší, pokud by žáci byli vedení k sofistikovanému používání experimentální strategie. Břehovský a kol. (2015) uvádí: „Jsme přesvědčeni, že schopnost žáků řešit nerutinní problémy by rostla, kdyby zvládli experimentální heuristické strategie." Toto přesvědčení sdílím. Žáci v testování experimentální strategie příliš nevyužívali, zejména pokud již znali algebraické strategie. Je možné, že učitelé je k tomu nevedou, protože na experimentální strategie nahlížejí jako na „nematematické", postrádající algoritmickou podstatu. Novotná (2004) uvádí, že používání experimentálních metod je některými učiteli považováno za nevhodné, neboť žáka utvrzuje v dojmu, že najít řešení je důležitější než rozvíjet určité řešitelské strategie. Přitom právě díky metodám řízeného experimentu žáci mohou objevovat vztahy zadané v úloze.

Také cílený rozvoj aritmetických strategií by mnoha žákům pomohl při řešení mnou zadaných úloh. Aritmetická etapa řešení algebraických úloh jako by se na základních školách zcela vynechávala. Přitom v historii převládala celá staletí, než byl zaveden algebraický aparát a symbolika, které algebraické výpočty značně usnadnily.

Jako problematické se mi jeví posuzování výsledků matematicky nadaných žáků podle skóre v testu. V testování matematických znalostí a dovedností je zvykem skórovat výkon žáka jako celek. Plného počtu bodů žák dosáhne tehdy, pokud zapíše správný výsledek (za podmínky, že ke správnému výsledku vedl správný postup). Žák tedy ztrácí body jak za nesprávné úvahy, tak také za numerické chyby. Jak uvádí Sternberg (1981), matematicky nadaní žáci používají komplexní způsob myšlení, jsou schopni úlohu posuzovat globálně a tak ji také řešit. V průběhu řešení se stejně jako ostatní žáci dopouštějí různých chyb jak logických, tak numerických. Jestliže je tedy test zaměřen na správné výsledky, jak bývá běžné, matematicky nadaní žáci v něm nemusí dosahovat excelentních výsledků. Řešení žáků by se měla posuzovat komplexně, nejen z hlediska dosažení správného výsledku, ale také z hlediska použité strategie, originality řešení (zde by se matematicky nadaní žáci mohli více lišit od svých vrstevníků) apod. Pro identifikaci nadání by se nemělo používat jen písemné řešení.

Co se týče strategií, nedá se říci, že by převažovala jedna strategie řešení. U každého typu úloh žáci preferují jinou strategii řešení. Lze však konstatovat, že dle vysloveného očekávání u náročnějších úloh volili nenadaní žáci a také žáci všeobecně nadaní spíše aritmetické strategie, zatímco velké procento matematicky nadaných žáků zvolilo strategie algebraické. U matematicky nadaných žáků však tento fakt mnohdy znamenal neúspěch při řešení. Otázkou je, proč primárně používali algebraickou strategii. Příčinou by mohla být tendence matematicky nadaných žáků použít tu nejsofistikovanější strategii, kterou mají k dispozici.

Preferování algebraické strategie může mít i jiný důvod. Novotná (2000) uvádí, že často dochází k tomu, že řešitelé, kteří již mají určitou zkušenost s řešením rovnic, preferují řešení algebraické před řešením aritmetickým. Řešení rovnic a jejich soustav má totiž algoritmický charakter a žákům, kteří ovládají tento aparát, může připadat takový postup snazší. To platí pro žáky nadané i nenadané, avšak nenadaní žáci ještě nemuseli získat v algoritmu takovou jistotu, aby jej použili. Rizikem je to, že pokud žák nemá zvládnuty aritmetické představy, může mít problém objevit algebraické vztahy.

Opět musím připustit, že nedokonalý výběr vzorku a relativně malý počet matematicky nadaných ve výzkumu mohly mít vliv na výsledky. Ovšem i jiní výzkumníci, napíklad Linsell (2009), dospěli k názoru, že matematicky nadaní žáci používají v úlohách rovnicového charakteru sofistikovanější postupy nežli jejich vrstevníci.

Nejen v historii můžeme pozorovat, že dlouho převládalo aritmetické myšlení. Starověcí a středověcí učenci zadávali úlohy tak, aby vycházely celočíselně, případně s jednoduchými racionálními čísly. Úlohy, jejichž výsledky jsou iracionální čísla, vyžadují obvykle algebraické postupy. Také u žáků můžeme pozorovat, že dlouhou dobu dávají přednost aritmetickým metodám, někdy po celou základní školu. Algebraický aparát neumí správně použít ani mnozí matematicky nadaní žáci a je možné, že jej mají osvojen spíše formálně.

## – 4 – 10 LIMITY VÝZKUMU

Výzkum ukázal řadu zajímavých fenoménů, avšak jeho realizace měla několik slabin. Problematické je například zařazení žáků do skupin podle nadání. Žáků, kteří byli identifikováni pedagogicko-psychologickou poradnou, bylo ve výzkumu 13. U ostatních žáků bylo nutné spolehnout se na výběr učitele. V této chvíli se projevily velké rozdíly v úrovni žáků na jednotlivých školách, a to i v rámci jednoho typu škol (např. běžná základní škola). Někteří učitelé uvedli, že na celé škole nemají ani jednoho nadaného žáka, potom tedy vybírali ty nejšikovnější žáky v rámci třídy či školy. To, do jaké skupiny je žák zařazen, nemusí tedy odpovídat realitě. Problematika rozřazování žáků dle schopností se jeví jako náročná. Existují dle mého názoru tři způsoby, jak žáky rozřadit, a každý z nich je spojen s určitými riziky:

1) Odborná diagnostika v pedagogicko-psychologické poradně nebo jiném zařízení. Problémem je, že žáci 2. stupně a jejich rodiče nemají často zájem o odbornou diagnostiku, svoje nadání pro matematiku řeší raději výběrovým gymnáziem. Problematická je rovněž interpretace výsledků, pokud je posuzuje někdo, kdo sám matematiku dostatečně neovládá.

2) Rozřazení žáků na základě didaktického testu. Problémem je, že nadaní žáci, zejména matematicky, by nemuseli v testu dosáhnout výborných výsledků (viz důvody výše).
3) Dát na úsudek učitele. Výhodou v tomto případě je dlouhodobé pozorování žáka. Problémem je nejednotná úroveň žáků na různých školách, rozdílné vnímání nadání různými učiteli.

Ani jeden ze způsobů, kterými by bylo možné žáky rozřadit do skupin podle nadání, není optimální. Kromě toho je nutné si uvědomit, že zařadit žáka do jedné kategorie často také není jednoduché, hranice mezi kategoriemi nejsou ostré. Nejvhodnější by bylo zvolit kombinaci všech tří uvedených způsobů kategorizace žáků, avšak i tak brát rozdělení s rezervou.

Design studie, kdy byl stejný didaktický test zadáván žákům čtyř ročníků, lze vnímat jako její limit. Žáci se liší nejen znalostmi a dovednostmi, ale i koncentrací, matematickou zkušeností aj. Vzhledem k těmto skutečnostem by bylo vhodné úlohy více diverzifikovat a rozdělit alespoň do skupin ročníků 6–7 a 8–9.

Pro validnější výsledky by bylo nutné získat vzorek, v němž by byl vyrovnaný poměr dívky/chlapci a kde by výběr žáků více odpovídal rozložení v populaci. Vhodnější by také bylo rovnocenné zastoupení ročníků.

Rovněž výběr úloh přirozeně ovlivnil výsledky výzkumu, je možné, že jiné úlohy by ukázaly výsledky mezi skupinami lépe či jinak.

Esenciální součástí výzkumu byly rozhovory, které proběhly se žáky bezprostředně po napsání testu. Je skvělé, že se podařilo realizovat rozhovor s každým žákem účastnícím se zkoumání. Přestože se jedná o časově náročnou činnost, je zcela nenahraditelným zdrojem informací o způsobu žákova uvažování. V samotném zápisu řešení zůstávají některé fenomény skryty a výzkumník je může odhalit teprve při rozhovoru s žákem.

# – 5 – DOSPĚLÍ NADANÍ A JEJICH VZPOMÍNKY NA ŠKOLU

Najít nadané žáky ve školách byl poměrně problém. Učitelé mi na moji žádost o testování nadaných žáků nezřídka odpovídali, že na celé škole nemají ani jednoho žáka, kterého by označili jako nadaného. To mě přivedlo na spoustu otázek. Jak je možné s jistotou identifikovat nadaného žáka? Je identifikace v pedagogicko-psychologické poradně dostatečnou zárukou, že žák označený jako nadaný je opravdu nadaný? A je vůbec nadání měřitelné? Jak se ve škole projevují matematicky nadaní – jsou to obyčejné děti, nebo již v období základní školy vyhrávají matematické soutěže a žijí pouze matematikou? Na školách nebyl problém najít žáky, kteří měli pedagogicko-psychologickou poradnou diagnostikovány poruchy učení, ADD, ADHD a další. Najít však odborně identifikovaného nadaného byl velký problém. Připadalo mi důležité podívat se na celou záležitost z opačné strany – pohledem člověka, který se matematikou živí na vysoké úrovni. Abych si udělala obrázek o tom, jak se matematicky nadaní projevovali ve školním prostředí, jaké byly jejich zájmy a zda již na základní škole byli zahloubáni pouze do matematiky, rozhodla jsem se využít toho, že se pohybuji v prostředí vysoce matematicky nadaných lidí, kterých jsem se zeptala, jaké jsou jejich vzpomínky na dětství a školu.

Neusar (2009) upozorňuje, že vybavování vzpomínek je v mnoha případech poměrně náročným úkolem, což může být zejména pro méně motivované respondenty důvodem, že svou odpověď spíše nějak odhadnou či vymyslí. Zejména u vzpomínek z dob dávno minulých největší potíže přináší limit naší paměti; dokonce i vzpomínky, které si pamatujeme zcela jasně, mohou být výrazně zkreslené či plně smyšlené. Schacter (1999) uvádí, že zatímco některé příjemné vzpomínky si rádi uchováváme a můžeme si je dokonce přibarvit, nepříjemné, zejména traumatizující vzpomínky máme tendenci vytěsňovat. To hraje roli zejména u citově zabarvených vzpomínek, kterými jsou i vzpomínky například na milou paní učitelku, kterou měl respondent rád, nebo na šikanu, kterou zažíval v kruhu spolužáků.

Motivace mnou oslovených respondentů byla vysoká. Výzkum je velmi zaujal a s chutí se snažili vybavit, co v dětství zažívali. Osobně se domnívám, že přestože nelze brát zcela vážně konkrétní vzpomínky, celková vzpomínka na to, co dotyčný zažil, může být vypovídající.

## – 5 – 1 VÝZKUMNÁ SONDA – VZPOMÍNKY MATEMATIKŮ A FYZIKŮ NA ŠKOLU

Výzkumná sonda měla následující cíl: najít parametry z oblasti školního prostředí, rodinného prostředí, vztahu se spolužáky a zájmů, které jsou pro respondenty klíčové a ovlivňovaly v dětství jejich vztah k matematice.

Zeptala jsem se několika odborných matematiků či fyziků z univerzitního prostředí a jednoho matematicky nadaného programátora, jak hodnotí svá školní léta. Učinila jsem tak proto, že jsem chtěla vědět, jak (a zda) škola přispěla k jejich nevšednímu matematickému nadání. Jména osob jsou smyšlená.

Formou rozhovoru jsem realizovala devět případových studií. Zaměřila jsem se na tři oblasti, které jsou dle mého názoru klíčové v životě nadaného dítěte:

1) Rodinné prostředí.
2) Vliv učitele matematiky.
3) Vztah se spolužáky a role v kolektivu.

Respondenty jsem seznámila s cílem mého výzkumu a nechala je volně hovořit o svých vzpomínkách na školní docházku. Pokud nezmínili některou informaci z mého pohledu důležitou, byla jim položena doplňující otázka.

Očekávala jsem určité společné rysy respondentů. Byla jsem přesvědčena o tom, že tito lidé měli od raného dětství zájem o matematiku. Rodinou (rodiči, sourozenci aj.) byli podporováni v zájmu o matematiku. Školní prostředí nemuselo být pro všechny podnětné, pokud nebylo, dokázali svůj zájem o matematiku uspokojit jinde. Domnívala jsem se, že většina z nich měla problémy se začleněním do kolektivu.

Během rozhovoru jsem si zapisovala klíčové údaje, které byly respondentem zmíněny. Ty jsem poté analyzovala z hlediska mnou očekávaných jevů (viz body 1 až 3 výše), třídila je do kategorií a současně jsem evidovala další opakující se jevy. Pomocí této analýzy jsem identifikovala následující kategorie:

- zájem o matematiku v rámci školy;
- zájem o matematiku v mimoškolním prostředí;
- zájem o další obory;
- zájem rodičů o vzdělávání dítěte;
- začlenění nadaného dítěte do kolektivu, vztahy se spolužáky.

Po analýze prvních třech rozhovorů (s Radimem, Zdeňkem a Milošem, viz níže) jsem si všimla, že měli určité společné znaky, ale ne zcela ty, které jsem očekávala. Zejména vliv rodiny na nadané žáky se jevil jako odlišný od toho, co jsem očekávala. Rodiče nepodporovali rozvoj svých dětí v oblasti matematických schopností, ale podporovali jejich celkový všeobecný rozhled. Jako společný jmenovatel uvedených nadaných se dále ukazoval zájem o četbu, nikoli pouze knih s matematickou tematikou, ale například historických knih. K původním pěti kategoriím jsem přidala další čtyři:

- zájem o matematiku v raném dětství;
- zájem o četbu;
- zájem o obory, jako jsou historie, malířství, hudba, přírodověda;
- hodnocení smysluplnosti trávení času ve škole.

## – 5 – 2 VÝSLEDKY

### RADIM, teoretický matematik uznávaný u nás i ve světě

Již od raného dětství Radim pociťoval svoji odlišnost od ostatních dětí. Své problémy s komunikací částečně připisuje tomu, že předškolní věk trávil u babičky v přírodě, kde nemohl trénovat komunikační dovednosti.

Od základní školy ho bavila matematika, chodil na matematické soutěže, několikrát vyhrál. Jednou si dovolil opravit učitelku matematiky, která to vzala osobně a začala mu to prý „vracet“. Učitelka dle jeho slov určitě nepřispěla k tomu, že ho matematika bavila. Byla to jeho matka, kdo rozvíjel jeho zájem tím, že ho zásobila matematickými knihami.

Spolužáci se mu neposmívali, ale zejména proto, že se ve škole neprojevoval. Doma si tajně vyráběl knížku se vzorečky, s astronomickými poznatky a podobně. Po základní škole absolvoval gymnázium, poté se rozhodl jít na stavební fakultu, a to proto, že nevěděl, co se sebou. Studium mu ale nevyhovovalo, byl tam rok, poté studium přerušil a pracoval v truhlářské dílně. Zde pochopil, že ho velmi zajímá matematika, rozhodl se studovat odbornou matematiku a tu úspěšně vystudoval.

### ZDENĚK, teoretický fyzik

Zdeněk vzpomíná na základní školu tak, že byl vždy nejlepší na matematiku, ale spolužákům to zas tak moc nevadilo. Když ale vzpomíná déle, uvědomuje si, že je to vlastně „docela štvalo“. Ale netrpěl tím, nezažíval žádnou šikanu.

O učitelce říká, že ho nikdy nepodporovala v rozvoji nadání, nepřipravovala mu žádné zajímavé úlohy. Materiály, které jej matematicky rozvíjely, si vyhledával sám. Například ho bavilo dokazovat tvrzení, která učitelka vyslovovala. Měl štěstí v tom, že ho učitelka nikdy neshodila, jeho nápady na řešení úloh vždy respektovala.

Ani jeden z rodičů nebyl matematik či fyzik, ale otec byl lékař a rád dětem povídal o světě. Tak se Zdeněk dověděl o vesmíru, o lidském těle, o chemických sloučeninách a tak dále.

Na 2. stupni došlo k rozdělení žáků do tří tříd podle výkonů – chodil do třídy nejšikovnějších žáků. Třídy se staly homogennějšími, přesto ani tak nevytvořily podnětné prostředí pro něj jako nadaného žáka.

Po 8. ročníku šel na gymnázium, zde se podle svých slov začal cítit i rozvíjet daleko lépe.

### MILOŠ, informatik

Miloš chodil na základní školu se zaměřením na fotbal a velmi zde trpěl. Se spolužáky-chlapci si vůbec nerozuměl, mohl se bavit jen s několika děvčaty, kterým nevadilo, že dokáže v matematice vše vyřešit. Vysvobozením pro něj byl přechod na víceleté gymnázium, kde se jednak začal cítit lépe v kolektivu, jednak dostával více podnětů ve výuce matematiky.

Matka se zajímala o Milošův prospěch, měla zájem, aby prospíval ve všech předmětech. Otci byly školní záležitosti vcelku lhostejné.

Od dětství velmi četl, nikdo ho do toho nemusel nutit. Nejvíce ho bavily historické romány, například Ivanhoe od Scotta. Velice se zajímal o hrady a jejich historii.

### MARTA, aplikovaná matematička

Marta má o šest let staršího bratra, ten se jí hodně věnoval a už v 1. třídě ji naučil zlomky. „Takže když jsem se ve škole nudila, napsala jsem si několik zlomků a bavila jsem se tím, že jsem je sčítala a odčítala.“ Ve 2. třídě již byla schopna pracovat se složeným zlomkem.

Výuka pro Martu nebyla ničím moc zajímavá ani obohacující, většinu věcí znala předem. Paní učitelka jí však vyšla vstříc tím, že jí dovolila nosit si do školy knihy a číst je v hodině.

Se spolužáky měla v 1. a 2. třídě velmi dobré vztahy. Pak se ale stěhovali a při změně školy nezapadla do kolektivu, nerozuměla si s dětmi. V 6. ročníku se však zformoval nový kolektiv a trochu se to zlepšilo. Na 2. stupni navíc Marta dostala výborného učitele na matematiku, byl to starší pán, který uměl vysvětlovat.

Na gymnáziu byla matematika na vynikající úrovni. Zde už Marta jednoznačně věděla, že chce studovat matematiku nebo fyziku.

Rodiče Marty pocházeli z velmi chudých poměrů, přesto byla podpora z jejich strany veliká. Záleželo jim na školních výsledcích, doma se četly knihy, povídalo se o světě. V matematice ji nejvíce podporoval starší bratr, který byl stejně jako ona matematicky nadaný.

### ILONA, aplikovaná matematička

Matematika na 1. stupni nebyla na moc dobré úrovni. Učitelku si Ilona vlastně vůbec nepamatuje. V té době bylo ve třídě mnoho dětí, byla i odpolední výuka v turnusech jednou za dva týdny, vše bylo velmi hektické. Většinu věcí, které se děti učily, Ilona uměla a nemusela se je učit. Na rozdíl od předcházejících respondentů se účastnila matematické soutěže, konkrétně Pythagoriády.

K matematice byla vedená od malička matkou, která byla učitelkou matematiky na gymnáziu. Zajímalo mě, jak konkrétně ji maminka ovlivňovala. „Jenom tím, že to maminku bavilo. Byla nadšená, když třeba student našel hezké řešení úlohy. Měla radost z objevování a krásy matematiky – to, co většina lidí nevidí.“

Také děda ji vedl k logickému myšlení, vytvářel jí vizuální představy. „Kupovali jsme třeba plato vajec a on mi říkal, abych ta vajíčka nepočítala po jednom, ale po řádcích. Zdá se mi, že ve školách hodně chybí vizualizace.“

Od 5. ročníku Ilona přešla na matematickou základní školu, což ji zásadně nasměrovalo. Nikdy ji od této doby nenapadlo, že by dělala něco jiného než matematiku. Na 2. stupni se začala účastnit korespondenčních seminářů a matematických soustředění.

Na gymnáziu ji ovlivnil třídní učitel. Byl mladý, šikovný a velmi dobrý matematik. Měl výborný způsob výuky matematiky, učil studenty přemýšlet. „Jel systémem definice-věta-důkaz. Říkal, že jsme dost chytří na to, abychom to zvládli.“ Od 2. ročníku gymnázia měla na matematiku individuální vzdělávací plán – zřejmě pro extrémní nadání, ale jak říká: „Nevím, co je nadání a co je píle.“ V ostatních předmětech se učila jen na zkoušky, které měly daný termín.

Mnoho a ráda četla, na základní škole historické romantické příběhy (například Ivanhoe). Přitom neměla ráda školní dějepis.

### VERONIKA, vysokoškolská profesorka matematiky

Veronika měla na 1. stupni výborného a hodného pana učitele. Matematika ji ale vůbec nezajímala.

Také na 2. stupni měla dobrého učitele matematiky, ale více ji zajímaly jazyky, chtěla je studovat.

Veronika navštěvovala dvanáctiletou střední školu. „Tam to s matematikou nebylo nic moc, paní učitelka byla nevlídná, asi tu matematiku sama neuměla, měla to naučené. Běda, jak někdo vybočil. Ta nás od matematiky spíše odrazovala.“

Stále chtěla studovat jazyky. Ve 12. ročníku dostali nového učitele, mladého, a ten ji za jeden rok přivedl k matematice. Nakonec dospěla k názoru, že jazyky se může učit sama, ale matematiku ne.

V kolektivu neměla Veronika žádné problémy, měla několik dlouhodobých kamarádek.

Od dětství mnoho četla, zejména historické romány (například Hugo, Balzac), knihy o malířích.

Doma byly tři sestry (včetně ní), maminka byla dlouho doma a podporovala dcery v učení. Rodina chodila často na výlety. Četlo se společně.

### XAVER, teoretický fyzik

Základní škola byla podle Xavera trochu nudná a nezajímavá. Nedělaly se věci, které by ho bavily. Navíc mu výuka připadala poněkud neefektivní. Asi v 5. ročníku si udělal průzkum efektivity výuky a zjistil, že za šest vyučovacích hodin, které měli v jednom dni, se učilo přibližně hodinu a půl. Ve zbytku času se řešily věci pro Xavera zbytečné – zkoušelo se u tabule, řešily se třídní a kázeňské problémy.

Na 2. stupni Xaver inklinoval především k matematice. Avšak hodiny matematiky nijak zvlášť zajímavé nebyly. S fyzikou to bylo obdobné. Učitel fyziky nedokázal učivo předávat poutavě. Během základní školy chodil Xaver na různé olympiády, v Matematické olympiádě se dostal do oblastního kola. Učitelka ho netrénovala, jen mu dala možnost zúčastnit se MO.

Se spolužáky se na základní škole tolerovali, měl asi dva lepší kamarády.

Leccos se změnilo přechodem na gymnázium. Začal číst fyzikální a matematické knihy, sháněl si je po antikvariátech. Účastnil se mnoha korespondenčních seminářů z fyziky a informatiky. Zlepšilo se také jeho zařazení mezi spolužáky, neboť s nimi měl více společných zájmů.

Rodiče neobohacovali Xavera konkrétně (v matematice nebo ve fyzice), ale spíš obecně: „Bylo co číst, měl jsem k dispozici křížovky a podobně.“

Na závěr našeho rozhovoru vyslovil Xaver názor, pramenící z jeho zkušeností se školou: „Škola slouží primárně k hlídání dětí, aby rodiče mohli chodit do práce. Samozřejmě můžeš mít štěstí a natrefit na dobrého učitele, ale není to pravidlem.“

### JINDŘICH, světově uznávaný matematik

Na 1. stupni měl Jindřich šikovnou paní učitelku; o učitelích říká, že ho vždy motivovali. Přesto během 1. stupně v matematice nevynikal.

Na 2. stupni mu již matematika šla lépe, ale nikterak se jí nezabýval. V matematice měl jedničky a dvojky; neprojevoval se jako výborný žák, ani neměl problémy.

Mnoho četl – Jiráska, Nerudu, Babičku od Němcové, Štorcha (např. Lovci mamutů), oslovila jej kniha Volání rodu, velmi ho zajímala historie. Měl výtvarné nadání, ve vyučování si často kreslil. Jak ale říká: „Nadání je nutno rozvíjet, já jsem vlohy pro kreslení nerozvíjel, proto ze mě žádný malíř nebyl.“

Teprve na střední škole začali Jindřicha považovat v matematice a fyzice za vynikajícího žáka. Měl velmi přísného učitele, který jeho vlohy rozvíjel. Na maturitu z matematiky se připravoval pečlivě, vyřešil mnoho úloh. Rozhodl se jít na matematickou vysokou školu. Motivací pro něj ovšem bylo to, že na matematicky zaměřenou vysokou školu se dostane snáze než na jiný typ školy.

Rodinné prostředí bylo podnětné. Rodiče velice dbali na to, aby prospíval ve škole. Otec si s ním často povídal o fungování světa.

O učitelích říká, že měl celý život štěstí na osobnosti.

Jindřich se pokusil zformulovat, čím se tolik odlišuje od ostatních lidí: „Mám zásadu hledat i nečekané souvislosti, snažím se odkrývat podstatu věcí, neustupovat před problémy a hledat jejich řešení.“

## ŠIMON, světově uznávaný teoretický fyzik

Šimon chodil od 3. ročníku do jazykové třídy, v kolektivu převažovaly dívky. Vztahy se spolužáky označuje za více méně neutrální. Přesto se v kolektivu necítil příliš dobře. Pociťoval odlišnosti od spolužáků, neměl s nimi společné zájmy, neměl si s nimi o čem povídat. V třídním kolektivu měl jednoho dobrého kamaráda a kamarádilo s ním i několik dalších chlapců.

Matematické úlohy řešil Šimon neobvykle, nedodržoval postupy, učitelce to vadilo. V 6. ročníku mu kvůli tomu hrozila dvojka z matematiky. Spolužáci protestovali a vybojovali mu jedničku.

Matematické poznatky získával především ze školy, všímal si různých zákonitostí, které potom samostatně rozvíjel. Doma četl knihy o fyzice. Zajímaly ho přírodní vědy obecně, chtěl se stát ochráncem přírody.

Po dokončení 8. ročníku šel na gymnázium, do matematické třídy. Velmi se mu tam líbilo, protože začal mít se spolužáky společné záliby. Matematika měla vysokou hodinovou dotaci, byla vyučována na vysoké úrovni. Řešily se náročné problémové úlohy, studenti společně debatovali nad řešením.

Šimon velmi četl, nejvíce verneovky nebo mayovky. U některých knih měl problém s tím, že si nedokázal zapamatovat všechny postavy, pokud jich bylo více.

Rodiče ho velmi podporovali ve studiu matematiky, zajímali se o jeho studium. Tatínek mu ukazoval matematické hříčky, vykládal zajímavosti o matematice a o přírodovědě. Doma měli knihy s matematickými úlohami, které společně řešili.

## – 5 – 3 Shrnutí

U respondentů můžeme sledovat tyto společné znaky:

- Školní prostředí většinou nebylo zdrojem podnětů a rozvoje nadání. Často se opakuje slovo „nuda“. Některé respondenty ovlivnila osobnost učitele, který měl dobré matematické znalosti, uměl učivo vysvětlit, byl přívětivý.
- Většina nadaných měla podnětné rodinné prostředí, i když ne právě zaměřené na matematiku. Rodiče tyto děti spíše podporovali v poznávání světa jako celku, nešlo o žádný nácvik matematických postupů. Tito žáci četli mnoho knih. Stejnou zkušenost má Campbell (2001), který uvádí, že v rodinách s nadanými dětmi vždy bylo velké množství knih.
- Někteří nadaní po celou základní školu vůbec netušili, že jsou v matematice výjimeční. Jejich zájmy byly velmi široké, získali velký rozhled, a to zejména četbou.
- Někteří nadaní se začali lépe cítit až v homogennějších třídách, kde se nemuseli za své nadání stydět. Několikrát bylo uvedeno, že teprve na víceletém gymnáziu měli se spolužáky více společných zájmů. Jestliže respondenti měli pocit, že se nachází v kolektivu, který není veden k toleranci a respektování různosti lidí, mnohdy neusilovali o žádnou interakci se spolužáky, nedávali příliš najevo své nadání. Stehlíková (2016) uvádí, že nadané děti samy sebe často vnímají jako divné, jiné a toto sebepojetí vstupuje do vztahů s kamarády. Říká, že nejen že ostatní děti nechtějí být s nadaným dítětem, ale také nadané dítě nechce být s nimi. Bohužel, zejména na prestižních gymnáziích může dojít i k opačné situaci, kdy v kolektivech složených z kognitivní elity jsou utlačováni žáci „pouze“ bystří. Zde už nemluvíme pouze o tom, kdo koho šikanuje, ale o celkové schopnosti žáků komunikovat spolu a vzájemně se respektovat. Segregace bohužel nevede k rozvoji těchto komunikačních dovedností, nerozvíjí se komunikace mezi komunitami.
- Mnoho respondentů se zajímalo o historii, malířství, hudbu a také o jazyky. Jejich zájmy byly široké. Podobnou zkušenost s matematicky nadanými žáky získala Laznibatová (2001). Uvádí, že matematicky nadané děti tvoří dle jejích výzkumných šetření svými výkony celkem samostatnou skupinu v porovnání s běžnou populací dětí. „Je pro ně charakteristický vysoce nadprůměrný rozvoj všeobecných intelektových schopností, s rovnoměrně rozvinutou složkou verbální a nonverbální inteligence, stejně jako verbální i neverbální tvořivosti.“ (s. 40)

Výsledky výzkumu jsou omezené a je možné je brát pouze jako prvotní vhled do problematiky. Vzorek respondentů byl malý na to, aby bylo možné učinit nějaké zobecnění. Navíc vzpomínky nejsou zcela spolehlivé. Přesto jsem přesvědčena, že další mapování vzpomínek matematiků na školní léta by pomohlo upřesňovat pohled na problematiku vzdělávání nadaných dětí. Velmi málo toho například víme o dětství geniálních matematiků. Jak uvádí Durnová a Kotůlek (2017), historie matematiky nám nabízí celou řadu životopisů slavných vědců, z nichž však není patrné, jak se rozvíjel jejich talent v dětství, jak se nadaným věnovali jejich rodiče nebo učitelé. Z některých životopisů získáme kusé informace o dětství geniálních slavných vědců. Například George Boole (1815–1864), anglický matematik a logik, získal základy vzdělání v matematice od otce, který byl sice ševcem, ale s mimořádným zájmem o matematiku a optickou techniku. Jazyky malý George studoval sám, do 14 let ovládl řečtinu, francouzštinu a němčinu. Leonhard Euler (1707–1783), švýcarský matematik, fyzik a astronom, své matematické nadání projevil velmi záhy. Stal se žákem rodinného přítele, matematika Johanna Bernoulliho. Karl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik, fyzik, astrofyzik a astronom, už v raném dětství projevil nevšední nadání pro počty, prý uměl dříve počítat než mluvit. V 11 letech studoval knihy o infinitezimálním počtu.[51]

Ne všichni slavní matematici a fyzici projevovali od dětství své nevšední nadání. Například Isaac Newton (1642–1727), anglický fyzik, matematik a filozof, byl jako dítě fyzicky slabý, bez známek nějakého zvláštního nadání. Henry Cavendish (1731–1810), britský fyzik a chemik, trpěl silným Aspergerovým syndromem (Navrátil & Novotná, 2014). Studoval na univerzitě v Cambridge, avšak nezískal vysokoškolský diplom. Albert Einstein (1879–1955), dodnes mnoha lidmi považovaný za největšího génia všech dob, byl prakticky po celé dětství považován za opožděné dítě. Mluvit se naučil mnohem později než jeho vrstevníci a jeho rodiče měli obavy o jeho mentální vývoj (Mihulová & Svoboda, 2012). Učitelé základní školy jej hodnotili jako mentálně zaostalého, nespolečenského introverta, neustále zahloubaného do svých snů. Od dětství hrál na housle a byl schopen odhalovat matematickou strukturu Mozartovy hudby (Mihulová & Svoboda, 2012).

Durnová a Kotůlek (2017) se podrobně věnují životopisu Václava Hlavatého, matematika 20. století, který podle nich nebyl géniem, přesto se stal světově uznávaným matematikem. Dokázal vyřešit Einsteinovy rovnice, přitom sám sebe vtipně označoval za „Eisteinova obyčejného násobilkáře“. Ve škole se však Hlavatý jako matematik příliš neprojevoval. Na gymnáziu byl sice premiantem třídy, ale v matematice měl nejhorší známky ze všech předmětů (což byly dvojky). Exceloval v jazycích. Byl také hudebně nadán a hrál výtečně na housle.

Podobných životopisů, zaměřených na dětství vědců, najdeme skutečně málo, ale i tak lze sledovat společné znaky s těmi, které jsem vypozorovala ve svém výzkumném šetření.

[51] Informace o matematicích získány z Encyklopedické edice: Matematici. Praha: Encyklopedický dům, 1997.

# ZÁVĚRY

Přechod od aritmetiky k algebře je stěžejním místem školské matematiky, kde lze sledovat schopnosti nadaných a matematicky nadaných žáků.

V rámci výzkumu jsem se zabývala tím, jak žáci přistupují k řešení úloh rovnicového charakteru. Sledovala jsem vývoj metod používaných žáky ve 4. a 5. ročníku a později od 6. do 9. ročníku. Zaměřovala jsem se také na přístupy nadaných a matematicky nadaných žáků.

Výzkum na 1. stupni ZŠ ukázal několik zajímavých fenoménů. Za jeden z nejdůležitějších považuji ten, že matematicky nadaní žáci přecházejí občas k algebraickým metodám podstatně dříve, než tomu odpovídá obsah učiva a než jsou toho schopni ostatní žáci (někteří slabí žáci nejsou schopni přejít k algebraickým metodám až do konce 9. ročníku). Největším problémem je u těchto žáků korektní matematický zápis s používáním závorek.

V testu pro 1. stupeň byly výsledky u jedné úlohy (úloha 4) statisticky významně lepší u nadaných žáků než u ostatních. Příliš jednoduché úlohy, které vedly na jednokrokové rovnice, byly triviální pro nadané i ostatní žáky. Naopak vybrané problémové úlohy byly příliš složité i pro matematicky nadané žáky. Úloha vedoucí na rovnici se třemi kroky se jevila jako nejcitlivější k posuzování nadání. Je však nutné upozornit, že u všech testových úloh pro 1. i 2. stupeň se projevilo, že písemné testování není pro nadané žáky nejlepším způsobem, jak mohou projevit své schopnosti. Důvodem je zejména komplexnost myšlení nadaných žáků, které mnohdy vede k řešením, která nejsou přímočará, a žák tak úlohu nedokáže vyřešit v omezeném čase, přestože má do problému mnohem větší vhled než průměrní žáci. U mnohých matematicky nadaných žáků se často projevuje rovněž neschopnost provádět aritmetické operace bez numerických chyb. Mnohem přínosnější je s žákem hovořit o způsobu jeho uvažování.

Výzkum na 2. stupni potvrdil že matematicky nadaní žáci začínají používat algebraické metody dříve, než je na to připraveno kurikulum. Z rozhovorů vyplynulo, že většinou se žáci s algebrou nesetkají přímo ve škole a často ani sami neumí říci, kde používané postupy viděli. Je pro ně přirozené volit za neznámou hodnotu písmeno, aby tak zjednodušili výpočet. Zejména žáci 6. ročníku se však pochopitelně dopouštějí nekorektních zápisů.

Z úloh vybraných do testu pro žáky 2. stupně se úloha 1 jeví jako citlivá na testování školního nadání. Ostatní úlohy byly zatíženy nejrůznějšími faktory:

- Úloha 2 byla jednoduchá pro všechny skupiny žáků.
- U úlohy 3 bylo vidět, že žáci nejsou zvyklí využívat metodu řízeného experimentu. Pokud tedy neznali algebraickou strategii a odmítli z nejrůznějších důvodů řešit úlohu experimentálně, úlohu vůbec neřešili. Na druhou stranu žáci, kteří úlohu znali, například z Matematické olympiády, měli osvojený algoritmický postup.
- U úlohy 4 byl rozhodující výběr metody řešení. Žáci, kteří zvolili jednodušší aritmetické řešení, byli úspěšnější než žáci, kteří zvolili algebraické řešení. Přitom zejména matematicky nadaní žáci volili sofistikovanější algebraické řešení, ale nedokázali ho dovést do konce.
- U úlohy 5 se jako největší překážka ukázal zlomek.

# DISKUSE

Testováni byli žáci, kteří byli vybráni jako nadprůměrní. Někteří z těchto žáků byli identifikováni odborným pracovištěm jako nadaní, řada z nich byla učiteli označena jako nadaní, ostatní byli bystří či jinak nadprůměrní. Z toho důvodu mě překvapily některé obtíže, které se u žáků v souvislosti s přechodem od aritmetického k algebraickému myšlení objevily. Velkou roli hraje školní přístup k řešení slovních úloh. Llinares a Roig (2008: s. 530) uvádějí, že „potíže, které žáci zažívají při používání svých matematických znalostí jako konceptuálního nástroje při řešení problémů, mohou mít příčiny ve způsobu vzdělávání. Matematické problémy prezentované ve výuce jsou obvykle předávány v rámci určitého tématu, které poskytuje všechny nástroje potřebné k nalezení matematického modelu, který by odpovídal situaci. Tyto problémy se stávají pouhými návodnými úlohami spíše než modelovými úlohami. Proto je pro žáky náročné vytvořit si návyky v hledání kvantit a vztahů v zadané situaci a v hledání matematického nástroje, který může pomoci najít řešení."

Domnívám se, že nejen nadaným žákům by při řešení slovních úloh nebo jiných úloh, které lze řešit algebraicky, pomohlo, kdyby byl ve výuce od 4. do 9. ročníku kladen důraz na různé strategie řešení, nikoli pouze na osvojení jednoho postupu. Žáci by nejdříve měli kultivovat experimentální metody, později začít používat aritmetické metody a na závěr, pokud toho budou schopni, přejít k algebraickým metodám s tím, že pokud to bude výhodné, použijí při řešení úloh i experimentální či aritmetickou metodu. Například v singapurských školách jsou žáci poprvé seznamováni s algebraickými problémy, obvykle zadávanými v podobě slovních úloh, v deseti letech (4. ročník). Žáci jsou vedeni k použití tzv. **schematické metody**, ve které jsou kvantitativní a kvalitativní vztahy znázorňovány schematicky (Lee et al., 2010). Na 2. stupni jsou žáci seznamováni s tzv. **symbolickou metodou** k řešení algebraických slovních úloh. Někteří žáci jsou schopni začít využívat tuto novou metodu, zatímco jiní setrvávají na používání schematické metody, kdy ze schématu vyčtou vzájemné vztahy a pokračují aritmeticky. Někteří žáci využívají kombinaci obou metod, kdy začnou schematickým znázorněním a poté vyčtou algebraické vztahy a pokračují algebraicky (Lee et al., 2010). Lee a kol. (2010) se ve svém výzkumu zabývali tím, zda by nebylo lepší zcela vynechat schematickou metodu a žáky rovnou seznamovat se symbolickou metodou. Z jejich výzkumu vyplynulo, že symbolická metoda je velmi namáhavá (z hlediska činnosti mozku) i pro zkušenější algebraické řešitele. Pro žáky 1. stupně by tedy nebylo vhodné nahrazovat schematickou metodu metodou symbolickou. Naopak žákům 2. stupně by zřejmě prospělo, kdyby nebyl kladen jednostranný důraz na symbolickou metodu a žákům byla ve volbě metody ponechána větší volnost.

Novotná se již řadu let věnuje zkoumání používání **heuristických strategií** při řešení problémových úloh. Mimo jiné se zabývala také otázkou, zda kladení důrazu na používání heuristických strategií je výhodné pouze pro žáky nadané, nebo pomáhá také žákům slabým. Novotná, Eisenmann a Přibyl (2015) provedli pedagogický experiment, ve kterém zkoumali vliv výuky zaměřené na používání heuristických strategií na slabší žáky. Výuka byla zpočátku náročná pro učitele i pro žáky. Žáci nebyli příliš ochotni využívat heuristické strategie. Pomohlo zavedení skupinové výuky, slabí žáci začali na nový styl výuky dobře reagovat, zejména co se týká schopnosti kooperace, ochoty vyzkoušet řešení, pokud žák není vybaven matematickým aparátem, a schopnosti věnovat více pozornosti ověřování výsledku.

V mém výzkumu jsem se setkávala s různými problémy žáků zapsat korektně výpočty. **Implikační zápis** se objevuje u mnoha žáků bez ohledu na intelekt. Například zápis 5 . 10 = 50 + 4 = 54 je matematicky nesprávný, neboť je v něm porušena tranzitivita relace rovnosti. Z didaktického hlediska můžeme v zápisu vidět ještě něco dalšího, a to je způsob uvažování, tzv. **implikační uvažování**, kdy žák „přemýšlí“ vždy zleva doprava. Tento způsob mu totiž brání podívat se na rovnici jako na celek a být schopen ji upravovat celou. Mnozí výzkumníci jsou přesvědčeni, že žáci základní školy chápou znak „rovná se“ jako jednosměrný operátor, který ze vstupů na levé straně vytváří výstup na pravé straně (např. Vergnaud, 1985, Booker, 1987, Booth, 1988).

Někteří žáci mají nepřekonatelný problém zapsat jakkoli průběh svých myšlenek. V mém výzkumu to byli například žáci, kteří na 1. stupni byli zvyklí pamětně řešit úlohy typu „myslím si číslo“ nebo jednoduché slovní úlohy. Jsou-li žáci na 1. stupni zvyklí řešit úlohy intuitivně, bez zápisu, začnou mít problémy na 2. stupni, při řešení úloh, které již není možné vyřešit intuitivně.

Z literatury je známo, že žáci s Aspergerovým syndromem neumí řešit problémové úlohy, což se u žáků s Aspergerovým syndromem zapojených do výzkumu nepotvrdilo. Spíše se domnívám, že žáci s Aspergerovým syndromem mají problémy se zachycením svých myšlenek na papír a interpretace jejich postupů je složitá, protože používají originální způsoby řešení.

Během několikaleté práce s nadanými dětmi jsem si všímala jejich projevů. Mnohdy se mi zdálo, že se žáci pohybují pod hranicí svého potenciálu (posuzováno dle volených strategií, zejména používání neřízeného experimentu, což svědčí o tom, že žák nerozvíjí dovednost řešit úlohy). Co podle mého názoru těmto dětem ve škole chybělo, byla diskuse nad možnostmi řešení a zaměření na strategie více než na osvojování si jednoho preferovaného způsobu řešení. Když měli nadaní žáci možnost povídat si o různých přístupech k řešení a rovněž pracovat s chybou, například v rámci našeho kroužku, začala být patrná jejich vysoká rychlost při osvojování si nových postupů.

Nedořešená zůstává otázka, zda je možné v dětství, během základní školní docházky, odhalovat ty žáky, kteří se budou v dospělosti projevovat jako matematicky nadaní. Jakékoli testování nadaných žáků pomocí didaktických testů se zaměřuje pouze na úzkou složku schopností, které předurčují, zda je žák nadaný a jak bude schopen svých vloh využít. Goleman (2011) uvádí, že v jedné studii prováděné na Kansaské univerzitě se ukázalo, že skutečné školní výsledky studentů se daly předpokládat lépe z jejich víry v úspěch než z výsledků přijímacích zkoušek (testu SAT, obdobě IQ testů). Lidé, kteří věří v úspěch, lépe řeší krizové situace, dokážou pružně přemýšlet a dosahují snadněji svých cílů. Obdobně dle Golemana předpovídá školní úspěchy optimismus. Optimismus vede člověka k tomu, aby vytrval i přes nezdary a porážky, aby se nevzdával a vytrval ve snaze. V testech schopností chybí hodnocení motivace. Didaktické testy by z tohoto důvodu mohly vyřadit celou řadu nadaných i matematicky nadaných žáků. Renzulli (1978) napsal, že „studie jasně ukazují, že obrovský počet a poměr nejvíce produktivních lidí nejsou ti, kteří skórovali nad 95. percentilem ve standardizovaných testech, ani ti, kteří na základní škole dostávali jedničky a kteří brzy zjistili, jak hrát školní hru na učení“[52] (s. 84).

Osoby skutečně matematicky nadané mohou být dle mého názoru v prostředí základní školy obtížně identifikovatelné. Blažková (2009) upozorňuje, že mnoho význačných osobností mělo v dětství problémy v matematice, a přesto dosáhli vynikajících výsledků právě v matematice nebo fyzice. Uvádí následující konkrétní příklady (Blažková, 2009: s. 21):

- O fyzikovi George Gamovovi prohlásila jeho studentka, známá astronomka Věra Rubinová: „Neuměl psát ani počítat. Chvíli by mu trvalo, než by vám řekl, kolik je 7 krát 8. Ale jeho rozum byl schopen chápat vesmír.“ (Gamov, 2000: s. 153).
- Matematik Nikolaj Nikolajevič Luzin patřil k lidem s pomalou reakcí. Také se pomalu vyvíjel, ve škole neprospíval, dokonce právě v matematice.
- David Hilbert, jeden z největších matematiků 20. století, působil dojmem tupého, pomalu uvažujícího člověka, který těžko chápe, co mu kdo vykládá.
- Albert Einstein, největší fyzik 20. století, ve škole propadal, měl velké problémy se čtením.
- Thomas Alva Edison patřil k horší části třídy, nikdy nezvládl dovednosti, jako je psaní, pravopis a také aritmetika.

Z toho důvodu se domnívám, že na základní škole bychom se měli snažit o rozvoj matematického myšlení u všech dětí, které o to mají zájem, a nesnažit se je příliš kategorizovat.

[52] The studies clearly indicate that vast number and proportions of our most productive persons are not those who scored at the 95th or above percentile on standardized tests, nor were they necessarily straight-A students who discovered early how to play the lesson-learning game.

# DOPORUČENÍ DO PRAXE

Přechod od aritmetiky k algebře je problematický pro všechny skupiny žáků základní školy. Vysoce nadaní žáci, jejichž matematické představy se vyvíjejí rychleji než u ostatních žáků, mají problém v tom, že u nich dochází k nástupu algebraického myšlení podstatně dříve, než je běžné. Nezřídka se stává, že tito žáci již během 5. až 6. ročníku začínají sami od sebe využívat algebraické způsoby řešení slovních úloh. U těchto žáků je ze strany učitele podstatná podpora v pochopení podstaty matematických zápisů a též nenásilné vedení ke korektnímu matematickému zápisu, aby si nefixovali nesprávné zápisy.

Problémy jiných nadaných a bystrých žáků pramení mnohdy z toho, že ve výuce je vynechána dlouhá etapa řešení algebraických úloh aritmetickými metodami. Těmto žákům by pomohlo, kdyby se seznamovali s aritmetickými strategiemi řešení slovních úloh už od 1. stupně. Je vhodné nechat volbu strategie na žákovi, což platí i po celý 2. stupeň. Pokud žák není na algebraické metody mentálně zralý, stejně je nebude schopen efektivně používat.

Ve vedení nadaných žáků hrají důležitou úlohu také rodiče. Rodiče pochopitelně mají zájem na tom, aby se jejich nadané dítě co nejlépe rozvíjelo. Pokud je během 1. stupně dítě identifikováno jako nadané, nezřídka se setkáváme s tím, že je přesunuto do třídy pro nadané a jeho výuka se začne podobat tréninku školních dovedností. Zkušenosti nám ukazují, že tento přístup nadané žáky nemusí příliš rozvíjet. Spíše vede k tomu, že žákovi ubývají kapacity na mentální aktivity, dokonce může dojít až k demotivaci žáka. Rodičům bych proto spíše doporučovala, aby kladli důraz na čtení (malým dětem čtou rodiče pohádky, příběhy a naučné knihy) a aby si s dětmi povídali o světě. Ginsburg a Uscianowski (2017) doporučují, aby rodiče i učitelé zařazovali mezi aktivity s dětmi čtení matematicky zaměřených knížek. Knihy s matematickou tematikou je možné volit již od předškolního věku. Oba autoři přitom navrhují držet se následujících zásad: vybrat dobrou knihu s matematickými obrázky; číst společně s dítětem; zdůrazňovat slova a obrázky, které znázorňují matematické pojmy; klást otázky, které nemají jednu odpověď; povzbuzovat dítě ve vysvětlování; následovat zájem dítěte; číst s citem; číst knihu opakovaně; užít si příběh.

Nadání je dar, který může dětem pomoci v dospělosti najít zajímavou práci, která je bude bavit a díky které budou moci pomáhat dalším lidem. Ve školním prostředí nelze předpokládat, že nadaným dětem půjde vše výborně samo od sebe. Zejména problematické části učiva, jako je v matematice například přechod od aritmetiky k algebře, mohou i nadaným dětem způsobovat různé potíže, se kterými potřebují pomoc, aby se mohly adekvátně rozvíjet.

# LITERATURA


Adetula, L. O. (1990). Language factor: Does it affect children's performance on word problems? *Educational studies in mathematics*, 21, pp. 351–365. Kluwer Academic Publishers.

Attwood, T. (2012). *Aspergerův syndrom. Porucha sociálních vztahů a komunikace*. Praha: Portál.

Betts, G. T. & Naihart, M. (1988). Profiles of the gifted and talented. *Gifted Child Quarterly, 32*(2), pp. 248–253.

Bělohlávková, L. (2013). Rozvoj sociálních dovedností. In Martinková, M. (ed.): *Sociálne vzdelávanie žiakov s Aspergerovým syndrómom*. Bratislava: Edoptim.

Blažková, R. (2009). *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice*. Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R. & Budínová, I. (2014). *Pracovní listy 1–8 pro matematicky nadané žáky 4. a 5. ročníku*. Brno: Centrum MU pro rozvoj nadaných dětí v JM kraji.

Blažková, R. & Budínová, I. (2017). *Matematika pro bystré a nadané žáky, 2. díl*. Brno: Edika.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2011a). *Kapitoly z didaktiky matematiky: slovní úlohy, projekty*. Brno: PdF MU.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2011b). *Pracovní sešit k učebnici matematika 3, 1. díl*. Praha: Alter.

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2011c). *Pracovní sešit k učebnici matematika 3, 2. díl*. Praha: Alter.

Booker, G. (1987). Conceptual obstacles to the development of algebraic thinking. In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 275–281. Montreal, Canada.

Booth, L. (1988). Children‘s difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12, 1988 Yearbook,* pp. 20–32. Reston, VA: NCTM.

Borland, J. H. (2005). Gifted Education without Gifted Pupils. In Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (Eds.) *Conceptions of Giftedness,* pp. 1–19. Cambridge University Press.

Britt, M., S., Irwin, K., C. (2011). Algebraic Thinking with and without Algebraic Representation: A Pathway for Learning. In Cai, J., Knuth, E. (Eds.) *Early algebraization,* pp. 137–160. Berlin: Springer-Verlag.

Břehovský, J., Eisenmann, P., Novotná, J. & Přibyl, J. (2015). Solving problems using experimental strategies. In Novotná, Jarmila & Moraová, Hana (Eds.), *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT ‘15, Proceedings. Developing mathematical language and reasoning,* pp. 72–81. Praha: UK-PedF.

Budíková, M., Králová, M. & Maroš, B. (2010). *Průvodce základními statistickými metodami*. Praha: Grada.

Budínová, I., Blažková, R., Vaňurová, M. & Durnová, H. (2016). *Matematika pro bystré a nadané žáky*. Brno: Edika.

Budínová, I. (2016). Aritmetické postupy v algebraických úlohách používané nadanými žáky na 1. stupni ZŠ. *Svět nadání*, Národní institut dětí a mládeže MŠMT, 2017, č. 2, s. 12–42. ISSN 1805-7217. Získáno z http://www.talentovani.cz/documents/10157/662115/Aritmeticke+postupy+v+algebraickych+ulohach.pdf/5dde4918-4cf7-4b2b-8b1d-e466a686612c

Campbell, J. R. (2001). *Jak rozvíjet nadání vašich dětí*. Praha: Portál.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education 37*(2), pp. 87–115.

Cvetkovič-Lay, J. (1995). *Ja choču i mogu više. Priručnik za odgoj darovite djece od 3 do 8 godina*. Zagreb: Alinea.

Damarin, S. (2000). The mathematically able as a marked category. *Gender and Education, 12*(1), pp. 69–85.

Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. In *Proceedings 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 219–226, Auckland.

Divíšek, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

Dixon, J. P. (1983). *The spatial child*. Springfield, IL: Charles S. Thomas.

Durnová, H. & Kotůlek, J. (2017). Kterak nadaný kvartán udolal učitele. *Svět nadání*. Č. 1, ročník VI.

Dweck, C. S. (2006). *Mindset. The New Psychology of Success*. New York: Ballantine Books.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 42–53). Kluwer Academic.

Fořtík, V. & Fořtíková, J. (2007). *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností*. Praha: Portál.

Frensch, P. & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving: Principles and Mechanisms*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fuchs, E. & Zelendová, E. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání*. Praha: NÚV.

Fuson, K. C., Caroll, W. M. & Landis, J. (1996). Levels in conceptualizing and solving addition and subtraction compare word problems. *Cognition and Instruction*, 14(3), pp. 345–371.

Gagné, F. (2005). From Gifts to Talents. The DMGT as a Developmental Model. In Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (Eds.) *Conceptions of Giftedness,* 2, pp. 98–119. Cambridge University Press.

Gamov, G. (2000). *Moje světočára*. Praha: Mladá fronta.

Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons*. NY: Basic books.

Garofalo, J. (1993). Mathematical problem preferences of meaning-oriented and number-oriented problem solvers. *Journal for the Education of the Gifted*. Vol. 17, no. 1, pp. 26–40.

Geschwind, N. (1982). Why Orton was wright. *Annals of dyslexia*, 32, pp. 13–30.

Ginsburg, H. P. & Uscianowski, C. (2017). Stories, stories, and more math stories. In Novotná, J. & Moraová, H. (Eds.) *International Symposium Elementary Maths Teaching: Equity and* *diversity in elementary mathematics education,* pp. 9–19. Prague: Charles University, Faculty of Education.

Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Students in Mathematics. *Arithmetic Teacher, 28,* pp. 14–18.

Goleman, D. (2011). *Emoční inteligence.* Praha: Metafora.

Havigerová, J. M. (2011). *Pět pohledů na nadání.* Praha: Grada.

Havigerová, J. M., Křováčková, B. a kol. (2011). *Co bychom měli vědět o nadání.* Hradec Králové: Gaudeamus.

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Hejný, M. (2003). Anatómia slovnej úlohy o veku. *Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra. Katolícka Univerzita, Ružomberok*, s. 1–13. Získáno z http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Hejny.pdf

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: PdF UK.

Hejný, M. a kol. (2015). *Matematika – učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* Praha: H-mat.

Hejný, M. & Stehlíková, N. (1999). Číselné představy dětí. Praha: PdF UK.

Herrnstein, R. J. & Murray, Ch. (1994). *The Bell Curve. Inteligence and Class Structure in American Life.* NY: Free Press.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In James Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics,* pp. 1–27. Hillsdale: Erlbaum.

Hollingworth, L. S. (1942). *Children above 180 IQ: Stanford-Binet-origin and development.* New York, World book (Yonkers-on-Hudson).

House, P. (Ed.) (1987). *Providing opportunities for the mathematically gifted K-12.* Reston, VA: NCTM.

Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadaní.* Praha: Grada.

Hříbková, L. & Páchová, A. (2013). Typy žáků v diskurzu učitelů základní školy. In Rendl, M., Vondrová, N. a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů,* s. 209–258. Praha: UK.

Chráska, M. (1999). *Didaktické testy.* Brno: Paido.

Johnson, M. L. (1983). Identifying and teaching mathematically gifted elementary school students. *Arithmetic teacher, 30*(5), pp. 25–26.

Juškevič, A. P. (1978). *Dějiny matematiky ve středověku.* Praha: Academia.

Kaslová, M., Fialová, D., Čížková, R. & Korda, J. (2007). *Sbírka úloh z matematiky pro 4. a 5. ročník základní školy.* Praha: SPN.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* pp. 390–419. New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139–151.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Knepper, W., Obrzut, E. J. & Copeland, P. E. (1983). Emotional and social problem-solving thinking in gifted and average elementary school children. *The journal of Genetic Psychology*, vol. 142, no. 1, pp. 25–30.

Kopka, J. (1999). *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

Kopka, J. (2007). *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN

Kuřina, F. (2016). *Matematika jako pedagogický problém*. Gaudeamus.

Kvasz, L. (2007). Vznik algebraickej symboliky. In N. Stehlíková & D. Jirotková (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2007,* s. 18–30. Praha: Pedagogická fakulta UK.

Kvasz, L. (2013). Historické aspekty vyučování algebry. In Rendl, M. Vondrová, N. a kol.: *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, s. 301–324. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Květoň, P. (1982). *Kapitoly z didaktiky matematiky*. Ostrava: Pedagogická fakulta v Ostravě.

Laznibatová, J. (2001). *Nadané dieťa, jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie*. Bratislava: Iris.

Lee, K., Yeong, S. H. M., Ng, S. F., Venkatraman, V., Graham, S. & Chee, M. W. L. (2010). Computing solutions to algebraic problems using a symbolic versus a schematic strategy. *ZDM Mathematics Education*, 42, pp. 591–605.

Lewis, A. B. & Mayer, R. E. (1987). Students‘ Miscomprehension of Relational Statements in Arithmetic Word Problems. *Journal of Educaional Psychology*. Vol. 79, no. 4, pp. 363–371. American Psychological Association, Inc.

Linsell, C. (2009). A hierarchy of strategies for solving linear equations. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Vol. 1, pp. 331–338. Palmerston North, NZ: MERGA.

Llinares, S. & Roig, A. I. (2008). Secondary School Studets‘ Construction and Use of Mathematical Models in Solving Word Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, pp. 505–532.

Malinová, E. (1983). *Didaktika matematiky pro první stupeň základní školy*. Praha: UK.

Mareš, M. (2011). *Příběhy matematiky*. Příbram: Pistorius a Olšanská.

Mayer, R. E. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In: F. K. Lester; Garofalo (Ed.). *Mathematical Problem Solving: Issues in Research,* pp. 1–13. Philadelpia: Franklin Institute Press.

Mayer, R. E. (1992). Cognition and instruction: Their historic meeting within educational psychology. *Journal of Educational Psychology*, vol. 84, no. 4, pp. 405–412. Washington.

Mihulová, M. & Svoboda, M. (2012). *Rozhovory s Einsteinem*. Santal.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. ERIC Clearinghouse on Handicapped and Gifted Children Reston VA.

Mišovcová, K. (2014). Učiteľ-rodič-dieťa s Aspergerovým syndrómom. In Mátychová, M. & Ižová, Z. (eds.): *Aspergerov syndróm: výzva pre výchovu, vzdelávanie, vedu a psychoterapiu.* Bratislava: Edoptim.

Mönks, F. J. (1987). Beratung und Förderung besonders begabter Schüller. *Psychologie in Erziehung und Unterricht,* 34, pp. 214–222.

Mönks, F. J. & Katzko, M. W. (2005). Giftedness and Gifted Education. In Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (Eds.) *Conceptions of Giftedness,* pp. 187–200. Cambridge University Press.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 7,* pp. 369–388.

Neusar, A. (2009). O otázkách a odpovědích: přínos kognitivního přístupu k metodologii dotazování. In Šucha, M., Charvát, M. & Řehan, V. (eds.): *Kvalitativní přístup a metody ve vědách o člověku.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. s. 27–35.

Navrátil, V. & Novotná, J. (2014). Významní fyzikové a matematici – mládí, nadání, dlouhověkost. In Jiřina Novotná (Ed.): *Motivace v matematice a přírodních vědách.* Brno: Munipress.

Nováková, E. (2016). *Analýza úloh ze soutěže Matematický Klokan a jejich řešení žáky primární školy.* Brno: Munipress.

Novotná, J. (1997). Geometrical models in solving word problems that include the division of the whole into parts (theory and practice). In *Interakcija Teorii i Praktyki w Nauczaniu Matematyki: materialy z konferencii naukowej,* pp. 109–119. Rzeszów.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: PedF UK.

Novotná, J. (2004). Student's Levels of Understanding Word Problems. In *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education,* pp. 184–185. Springer Netherlands.

Novotná, J. (2010). *Study of solving word problems in teaching of mathematics. From atomic analysis to the analysis of situations*. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing.

Novotná, J. (2016). Heuristic Strategies in Solving of Mathematical Problems at School. In Flégl, Houška, Krejčí (Eds.). *Efficiency and Responsibility in Education.* pp. 429–439. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze.

Novotná, J., Eisenmann, P. & Přibyl, J. (2015). Are heuristic strategies a domain only for gifted pupils? In Krejčí, Flégl & Houška (Eds.). *Efficiency and Responsibility in Education,* pp. 406–413. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze.

Odvárko, O. & Kadleček, J. (1997). *Matematika 1 pro 6. ročník ZŠ. Opakování z aritmetiky a geometrie.* Praha: Prometheus.

Odvárko, O. & Kadleček, J. (1998). *Matematika 1 pro 7. ročník ZŠ. Zlomky, celá čísla racionální čísla*. Praha: Prometheus.

Odvárko, O. & Kadleček, J. (2000). *Pracovní sešit z matematiky. Soubor úloh pro 8. ročník základní školy.* Praha: Prometheus.

Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky.* Plzeň: Fraus.

Polya, G. (2016). *Jak to řešit?* Praha: MatfyzPress.

Portešová, Š. (2009). *Skryté nadání. Psychologická specifika rozumově nadaných žáků s dyslexií.* Brno: Munipress.

Portešová, Š. (2011). *Rozumově nadané děti s dyslexií.* Praha: Portál.

Průcha, J., Walterová, E. & Mareš, J. (1998). *Pedagogický slovník*. Praha: Portál.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan*, vol. 60, no. 3, pp. 180-184. Retrieved from Kappan digital edition exclusive, 2011, pp. 81–89.

Renzulli, J. S. (1978). Co utváří nadání? *Phi Delta Kappan*, vol. 60, no. 3, pp. 180–184. Získáno z http://www.talentovani.cz/documents/10157/f6f98024-e26c-43b3-a49d-f417d208e1d1

Renzulli, J. S. (2005). The Three-Ring Conception of Giftedness. In Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (Eds.) *Conceptions of Giftedness,* pp. 246–279. Cambridge University Press.

Riley, M. S. & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, vol. 5, no. 1, pp. 49–101. Philadelphia.

Rogers, L. & Novotná, J. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding, Analysis and Teaching. In: *Classroom Contexts. Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School*. pp. 79–96. Bologna: Pitagora Editrice.

Russel, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetics. In Cai, J., Knuth, E. (Eds.) *Early algebraization*, pp. 43–70. Berlin: Springer-Verlag.

Růžička, M. (2014). Obtíže ve verbálním vyjadřování adolescentů s dvojí výjimečností. In Portešová Š. a kol.: *Rozumově nadaní studenti s poruchou učení. Cesty od školních výkonových paradoxů k úspěchu.* Brno: Munipress.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J. C. Bergeron, Nicolas Herscovics & Carolyn Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. III, pp. 162–169. Montréal: Université de Montréal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1–36.

Schacter, D. L. (1999). The seven sins of memory: Insights from psychology and cognitive neuroscience. *American Psychologist*, 54, pp. 182–203.

Siegle, D. (2012). *The underachieving gifted child: recognizing, understanding, and reversing underachievement.* Prufrock Press Inc.

Solso, R. L. (2001). *Cognitive Psychology.* Allyn & Bacon.

Sowell, E. J., Zeigler, A. J., Bergwell, L. & Cartwright, R. M. (1990). Identification and description of mathematically gifted students: A review of empirical research. *Gifted Child Quarterly*, vol. 34, no. 4, pp. 147–154.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations: The problem solving experiences of four gifted students. *The Journal of Secondary Gifted Education*, vol. 14, no. 3, pp. 151–165.

Sriraman, B. (ed.) (2008). *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics.* New York City: IAP.

Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problem. *Journal of Mathematics Behavior*, *18*(2), pp. 149–167.

Stehlíková, M. (2016). *Život s vysokou inteligencí*. Praha: Grada.

Sternberg, R. J. & Detterman, D. K. (1979). *Human Intelligence: Perspectives on its Theory and Measurement.* Norwood, NJ: Ablex.

Sternberg, R. J. (1981). The evolution of theories of intelligence. *Intelligence*, *5*(3), pp. 209–230.

Sternberg, R. J. & Williams, W., M. (2002). *Educational Psychology.* Boston: Allyn & Bacon.

Straker, A. (1980). Identification of Mathematically Gifted Pupils. *Mathematics in School.* Vol. 9, no. 4, pp. 4–8.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical--Pedagogical Perspective. In Cai, J., Knuth, E. (Eds.) *Early algebraization*, pp. 87–108. Berlin: Springer-Verlag.

Štěpánek, P. (2009). *Tvorba databáze otázek pro testování znalostí středoškolské biochemie*. Diplomová práce. Brno: PřF MU.

Thomson, M. (2006). *Supporting gifted and talented pupils in the secondary school.* London: Sage.

Thorová, K. (2016). *Poruchy autistického spektra*. Praha: Portál.

Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level. In A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (Eds.): *Theory, research and practice in mathematics education,* pp. 27–45. Nottingham, UK: University of Nottingham, Shell Center for Mathematical Education.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, *52*(2), pp. 83–94.

Vybíral, Z. (2006). *Psychologie jinak: Současná kritická psychologie.* Praha: Academia.

Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: SPN.

West, T. G. (2009). *In the Mind's Eye: Creative Visual Thinkers, Gifted Dyslexics, and the Rise of Visual Technologies.* Amherst, NY: Prometheus Books.

Wieczerkowski, W., Cropley, A. J. & Prado, T. M. (2000). Nurturing talents/gifts in mathematics. In Heller K. A., Monks F. J., Sternberg R. J. & Subotnik R. F. (Eds.). *International handbook of giftedness and talent education*. pp. 413–425. Oxford, United Kingdom: Pergamon.

Žalská, J. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. In Vondrová, N. & Rendl, M.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků,* s. 319–400. Praha: Karolinum.

## On-line zdroje

Betts, G., Neihart, M. (2017). *Profiles of Gifted, Talented, Creative Learners*

Dostupné z http://www.uncw.edu/Ed/aig/documents/2017/Profiles%20of%20the%20Gifted%20Talented%20and%20Creative.pdf (staženo 12. 10. 2017)

kolektiv autorů (2017). RVP ZV http://www.msmt.cz/file/41216/ (staženo 26. 11. 2017)

kolektiv autorů. https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/17383/matematika_a_jeji_aplikace.pdf (staženo 26. 11. 2017)

Příkryl, M. (1999). *Autističtí géniové.* Dostupné z www.talentovani.cz. (staženo 25. 7. 2017)

Standard komplexní diagnostiky mimořádného (intelektového) nadání:

http://www.nuv.cz/uploads/rovne_prilezitosti_ve_vzdelavani/nadani/diagnostika/standard_diagnostiky_mn_2016_12_09.pdf (staženo 9. 12. 2017)

# VĚCNÝ REJSTŘÍK


A

Algebraická úloha 32, 33,37 42, 49, 51
Algebraické myšlení 9, 35, 41, 45, 185, 189
Algoritmická znalost 51
Antisignál 32, 37, 50, 54
Aritmetická úloha 32, 37, 39, 49, 55, 56, 60, 92
Aspergerův syndrom 20, 22, 98, 164
Autismus 22, 98, 164, 165
Autonomní děti 19, 77, 81, 89

B

Bystrý žák 27, 93

D

Defenzivní odpadlíci 19, 77
Děti s dvojí výjimečností 2, 77, 89
Diferenciace 28, 29
Diferenciace vnější 28
Diferenciace vnitřní 28, 29
Diferencovaná výuka 28
Distraktor 32
Dvojí výjimečnost 8, 9, 20, 89
Dynamická úloha 32, 49, 51, 53, 60, 75, 99, 149, 168

E

Experiment 41–43, 48, 62, 109, 116–120

G

Genově-environmentální interakce 17
Geometrická algebra Řeků 33
Geometrická úloha 32

H

Hejného metoda 44, 46
Heuristická strategie 48, 169, 186

I

Identifikace nadaných žáků 25, 26
Implikační myšlení 35, 186
Individualizace 28
Individualizovaná výuka 29
Inteligence 13, 14, 17, 18, 23–27, 90, 92
Inteligenční kvocient 11, 14, 15
Interpersonální inteligence 17
Intrapersonální inteligence 17

J

Jazyková (verbální) inteligence 17, 18
Jednoduchá slovní úloha 50, 54, 186

K

Klíčové slovo 31
Konzistentní slovní problém 54
Kreativita 11, 18, 22, 24
Kvantita 12, 37, 40, 131

L

Latentní nadání 26
Logicko-matematická inteligence 17, 18, 23, 90

M

Manifestované nadání 26
Matematická úloha 31, 47
Matematické nadání 23, 24, 60
Matematicky nadaný žák 24
Matematizace 31, 36, 50
Metoda falešného předpokladu 34, 105, 142
Metoda pokusu a omylu 30, 48, 70, 88, 104, 109, 142
Metodické komentáře ke Standardům základního vzdělávání 41
Mimořádně nadané dítě 12, 85

Multifaktorový model nadání 18
Muzikální inteligence 17

N
Nadané děti s ADHD 20, 23, 98, 163, 164, 173
Nadané děti s Aspergerovým syndromem 22, 23, 150, 157, 162, 163, 165, 169, 186
Nadané děti s dyslexií 21
Nadané děti s extrémně vysokým IQ 27
Nadané dítě 12
Nadaný žák 11, 13, 24
Nálepkování nadaných žáků 26
Nekonzistentní slovní problém 54
Nekonzistentní úloha 32

O
Operační schéma 37
Operátor 37, 62

P
Paměť 13, 14, 22, 23, 27
Podvýkonní žáci 19
Podvýkonní nadaní žáci 20
Podvýkonnost 20
Postup od konce 38, 49, 63, 65, 66, 75
Problémová úloha 23, 29, 30, 32, 40, 48, 60, 62, 72, 75
Profily nadaných žáků 19, 20
Propedeutika algebraického myšlení 35, 41
Prostorová inteligence 17, 23, 90
Provokatéři (kreativní rebelové) 19, 77
Přírodní inteligence 17

R
Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání 41
Řešení úlohy 12, 14, 16, 24, 33, 34
Řízený experiment 42, 43, 48, 53

S
Schematická metoda 39, 185
Signální slovo 31, 50, 54
Skrývači nadání 19, 77
Složená slovní úloha 32, 50
Statická úloha 32
Strategie (řešení) 29, 30, 48
Stupně nadání 14, 15
Symbolická metoda 39, 185, 186
Symbolické období 35
Synkopické období 33, 34
Šipkový diagram 37, 38, 63
Školní nadání 18

T
Teorie multiplikativní inteligence 17, 90
Tělesně-kinestetická inteligence 17
Tříkruhový model nadání 18
Tvořivě-produktivní nadání 18
Typická slovní úloha 32, 51

U
Uchopování slovní úlohy 51
Úloha rovnicového charakteru 24, 30, 31, 32, 41, 48, 49, 54, 56, 58, 77, 93, 95, 96
Úsečkový model 41, 52
Úspěšné děti 19, 77, 81

V
Verbální vodítko 31
Verbalistické období 33

T
Talent 11, 12

Z
Zkouška správnosti 48, 56, 76, 105, 106, 131

# PŘÍSTUPY NADANÝCH ŽÁKŮ 1. A 2. STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

## K ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH TYPŮ ÚLOH V MATEMATICE

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

Ediční řada: Matematika a didaktika matematiky
Svazek 4

Vydala Masarykova univerzita, Žerotínovo nám. 617/9, 601 77 Brno
Jazykové korektury Mgr. Ondřej Pechník
Grafický návrh Mgr. Jana Nedomová
1., elektronické vydání, 2018

ISBN 978-80-210-9216-7

Publikace se zabývá vzděláváním rozumově nadaných žáků v matematice. Jako nosné matematické téma byl pro tuto problematiku vybrán přechod od aritmetiky k algebře, což je obtížná pasáž školské matematiky, se kterou mají potíže žáci všech výkonnostních skupin. Kromě obecného teoretického vhledu do problematiky vzdělávání rozumově nadaných žáků se publikace zaměřuje především na řešitelské strategie nadaných žáků při řešení specifického typu algebraických úloh. Dále jsou v publikaci popsány výsledky dvou výzkumů, které se systematicky věnovaly přístupům k řešení algebraických úloh nadanými žáky prvního i druhého stupně základní školy. Předkládaná monografie je určena širokému spektru potenciálních čtenářů: studentům učitelství matematiky, studentům primární pedagogiky, učitelům základních škol i rodičům dětí školního věku.

Matematika
a didaktika matematiky

MUNI
PRESS